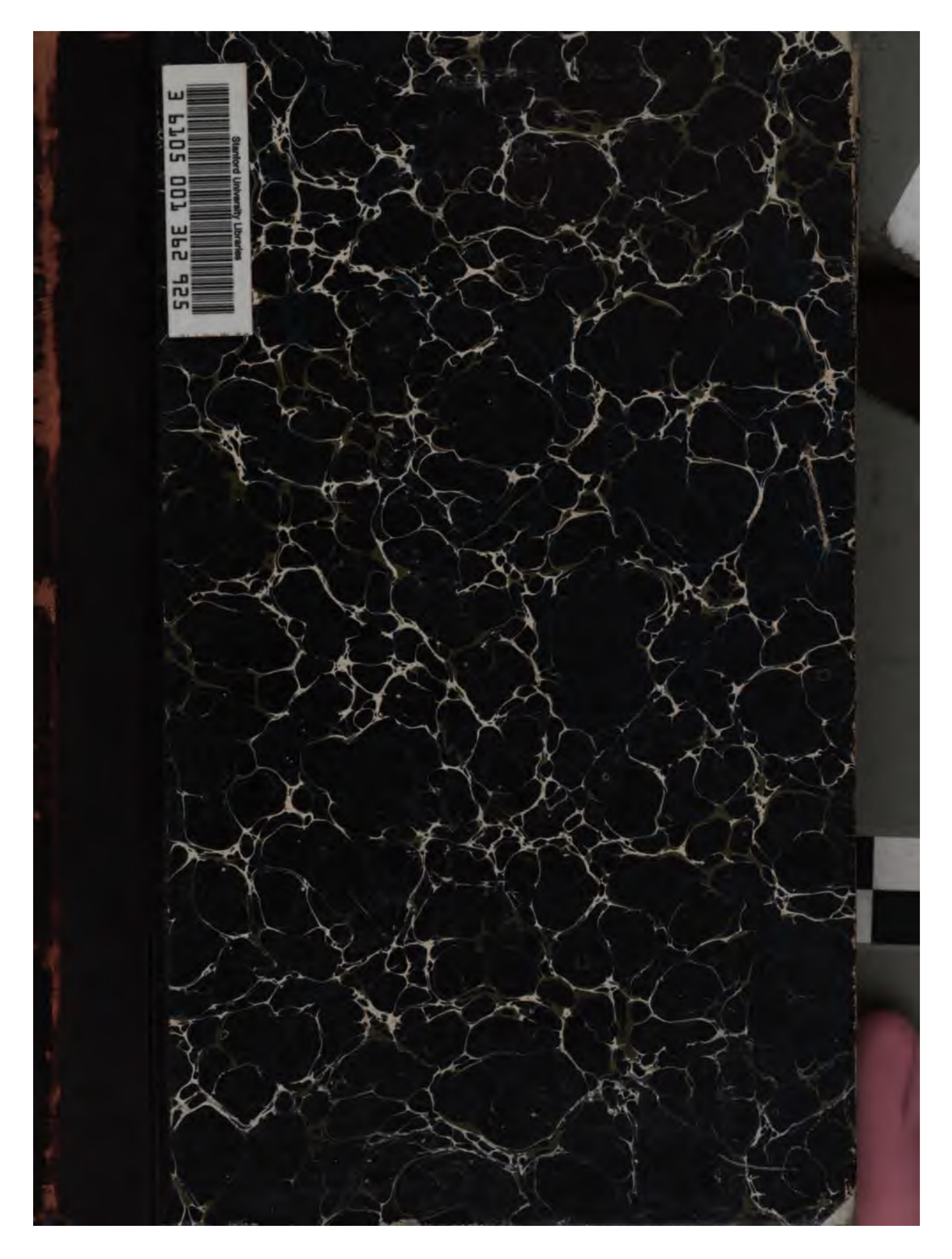

Stanford University Libraries
3 6105 001 362 925







# Zeitschrift

für

# Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch** und **Dr. M. Cantor.**

**39. Jahrgang.**

Mit in den Text gedruckten Figuren und sechs lithographirten Tafeln.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1894.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

# Inhalt.

## Arithmetik und Analysis.



## Synthetische und analytische Geometrie.

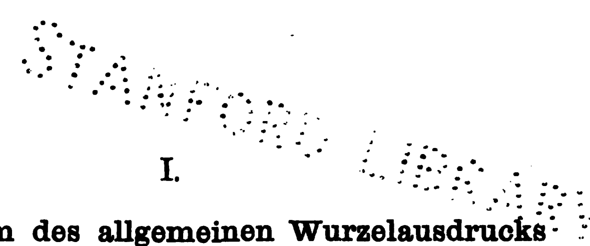
## Mechanik.



## Physik.



## Preisaufgaben.



# I.

## Die Normalform des allgemeinen Wurzelausdrucks und ihre Eigenschaften.

Von

Dr. GOTTL. FRIEDR. LIPPS
in Strassburg (Elsass).

Schluss.

### III. Die Eigenschaften der allgemeinen Normalform.

§ 1. Nachdem die vorbereitenden speciellen Fälle erledigt sind, können jetzt die Grade $n_1, n_2 \dots n_\nu$ der Einheitswurzeln ganz beliebig gewählt werden.

Bezeichnet $n_{\lambda k}$ den grössten gemeinsamen Theiler zweier Zahlen $n_\lambda$ und $n_k$, so dass $n_{\lambda k} = n_{k \lambda}$; $n_{\lambda\lambda} = n_\lambda$, so kann in den äquivalenten Symbolen

$$F(\varepsilon_{n_1};\ \varepsilon_{n_2} \dots \varepsilon_{n_\nu}) \sim F(\eta_{n_1};\ \eta_{n_2} \dots \eta_{n_\nu})$$

gesetzt werden:

$$1)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \eta_{n_k} = \varepsilon_{n_1}^{i_{1k}\frac{n_1}{n_{1k}}} \cdot \varepsilon_{n_2}^{i_{2k}\frac{n_2}{n_{2k}}} \cdots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu k}\frac{n_\nu}{n_{\nu k}}} \\ (k = 1,\ 2 \dots \nu). \end{array} \right.$$

Denn der kleinste Exponent einer Potenz von $\varepsilon_{n_\lambda}$, die eine Einheitswurzel vom Grade $n_k$ darstellen soll, ist (von der Null abgesehen): $n_\lambda / n_{\lambda k}$, so dass:

$$2)\qquad \varepsilon_{n_\lambda}^{\frac{n_\lambda}{n_{\lambda k}}} = \varepsilon_{n_k}^{\frac{n_k}{n_{\lambda k}}}.$$

Es stellt daher $\eta_{n_k}$ in allgemeinster Form eine Einheitswurzel vom Grade $n_k$ dar, nämlich:

$$3)\qquad \eta_{n_k} = \varepsilon_{n_k}^{\left(i_{1k}\frac{n_k}{n_{1k}} + i_{2k}\frac{n_k}{n_{2k}} + \cdots i_{\nu k}\frac{n_k}{n_{\nu k}}\right)}.$$

Die Grössen $i_{\lambda k}$ sind hier Zahlen aus der Reihe: $1, 2 \dots n_{\lambda k}$; sie müssen aber derart aus der Reihe dieser Zahlen gewählt werden, dass die $\eta_{n_1} \dots \eta_{n_\nu}$ durch Einsetzen der successiven Potenzen $\varepsilon_{n_1}^{\lambda_1}, \varepsilon_{n_2}^{\lambda_2} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu}$ an Stelle von $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2} \dots \varepsilon_{n_\nu}$ alle $n_1 . n_2 \dots n_\nu$ Systeme darstellen, die man aus den Einheitswurzeln vom Grade $n_1, n_2 \dots n_\nu$ bilden kann. Die $i_{\lambda k}$ müssen somit die Bedingung erfüllen, dass die $\nu$ Congruenzen:

$$4)\quad \begin{cases} \lambda_1 i_{1k}\frac{n_k}{n_{1k}} + \lambda_2 i_{2k}\frac{n_k}{n_{2k}} + \cdots \lambda_\nu i_{\nu k}\frac{n_k}{n_{\nu k}} \equiv a_k (mod\, n_k) \\ (k = 1,\ 2 \ldots \nu) \end{cases}$$

zugleich mit den $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Werthensystemen

$$\lambda_1 = 1,\ 2 \ldots n_1; \ldots \lambda_\nu = 1,\ 2 \ldots n_\nu$$

alle $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Systeme von Werthen

$$a_1 \equiv 0,\ 1 \ldots n_1 - 1\ (mod\ n_1);\ \ldots a_\nu \equiv 0,\ 1 \ldots n_\nu - 1\ (mod\ n_\nu)$$

darstellen.

Dazu ist nothwendig und hinreichend, dass die $\nu$ Systeme

$$5a)\qquad i_{1k}\frac{n_k}{n_{1k}},\quad i_{2k}\frac{n_k}{n_{2k}}, \ldots i_{\nu k}\frac{n_k}{n_{\nu k}} \qquad (k = 1,\ 2 \ldots \nu)$$

relativ prim zu $n_k$ und unabhängig von einander seien. Sie sind aber unabhängig von einander, wenn $\nu - 1$ beliebig gewählte Congruenzen erfüllt werden und unter Festhalten dieser Congruenzenwerthe die noch übrige Congruenz beliebig bestimmbar bleibt.

Diese Bedingung lässt sich detaillirter in folgender Art formuliren: Ist $p$ eine Primzahl, welche in den Zahlen $n_{\alpha_1}, n_{\alpha_2} \ldots n_{\alpha_\mu}$ und nur in diesen aufgeht, wo $n_{\alpha_1}, \ldots n_{\alpha_\mu}$ irgend welche Zahlen der Reihe $n_1, n_2 \ldots n_\nu$ darstellen, so muss der Werth der Determinante

$$5b)\qquad \begin{vmatrix} i_{\alpha_1\alpha_1} & i_{\alpha_1\alpha_2}\frac{n_{\alpha_1}}{n_{\alpha_2\alpha_1}} & \ldots i_{\alpha_1\alpha_\mu}\frac{n_{\alpha_1}}{n_{\alpha_1\alpha_\mu}} \\ i_{\alpha_2\alpha_1}\frac{n_{\alpha_2}}{n_{\alpha_1\alpha_2}} & i_{\alpha_2\alpha_2} & \ldots i_{\alpha_2\alpha_\mu}\frac{n_{\alpha_2}}{n_{\alpha_2\alpha_\mu}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ i_{\alpha_\mu\alpha_1}\frac{n_{\alpha_\mu}}{n_{\alpha_1\alpha_\mu}} & i_{\alpha_\mu\alpha_2}\frac{n_{\alpha_\mu}}{\alpha_{\alpha_2\alpha_\mu}} & \ldots i_{\alpha_\mu\alpha_\mu} \end{vmatrix}$$

relativ prim zu $p$ sein und es wird sich jeder Primzahl, die in Zahlen aus der Reihe $n_1, n_2 \ldots n_\nu$ aufgeht, eine solche Determinante zuordnen, die bezüglich jener relativ prim sein muss. Geht insbesondere eine Primzahl nur in einer der Zahlen $n_1, n_2 \ldots n_\nu$ z. B. in $n_\alpha$ auf, so muss $i_{\alpha\alpha}$ relativ prim zu ihr sein.

Daraus lässt sich auch die Anzahl der äquivalenten Symbole bestimmen. Ich ziehe es jedoch vor, auf folgendem Wege zur Kenntniss dieser Anzahl zu gelangen.

§ 2. Ist eine Zahl $n$ gleich dem Producte zweier relativer Primzahlen $m$ und $m'$, so ist jede Einheitswurzel $\varepsilon_n^\lambda$ darstellbar durch das *Product* $\varepsilon_m^\mu . \varepsilon_{m'}^{\mu'}$, *wo:*

$$\mu m' + \mu' m \equiv \lambda \ (mod\, n)$$

sein muss. Sind nun zwei Normalformen vorgelegt:

$$x_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_\nu} = \sum_{\beta_1 \ldots \beta_\nu} \varepsilon_{m_1}^{\mu_1 \beta_1} \ldots \varepsilon_{m_\nu}^{\mu_\nu \beta_\nu} . a_{\beta_1 \ldots \beta_\nu}$$

$$x_{\mu_1' \mu_2' \ldots \mu_\nu'} = \sum_{\beta_1' \ldots \beta_\nu'} \varepsilon_{m_1'}^{\mu_1' \beta_1'} \ldots \varepsilon_{m_\nu'}^{\mu_\nu' \beta_\nu'} . a_{\beta_1' \ldots \beta_\nu'}$$

so ist:

6) $$x_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_\nu} . x_{\mu_1' \mu_2' \ldots \mu_\nu'} \sum_{\beta_1 \ldots \beta_\nu} \sum_{\beta_1' \ldots \beta_\nu'} (\varepsilon_{m_1}^{\mu_1 \beta_1} \varepsilon_{m_1'}^{\mu_1' \beta_1'}) \ldots (\varepsilon_{m_\nu}^{\mu_\nu \beta_\nu} \varepsilon_{m_\nu'}^{\mu_\nu' \beta_\nu'}) . a_{\beta_1 \ldots \beta_\nu} . a_{\beta_1' \ldots \beta_\nu'} .$$

Ist ferner in

$$x_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu} = \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu \alpha_\nu} . a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu},$$

$$n_i = m_i . m_i', \text{ wo } m_i \text{ relativ prim zu } m_i' \quad (i = 1, 2 \ldots \nu)$$

und setzt man:

$$\lambda_i \equiv \mu_i m_i' + \mu_i' m_i (mod\, n_i); \quad \alpha_i \equiv \beta_i m_i' + \beta_i' m_i (mod\, n_i) \quad (i = 1, 2 \ldots \nu),$$

so erhält man:

7) $$\begin{cases} x_{\mu_1 m_1' + \mu_1' m_1 \ldots \mu_\nu m_\nu' + \mu_\nu' m_\nu} = \sum_{\beta_1 \beta_1' \ldots \beta_\nu \beta_\nu'} (\varepsilon_{m_1}^{\mu_1 m_1' \beta_1} \varepsilon_{m_1'}^{\mu_1' m_1 \beta_1'}) \ldots \\ \times (\varepsilon_{m_\nu}^{\mu_\nu m_\nu' \beta_\nu} \varepsilon_{m_\nu'}^{\mu_\nu' m_\nu \beta_\nu'}) . a_{\beta_1 m_1' + \beta_1' m_1 \ldots \beta_\nu m_\nu' + \beta_\nu' m_\nu} . \end{cases}$$

Dieser Normalform ordnet sich somit das Product 6) eindeutig zu. Sie kann direct durch dieses Product ersetzt werden, wenn man symbolisch

8a) $x_{\mu_1 m_1' + \mu_1' m_1 \ldots \mu_\nu m_\nu' + \mu_\nu' m_\nu}$ durch $x_{\mu_1 m_1' \ldots \mu_\nu m_\nu'} . x_{\mu_1' m_1 \ldots \mu_\nu' m_\nu}$ und

8b) $a_{\beta_1 m_1' + \beta_1' m_1 \ldots \beta_\nu m_\nu' + \beta_\nu' m_\nu}$ durch $a_{\beta_1 m_1' \ldots \beta_\nu m_\nu'} . a_{\beta_1' m_1 \ldots \beta_\nu' m_\nu}$

darstellt. In entsprechender Weise kann auch das die Functionen der Normalform darstellende Symbol

$$F(\varepsilon_{n_1};\ \varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu})$$

in das Product

9a) $$F(\varepsilon_{m_1};\ \varepsilon_{m_2} \ldots \varepsilon_{m_\nu}) . F(\varepsilon_{m_1'};\ \varepsilon_{m_2'} \ldots \varepsilon_{m_\nu'})$$

zerlegt werden. Diese Zerlegung hat aber zur Folge, dass auch jedes äquivalente Symbol

$$F(\eta_{n_1};\ \eta_{n_2} \ldots \eta_{n_\nu})$$

durch

9b) $$F(\eta_{m_1};\ \eta_{m_2} \ldots \eta_{m_\nu}) . F(\eta_{m_1'};\ \eta_{m_2'} \ldots \eta_{m_\nu'})$$

darstellbar wird, so dass die Anzahl der äquivalenten Symbole $F(\eta_{n_1}; \eta_{n_2} \ldots \eta^{n}_{\nu})$ durch das Product der Anzahlen angegeben wird, die man für die äquivalenten Symbole

$$F(\eta_{m_1};\ \eta_{m_2} \ldots \eta_{m_\nu}) \quad \text{und} \quad F(\eta_{m_1'};\ \eta_{m_2'} \ldots \eta_{m_\nu'})$$

erhält.

Ist nun:

$$10)\quad \begin{cases} n_1 = p^{\pi_1} . r^{\varrho_1} . s^{\sigma_1} \dots \\ n_2 = p^{\pi_2} . r^{\varrho_2} . s^{\sigma_2} \dots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ n_\nu = p^{\pi_\nu} . r^{\varrho_\nu} . s^{\sigma_\nu} \dots \end{cases}$$

und schreibt man der Einfachheit wegen $p_i$ statt $p^{\pi_i}$, $r_i$ statt $r^{\varrho_i}$, $s_i$ statt $s^{\sigma_i}$ u. s. w., so zerlegt sich

$$F(\varepsilon_{n_1};\ \varepsilon_{n_2} \dots \varepsilon_{n_\nu})$$

in das Product:

$$11)\quad F(\varepsilon_{p_1};\ \varepsilon_{p_2} \dots \varepsilon_{p_\nu}) . F(\varepsilon_{r_1};\ \varepsilon_{r_2} \dots \varepsilon_{r_\nu}) . F(\varepsilon_{s_1};\ \varepsilon_{s_2} \dots \varepsilon_{s_\nu}) \cdot \cdots$$

Es bleibt daher blos noch die Anzahl der Symbole zu ermitteln, die je einem der Factoren dieses Productes äquivalent sind. Diese Anzahl wurde aber bei der Behandlung der durch besondere Annahmen modificirten Normalformen an dritter Stelle gewonnen, wo die Voraussetzung gemacht war, dass die Zahlen $n_1 \dots n_\nu$ Potenzen einer Primzahl $p$ seien.

Man bezeichne demgemäss die Exponenten der Potenzen $p^{\pi_1}, p^{\pi_2} \dots p^{\pi_\nu}$, von welchen $\lambda$ einen von der Null verschiedenen Exponenten haben sollen, der Grösse nach geordnet durch

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \cdots > \alpha_\lambda \geqq 1$$

und nehme an, dass:

$$12a)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k_1} = (\alpha' k_1) \\ \alpha_{k_1+1} = \alpha_{k_1+2} = \cdots = \alpha_{k_1+k_2} = (\alpha'' k_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{k_1+\cdots k_{\mu-1}+1} = \alpha_{k_1+\cdots k_{\mu-1}+2} = \cdots = \alpha_{k_1+\cdots k_\mu} = (\alpha^{(\mu)} k_\mu) \\ (\alpha' k_1) > (\alpha'' k_2) > \cdots (\alpha^{(\mu)} k_\mu) \geqq 1 \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_\mu = \lambda. \end{cases}$$

Ebenso bezeichne man die Exponenten der Potenzen $r^{\varrho_1}, r^{\varrho_2} \dots r^{\varrho_\nu}$, von welchen $\lambda'$ einen von der Null verschiedenen Werth haben sollen, der Grösse nach geordnet durch

$$\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \cdots \geqq \beta_{\lambda'} \geqq 1$$

und nehme an, dass:

$$12b)\quad \begin{cases} \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{k_1'} = (\beta' k_1') \\ \beta_{k_1'+1} = \beta_{k_1'+2} = \cdots = \beta_{k_1'+k_2'} = (\beta'' k_2') \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \beta_{k_1'+\cdots k_\nu'_{-1}+1} = \beta_{k_1'+\cdots k'_{\nu-1}+2} = \cdots \beta_{k_1'+\cdots k_\nu'} = (\beta^{(\nu)} k_\nu') \\ (\beta' k_1') > (\beta'' k_2') > \cdots (\beta^{(\nu)} k_\nu') \geqq 1 \\ k_1' + k_2' + \cdots + k_\nu' = \lambda'. \end{cases}$$

*In gleicher* Weise verfahre man mit den Potenzen der übrigen Prim*zahlen, die in den Zahlen* $n_1, n_2 \dots n_\nu$ enthalten sind.

Als Gesammtzahl äquivalenter Symbole findet man alsdann:

$$13)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(p^{(\alpha' k_1)},\ p^{(\alpha'' k_2)}\dots p^{(\alpha^{(\mu)} k_\mu)};\ \lambda = k_1 + \cdots k_\mu) \\ .\ \varphi(r^{(\beta' k_1')},\ r^{(\beta'' k_2')}\dots r^{(\beta^{(\nu)} k_\nu')};\ \lambda' = k_1' + \cdots k_\mu') \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \end{array}\right.$$

§ 3. Kehrt man nun von den Symbolen $F$ zu dem Systeme der Functionen der Normalform zurück, so ergiebt sich, dass die Functionen ungeändert bleiben, wenn an Stelle der Einheitswurzeln $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2}, \dots \varepsilon_{n_\nu}$ die Einheitswurzeln $\eta_{n_1}, \eta_{n_2} \dots \eta_{n_\nu}$ treten, wo

$$\eta_{n_k} = \varepsilon_{n_1}^{i_{1k}\frac{n_1}{n_{1k}}} \cdot \varepsilon_{n_2}^{i_{2k}\frac{n_2}{n_{2k}}} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu k}\frac{n_\nu}{n_{\nu k}}} = \varepsilon_{n_k}^{\left(i_{1k}\frac{n_k}{n_{1k}} + i_{2k}\frac{n_k}{n_{2k}} + \cdots i_{\nu k}\frac{n_k}{n_{\nu k}}\right)}$$
$$(k = 1,\ 2 \dots \nu)$$

und wo die $i_{\lambda k}$ die in 5) ausgesprochenen Bedingungen erfüllen müssen.

Es ist daher:

$$14)\quad \left\{\begin{array}{l} S \sum\limits_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 \alpha_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu \alpha_\nu} .\ a_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \\ \equiv S \sum\limits_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \left(\varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 i_{11}} . \varepsilon_{n_2}^{\lambda_2 i_{21}\frac{n_2}{n_{12}}} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu i_{\nu 1}\frac{n_\nu}{n_{1\nu}}}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 i_{1\nu}\frac{n_1}{n_{1\nu}}} . \varepsilon_{n_2}^{\lambda_2 i_{2\nu}\frac{n_2}{n_{2\nu}}} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu i_{\nu\nu}}\right)^{\alpha_\nu} .\ a_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu}. \end{array}\right.$$

Den von den $i_{\lambda k}$ erfüllten Bedingungen zu Folge stellen aber die $\nu$ Summen

$$\begin{array}{l} i_{11}\alpha_1 + i_{12}\frac{n_1}{n_{12}}\alpha_2 + \cdots i_{1\nu}\frac{n_1}{n_{1\nu}}\alpha_\nu \\ i_{21}\frac{n_2}{n_{12}}\alpha_1 + i_{22}\alpha_2 + \cdots i_{2\nu}\frac{n_2}{n_{2\nu}}\alpha_\nu \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ i_{\nu 1}\frac{n_\nu}{n_{1\nu}}\alpha_1 + i_{2\nu}\frac{n_\nu}{n_{2\nu}}\alpha_2 + \cdots i_{\nu\nu}\alpha_\nu \end{array}$$

alle Systeme dar, die aus den bezüglich $n_1, n_2 \dots n_\nu$ incongruenten Zahlen gebildet werden können, wenn die $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_\nu$ alle Werthensysteme der Zahlen $1, 2 \dots n_1;\ 1, 2 \dots n_2; \dots 1, 2 \dots n_\nu$ durchlaufen.

Es ist folglich

$$15)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 \alpha_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu \alpha_\nu} a_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \\ = \sum\limits_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{\left(i_{11}\alpha_1 + i_{12}\frac{n_1}{n_{12}}\alpha_2 + \dots i_{1\nu}\frac{n_\nu}{n_{1\nu}}\alpha_\nu\right)\lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{\left(i_{\nu 1}\frac{n_\nu}{n_{1\nu}}\alpha_1 + i_{\nu 2}\frac{n_\nu}{n_{2\nu}}\alpha_2 + \dots i_{\nu\nu}\alpha_\nu\right)\lambda_\nu} \\ \quad .\ a_{i_{11}\alpha_1 + \dots i_{1\nu}\frac{n_1}{n_{1\nu}}\alpha_\nu; \dots i_{\nu 1}\frac{n_\nu}{n_{1\nu}}\alpha_1 + \dots i_{\nu\nu}\alpha_\nu}, \end{array}\right.$$

wo die Indices der $a$ auf ihre kleinsten positiven Werthe bezüglich der *Modulen* $n_1, n_2 \dots n_\nu$ zu reduciren sind.

Die Relation 14) kann daher in folgende Form gebracht werden:

$$16)\quad \begin{cases} S\sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{\left(i_{11}\alpha_1+\ldots i_{1\nu}\frac{n_1}{n_{1\nu}}\alpha_\nu\right)\lambda_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\left(i_{\nu 1}\frac{n_\nu}{n_{1\nu}}\alpha_1+\ldots i_{\nu\nu}\alpha_\nu\right)\lambda_\nu} \\ \qquad \cdot a_{i_{11}\alpha_1+\ldots i_{1\nu}\frac{n_1}{n_{1\nu}}\alpha_\nu;\ldots i_{1\nu}\frac{n_1}{n_{1\nu}}\alpha_1+\ldots i_{\nu\nu}\alpha} \\ \equiv S\sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}\left(\varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 i_{11}}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu i_{\nu 1}\frac{n}{n_{1\nu}}}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 i_{1\nu}\frac{n_1}{n_{1\nu}}}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu i_{\nu\nu}}\right)^{\alpha_\nu}\cdot a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}. \end{cases}$$

Daraus ist genau in derselben Weise wie in den früheren speciellen Fällen ersichtlich, dass es Vertauschungen der $a$ giebt, die das System der Functionen der Normalform unverändert lassen; zugleich kann in gleicher Weise wie früher nachgewiesen werden, dass es nur die durch die äquivalenten Symbole bedingten Vertauschungen der $a$ giebt, so lange keine Bedingungsgleichungen für die $a$ bestehen, die anderweitige Vertauschungen der $a$ motiviren.

Es resultirt somit folgender Satz, der die Eigenschaften der allgemeinen Normalform eines aus $\nu$ beliebigen Wurzelgrössen vom Grade $n_1, n_2 \ldots n$ gebildeten Wurzelausdrucks angiebt.

Die $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Functionen der Normalform:

$$x_{\lambda_1\ldots\lambda_\nu} = \sum_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{\lambda_1\alpha_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu\alpha_\nu}\cdot a_{\alpha\ldots\alpha_\nu}$$

gestatten Vertauschungen der $a$ von der Art, dass an Stelle aller $a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}$ die $a_{i_{11}\alpha_1+\ldots i_{1\nu}\frac{n_1}{n_{1\nu}}\alpha_\nu;\ldots i_{1\nu}\frac{n}{n_{1\nu}}\alpha_1+\ldots i_{\nu\nu}\alpha_\nu}$ treten, wo die Indices der $a$ auf ihre kleinsten positiven Werthe bezüglich der Modulen $n_1, n_2 \ldots n_\nu$ zu reduciren sind, wo ferner die $i_{\lambda k}$ die in 5) angegebenen Bedingungen erfüllen müssen. Die Anzahl dieser Vertauschungen wird durch das Product 13) angegeben, wo die zahlentheoretische Function

$$\varphi(p^{(\alpha' k)},\ p^{(\alpha'' k_2)}, \ldots p^{(\alpha^{(\mu)} k_\mu)};\ \nu = k_1 + \cdots k_\mu)$$

durch II 27) definirt wird. Es existiren bloss die Vertauschungen der angegebenen Art, so lange keine Bedingungsgleichungen bestehen, die das Hinzutreten weiterer Vertauschungen veranlassen.

§ 4. Die Untersuchung der Eigenschaften der Normalform gipfelt somit in der Erkenntniss, dass die Grössen $a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}$ vertauschbar sind.

Dadurch wird eine Beziehung dieser Untersuchungen zu der Theorie der Substitutionen gewonnen, die seit Galois grundlegenden Entdeckungen als Ausgangspunkt für die Erforschung der Auflösbarkeitsbedingungen der algebraischen Gleichungen dient.* Es beruhen zwar die im Vor-

* Vergl. Handbuch der höheren Algebra von Serret substitutions et des équations algébriques von Jord

stehenden gewonnenen Resultate nicht auf den Begriffen und Methoden der Substitutionentheorie, sie sind auch keineswegs der Einkleidung in das Gewand der Substitutionentheorie bedürftig, sondern genügen in der oben gegebenen Form. Es ist aber nothwendig anzugeben, in wie weit die vorstehenden Resultate ohne die Anlehnung an die Normalform auf Grund von rein substitutionentheoretischen Untersuchungen bereits entwickelt wurden.

Die Vertauschung der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ mit den

$$a_{i_{11}\alpha_1 + \cdots i_{1\nu}\frac{n_1}{n_{1\nu}}\alpha_\nu; \ldots i_{\nu 1}\frac{n_\nu}{n_{1\nu}}\alpha_1 + \cdots i_{\nu\nu}}$$

ist gleichwerthig der Substitution der Indices $\alpha_1 \ldots \alpha_\nu$:

$$\text{17)} \qquad \left| \alpha_k;\ i_{k1}\frac{n_k}{n_{1k}}\alpha_1 + i_{k2}\frac{n_k}{n_{2k}}\alpha_2 + \cdots i_{k\nu}\frac{n_k}{n_{k\nu}}\alpha_\nu \right| \quad (k = 1,\ 2 \ldots \nu).$$

Diese Substitutionen zeigen sich in der analytischen Darstellungsform; es sind lineare Substitutionen, die eine Gruppe bilden, da die successive Ausführung zweier Substitutionen wieder eine lineare Substitution derselben Art darstellt.

Stellt man nämlich die Substitution 17) symbolisch durch

$$\text{17a)} \qquad \begin{vmatrix} i_{11} & \ldots i_{\nu 1}\frac{n_\nu}{n_{1\nu}} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ i_{1\nu}\frac{n_1}{n_{1\nu}} & \ldots i_{\nu\nu} \end{vmatrix} (\alpha_1,\ \alpha_2 \ldots \alpha_\nu)$$

dar, so ist das Resultat der successiven Ausführung zweier Substitutionen durch

$$\text{17b)} \qquad \begin{vmatrix} i'_{11} & \ldots i'_{\nu 1}\frac{n_\nu}{n_{1\nu}} \\ i'_{1\nu}\frac{n_1}{n_{1\nu}} & \ldots i'_{\nu 1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_{11} & \ldots i_{\nu 1}\frac{n_\nu}{n_{1\nu}} \\ i_{1\nu}\frac{n_1}{n_{1\nu}} & \ldots i_{\nu\nu} \end{vmatrix} (\alpha_1,\ \alpha_2 \ldots \alpha_\nu)$$

darstellbar und es ist evident, dass die Bedingungen 5), welche von jeder einzelnen Determinante der Formel 17b) erfüllt werden müssen, auch von der das Product derselben darstellenden Determinante erfüllt werden.

Lässt sich nun so mit Hilfe des Begriffs der Substitutionengruppe die Eigenschaft der Normalform dahin bestimmen, dass die Grösse $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ die Gruppe der linearen Substitutionen 17) gestatten, so muss bemerkt werden, dass in der Theorie der Substitutionen als lineare Gruppe nur die Gruppe der $n^\nu$ Substitutionen auftritt, die man aus 17) erhält, wenn $= \cdots = n_\nu = n$ gesetzt wird, wenn man also die Normalform auf den [illegible]ndelten speciellen Fall des II. Capitels beschränkt. Zum

Studium der allgemeinen Gruppe, zu welcher die Untersuchung der Eigenschaften der allgemeinen Normalform führte, scheint dagegen die Theorie der Substitutionen keine Veranlassung zu haben. Demgemäss wird denn auch die Bedingung, welcher die $i_{\lambda k}$ einer Substitution vom Grade $n^{\nu}$ genügen müssen und die Ordnung dieser Gruppe, die durch $\varphi(n, \nu)$ bezeichnet wurde, in den Darstellungen der Substitutionentheorie* angegeben. Die Ordnung der Gruppe vom Grade $p^{\nu}$, nämlich $\varphi(p, \nu)$, wo $p$ eine Primzahl bedeutet, war schon Galois** bekannt.

Es zeigt sich somit, dass die aus $\nu$ Einheitswurzeln eines und desselben Grades gebildete Normalform ein bequemes Fundament zu Untersuchungen über die lineare Substitutionengruppe vom Grade $n$ bildet; ebenso ist bemerkenswerth, dass die allgemeine Normalform als Grundlage dienen kann, um die allgemeine Gruppe der linearen Substitutionen 17) einer Untersuchung leicht zugänglich zu machen.

§ 5. Ich ergänze die Kenntniss von den Eigenschaften der Normalform, indem ich Bedingungsgleichungen zwischen den $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ voraussetze und angebe, welcher Art diese Bedingungsgleichungen sein müssen, damit zu den oben gefundenen noch andere Vertauschungen der $a$ hinzutreten.

Da das System der Functionen $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu}$ durch eine solche Vertauschung der $a$ nicht geändert werden soll, so müssen die $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu}$ vor und nach der Substitution in irgend welche Reihenfolge gebracht und dann einzeln einander gleich gesetzt werden. Es entstehen so $n_1 n_2 \ldots n_\nu$ homogene und lineare Gleichungen zwischen den $n_1 n_2 \ldots n_\nu$ Grössen $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$, die indessen nicht unabhängig von einander sein dürfen. Denn wären die Gleichungen unabhängig von einander, so müsste jedes $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ gleich Null sein und die vorausgesetzte Substitution wäre mit der Existenz der Normalform nicht verträglich.

Jede mit der Existenz der Normalform verträgliche Substitution hat somit eine Anzahl von linearen und homogenen Gleichungen zwischen den $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ im Gefolge, in welchen die Grössen $a$ lediglich Einheitswurzeln zu Coefficienten haben.

Daraus ziehe ich folgende Schlüsse:

Bestehen Bedingungsgleichungen zwischen den $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$, die sich nicht auf homogene und lineare Gleichungen der angegebenen Art reduciren lassen, so erhöhen sie nicht die Vertauschbarkeit der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$; die oben gefundenen Sätze bleiben daher in voller Kraft bestehen.

---

* Vergl. Jordan, traité des substitutions etc. S. 91 flg. — Netto, Theorie der Substitutionen und ihre Anwendung auf die Algebra. Leipzig 1892. S. 150 flg.

** Journal des mathématiques pures et appliquées; tome XI, 1846; p. 428.

Sollen die Bedingungsgleichungen der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu^\nu}$ von den Einheitswurzeln unabhängig sein, so müssen die permutirten $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ einander gleich sein.

Unter den homogenen und linearen Bedingungsgleichungen zwischen den Grössen $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ sind insbesondere diejenigen bemerkenswerth, durch welche einzelne Functionen der Normalform für den ganzen Convergenzbereich der unabhängigen Variablen einander gleich werden. Ihr Vorhandensein führt zu der wichtigen Unterscheidung der Einheitswurzeln einer Normalform in wesentliche und unwesentliche Einheitswurzeln.

Es sei eine Normalform vorgelegt mit den $\nu + \mu$ Einheitswurzeln $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}; \varepsilon_{m_1}, \varepsilon_{m_2} \ldots \varepsilon_{m_\mu}$, so dass:

$$18)\quad x_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu \lambda_1' \ldots \lambda_\mu'} = \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \sum_{\beta_1 \ldots \beta_\mu} \varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu \alpha_\nu} \varepsilon_{m_1}^{\lambda_1' \beta_1} \ldots \varepsilon_{m_\mu}^{\lambda_\mu' \beta_\mu} . a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu \beta_1 \ldots \beta_\mu}.$$

Die Grössen $a$ sollen nun aber der Art bedingt sein, dass unter Festhalten der Einheitswurzeln $\varepsilon_{m_1}^{\lambda_1'} \ldots \varepsilon_{m_\mu}^{\lambda_\mu'}$ die $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Functionen $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu \lambda_1' \ldots \lambda_\mu'}$ $(\lambda_i = 1,\ 2 \ldots n_i;\ i = 1,\ 2 \ldots \nu)$ im Allgemeinen alle verschieden sind, dass ferner der Uebergang von einem Systeme der Potenzen von $\varepsilon_{m_1}, \varepsilon_{m_2} \ldots \varepsilon_{m_\mu}$ zu einem anderen Systeme das System der $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Functionen $x$ in keiner Weise, abgesehen von der Reihenfolge, verändert. Es ist daher, wenn $S$ den Inbegriff der den $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Werthensystemen $\lambda_1 = 1,\ 2 \ldots n_1;\ \lambda_2 = 1,\ 2 \ldots n_2; \ldots \lambda_\nu = 1,\ 2 \ldots n_\nu$ zugehörenden Functionen bedeutet

$$19)\quad \begin{cases} S \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \sum_{\beta_1 \ldots \beta_\mu} \varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu \alpha_\nu} . \varepsilon_{m_1}^{\lambda_1' \beta_1} \ldots \varepsilon_{m_\mu}^{\lambda_\mu' \beta_\mu} . a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu \beta_1 \ldots \beta_\mu} \\ \equiv S \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \sum_{\beta_1 \ldots \beta_\mu} \varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu \alpha_\nu} . a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu \beta_1 \ldots \beta_\mu} \end{cases}$$

für $\lambda_i' = 1,\ 2 \ldots m_i;\ i = 1,\ 2 \ldots \mu$, wo die Summe der rechten Seite den speciellen Werthen $\lambda_i' = m_i (i = 1,\ 2 \ldots \mu)$ entspricht.

Sind nun die durch die Formel 19) angedeuteten Systeme von linearen und homogenen Gleichungen zwischen den $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu \beta_1 \ldots \beta_\nu}$ erfüllt, so nenne ich die $\nu$ Einheitswurzeln $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2}, \ldots \varepsilon_{n_\nu}$ wesentliche Einheitswurzeln, da sie die Vieldeutigkeit der Normalform wesentlich bedingen; die $\mu$ Einheitswurzeln $\varepsilon_{m_1}, \varepsilon_{m_2}, \ldots \varepsilon_{m_\mu}$ sollen dagegen unwesentliche Einheitswurzeln heissen, da der Uebergang von einem Werthensysteme der $\varepsilon_{m_1}^{\lambda_1'} \ldots \varepsilon_{m_\mu}^{\lambda_\mu'}$ zu einem anderen zwar die Reihenfolge der $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Functionen der Normalform verändern kann, aber keine neuen Functionen zu den vorhandenen hinzufügt.

Die Bestimmung der unwesentlichen Einheitswurzeln, die zu beliebigen *bereits gegebenen* wesentlichen Einheitswurzeln hinzutreten können, kann

vollständig nur durch eine Discussion der aus 19) sich ergebenden Systemen von linearen Gleichungen geleistet werden. Eine grosse Classe unwesentlicher Einheitswurzeln kann aber auf Grund der im Vorstehenden entwickelten Eigenschaften der Normalform mit Leichtigkeit angegeben werden.

Hierzu dient die unmittelbar ersichtliche Bemerkung, dass die Eigenschaften der $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Functionen

$$x_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu} = \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{\lambda\,\alpha} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu \alpha_\nu} . a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu},$$

die in der Vertauschbarkeit der Grössen $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ bestehen, in keiner Weise dadurch geändert werden, dass

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} = \sum_{\beta_1 \ldots \beta_\mu} \varepsilon_{m_1}^{\lambda\,\beta_1} \ldots \varepsilon_{m_\mu}^{\lambda_\mu' \beta_\mu} . a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu \beta_1 \ldots \beta_\mu}$$

gesetzt wird. Die Vertauschbarkeit der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ selbst bleibt nach wie vor bestehen, da die aus 19) sich ergebenden Bedingungsgleichungen ihrer Natur nach zwar die $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu \beta_1 \ldots \beta_\mu}$ aber nicht die $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ selbst bedingen. Es können nun die Einheitswurzeln $\varepsilon_{m_1}, \ldots \varepsilon_{m_\mu}$ von solcher Art vorausgesetzt werden, dass das Einsetzen der successiven Potenzen $\varepsilon_{m_1}^{\lambda_1'}, \ldots \varepsilon_{m_\mu}^{\lambda_\mu'}$ an Stelle von $\varepsilon_{m_1} \ldots \varepsilon_{m_\mu}$ gerade solche Vertauschungen der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ selbst hervorruft, die kraft der Eigenschaften der Functionen $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu}$ gestattet sind. Trifft diese Voraussetzung zu, so folgt für die unwesentlichen Einheitswurzeln, dass ihre Grade $m_1$, $m_2 \ldots m_\mu$ Theiler der Ordnung der Substitutionengruppe sein müssen, welche von den $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ gestattet wird, dass sie ferner höchstens in solcher Anzahl und von solchem Grade vorhanden sein können, dass das Product ihrer Grade gleich der Ordnung der Substitutionengruppe, mithin gleich der Gesammtzahl der Vertauschungen der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ ist.

Es ist zu beachten, dass dadurch blos die Möglichkeit des Vorhandenseins solcher unwesentlicher Einheitswurzeln erwiesen ist, dass aber damit nicht gesagt ist, dass nicht auch andere Einheitswurzeln als unwesentliche in der Normalform auftreten können.

---

II.

# Neue Grundlagen einer allgemeinen Zahlenlehre.*

Von

Dr. J. Kraus

in Darmstadt.

---

## Zweite Abhandlung.

### III. Ueber den Zusammenhang zwischen den Ziffern eines in zwei beliebigen Zahlensystemen $\alpha$ und $\alpha'$ dargestellten echten Bruches $\frac{g}{k}$.

#### § 10.

Wir haben im vorigen Abschnitte** unsere Entwicklungen auf die specielle Voraussetzung

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+1,\mu+1} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

gegründet. Im gegenwärtigen Capitel sollen die dort angestellten Betrachtungen auf den Fall

$$1) \qquad a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n,\mu+n'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo $n$ und $n'$ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, ausgedehnt werden; das heisst, es soll untersucht werden, für welche Werthe von $n$ und $n'$ diese Gleichung möglich ist und welche Wirkung ihr Bestehen auf die Fundamentalgleichung ausübt.

---

* Da wir gleichzeitig neben den in vorliegender Zeitschrift erscheinenden Aufsätzen eine besondere Schrift über denselben Gegenstand ausarbeiten, welche, bei Einordnung des vorhandenen Materials, die hier vorgetragenen Untersuchungen in zusammenhängender Darstellung und von einfachen allgemeinen Gesichtspunkten aus zu behandeln sucht, so wollen wir uns hier auf eine mehr skizzenartige Vorführung der hauptsächlichsten der von uns erhaltenen Resultate beschränken. Viele Einzelheiten des sich in Fülle darbietenden Stoffes werden demgemäss theilweise nur flüchtig berührt, theilweise bleiben sie überhaupt der vorerwähnten ausführlicheren Darstellung vorbehalten. In dieser werden überdies von den hier befolgten zumeist abweichende Methoden zur Anwendung kommen. Insbesondere werden die Beweise durchweg eine präcisere Fassung erhalten, als es in der vorliegenden, einer ersten Uebersicht gewidmeten Bearbeitung erforderlich erschien.

** Die erste Abhandlung, auf die im Nachfolgenden vielfach Bezug genommen wird, befindet sich im XXXVII. Bande (Jahrgang 1892) der Zeitschrift für Mathematik und *Physik*.

In ähnlicher Weise, wie früher (§ 6), wird zunächst wieder, die Gleichung 1) als richtig vorausgesetzt, geschlossen, dass

$$a'_{\lambda\mu} = a'_{\lambda+n',\mu+n}, \quad r_{\lambda\mu} = r_{\lambda+n,\mu+n'}, \quad r'_{\lambda\mu} = r'_{\lambda+n',\mu+n} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wie überhaupt aus jeder dieser vier Gleichungen sich die drei übrigen als nothwendige Folgerungen ergeben. Weiter folgt aus 1), genau wie früher:

$$2) \quad a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\nu n,\mu+\nu n'}, \quad a'_{\lambda\mu} = a'_{\lambda+\nu n',\mu+\nu n} \quad (\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es möge $\delta$ die Anzahl der Ziffern der Periode des Bruches $\frac{z}{k}$ im Systeme $\alpha$, $\delta'$ diejenige im Systeme $\alpha'$ bedeuten, so wollen wir dafür in der Folge kurz sagen, die $a_{\lambda\mu}$ hätten die Perioden $\delta | \delta'$. Offenbar besitzen hiernach die $a'_{\lambda\mu}$ die Perioden $\delta' | \delta$. Dies vorausgeschickt, findet man mit Hilfe einer Betrachtung, die der im § 7 angestellten durchaus entspricht, die folgenden Beziehungen bestätigt:

$$3) \qquad \alpha^n \alpha'^{n'} - 1 = uk,$$

$$4) \qquad \alpha^n (a'_1 a'_2 \ldots a'_{n'})_{\alpha'} + (a_{\delta-n+1} a_{\delta-n+2} \ldots a_\delta)_\alpha = uz^*,$$

wo der Einfachheit wegen die zweiten Indices 1 wieder weggelassen wurden. Umgekehrt ergeben sich aus 3) leicht die Gleichungen:

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n,\mu+n'}, \quad r_{\lambda\mu} = r_{\lambda+n,\mu+n'}, \ldots^{**};$$

der im § 7 S. 334 ausgesprochene Satz erweitert sich sonach, zunächst für positive Werthe von $n$ und $n'$, zu dem folgenden:

„Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Gleichung

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n,\mu+n'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist das Bestehen der Beziehung

$$\alpha^n \alpha'^{n'} - 1 = uk^{***},$$

wo $u$ eine positive ganze Zahl bedeutet.

Es wäre leicht, den Nachweis zu führen, dass — von dem evidenten Falle $n =$ Vielf. v. $\delta$, $n' =$ Vielf. v. $\delta'$ abgesehen — Gleichungen von der Form 3) möglich sind, und auf diese Weise darzuthun, dass die nachfolgenden Untersuchungen, welche auf der Möglichkeit dieser Gleichung beruhen, nicht in der Luft schweben. Da uns jedoch dasselbe Resultat noch später im § 13 in Gestalt gewisser Umkehrungssätze entgegentreten wird, so begnügen wir uns hier damit, auf diesen Paragraphen zu verweisen.

---

* Oder $\alpha'^{n'} (a_1 a_2 \ldots a_n)_\alpha + (a'_{\delta'-n'+1} a'_{\delta'-n'+2} \ldots a'_{\delta'})_{\alpha'} = uz$.

** Aus Gleichung 10) des § 7 folgt nämlich:

$$r_{\lambda\mu} \equiv z\alpha^{\lambda-1}\alpha'^{\mu-1}, \quad r_{\lambda+n,\mu+n'} \equiv z\alpha^{\lambda-1}\alpha'^{\mu-1}\alpha^n\alpha'^{n'} \pmod k;$$

durch Subtraction leitet man aus diesen Congruenzen, bei Berücksichtigung von 3), *unmittelbar* die Gleichung $r_{\lambda\mu} = r_{\lambda+n,\mu+n'}$ her, aus welcher ohne Weiteres die *übrigen folgen.*

*** *Oder der Congruenz* $\alpha^n \alpha'^{n'} \equiv 1 \pmod k$.

## § 11.

Wenn die $a_{\lambda\mu}$ die Perioden $\delta|\delta'$, also die $a'_{\lambda\mu}$ diejenigen $\delta'|\delta$ besitzen, so bestehen die Gleichungen:

$$5)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\delta,\mu} = a_{\lambda,\mu+\delta'} \\ a'_{\lambda\mu} = a'_{\lambda+\delta',\mu} = a'_{\lambda,\mu+\delta} \end{array}\right\} (\lambda,\mu = 1,2,3,\ldots).$$

Wir setzen vorläufig die Zahlen $n$ und $n'$ als positiv voraus und befassen uns zunächst wieder mit dem einfachsten der in Betracht kommenden Fälle, indem wir annehmen, dass sowohl $n$ prim zu $\delta$, als auch $n'$ prim zu $\delta'$ sein solle.* Setzt man dann in 2), die Zulässigkeit der Gleichung 1) vorausgesetzt, für $\nu$ den Werth $\delta$ ein, so ergiebt sich mit Rücksicht auf 5):

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\delta n,\mu+\delta n'} = a_{\lambda,\mu+\delta n'}.$$

Hieraus folgt, dass $\delta n'$ ein Vielfaches von $\delta'$, also auch, da $n'$ und $\delta'$ prim unter einander sind, $\delta$ ein Vielfaches von $\delta'$ sein muss. In ähnlicher Weise wird auf Grund der Gleichung

$$a'_{\lambda\mu} = a'_{\lambda+n',\mu+n}\quad (\lambda,\mu = 1,2,3,\ldots)$$

geschlossen, dass auch umgekehrt $\delta'$ ein Vielfaches von $\delta$ sein muss. Dies ist aber nur möglich, wenn

$$\delta = \delta'.$$

Wir bezeichnen jetzt mit $n_\nu$ und $n'_\nu$ die kleinsten positiven Reste von bezw. $\nu n$ und $\nu n'$ nach dem Modul $\delta$, so dass:

$$6)\qquad \nu n \equiv n_\nu,\quad \nu n' \equiv n'_\nu \,(mod\,\delta).$$

Alsdann kann man die Gleichungen 2) auch folgendermassen schreiben:

$$7)\qquad a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n_\nu,\mu+n'_\nu},\quad a'_{\lambda\mu} = a'_{\lambda+n'_\nu,\mu+n_\nu}\quad (\lambda,\mu = 1,2,3,\ldots).$$

Durchläuft nun $\nu$ ein vollständiges System in Bezug auf $\delta$ incongruenter Zahlen, etwa die Zahlen von 1 bis $\delta$, so durchlaufen gleichzeitig auch $n_\nu$ und $n'_\nu$ vollständige Restesysteme. Dabei entspricht jedem Werthe von $n_\nu$ ein bestimmter Werth von $n'_\nu$, und umgekehrt. Sollen $n_\nu$ und $n'_\nu$ wieder relativ prim zu $\delta$ sein, so ist erforderlich und hinreichend, dass $\nu$ prim zu $\delta$ gewählt werde. Wenn $\nu$ alle Zahlen eines vollständigen Restesystems durchläuft, welche

---

* Haben unter dieser Voraussetzung $n$ und $n'$ einen von 1 verschiedenen grössten gemeinschaftlichen Theiler $\eta$, und ist

$$n = \eta N,\quad n' = \eta N',$$

so folgt aus

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n,\mu+n'} = a_{\lambda+\eta N,\mu+\eta N'},$$

das heisst:

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\nu\eta N,\mu+\nu\eta N'}\quad (\lambda,\mu,\nu = 1,2,3,\ldots),$$

wenn $\eta'$ so gewählt wird, dass $\eta\eta' \equiv 1\,(mod\,\delta)$ wird, bei $\nu = \eta'$ leicht

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+N,\mu+N'},$$

und umgekehrt. *Der Theiler* $\eta$ kann daher in diesem Falle unterdrückt werden.

prim zu $\delta$ sind, so nehmen hierbei sowohl die $n_\nu$ als auch die $n'_\nu$ die Werthe aller zu $\delta$ relativ primen Zahlen $< \delta$ an, und zwar jeden nur einmal. Die Zahlen $n_\nu$ und $n'_\nu$, die in diesem Falle ein sogenanntes reducirtes Restesystem bilden, hängen alsdann mit $n$ und $n'$ durch die Congruenz

$$8)\qquad n n'_\nu \equiv n' n_\nu \ (mod\ \delta),$$

die sich aus 6) leicht ergiebt, zusammen.

Die Gleichungen 7) vermögen, falls $n_\nu$ und $n'_\nu$ beide prim zu $\delta$ sind, die ursprüngliche Gleichung 1) vollständig zu ersetzen. Wie nämlich jene Gleichungen aus 1) gefolgert wurden, so lässt sich auch umgekehrt leicht nachweisen, dass ihr Bestehen das der Gleichung 1) zur Folge hat.*

Nun kommt unter den Zahlen $n_\nu$ der Werth 1 einmal (und nur einmal) vor. Der entsprechende Werth von $n'_\nu$ möge mit $m'$ bezeichnet werden. Führt man diese speciellen Werthe in die erste der Gleichungen 7) ein, so verwandelt sie sich in:

$$9)\qquad a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+1,\,\mu+m'} \quad (\lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

Ebenso kommt unter den Zahlen $n'_\nu$ der Werth 1 ein einziges Mal vor. Bezeichnet man den zugehörigen Werth von $n_\nu$ mit $m$, so ergiebt sich weiter die Gleichung:

$$10)\qquad a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+m,\,\mu+1} \quad (\lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

Aus 9) und 10) folgen ohne Weiteres die Gleichungen:

$$11)\qquad a'_{\lambda\mu} = a'_{\lambda+m',\,\mu+1},\ a'_{\lambda\mu} = a'_{\lambda+1,\mu+m} \quad (\lambda,\ \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die Zahlen $m$ und $m'$ genügen den Congruenzen:

$$12)\qquad n m' \equiv n',\quad n' m \equiv n \ (mod\ \delta)$$

und daher auch der Congruenz:

$$13)\qquad m m' \equiv 1 \ (mod\ \delta).$$

Es entsteht jetzt die Frage, wie sich die Fundamentalgleichung gestaltet, wenn wir sie mit Gleichung 2) in Verbindung bringen. Nach dem oben Bemerkten kommt es auf dasselbe hinaus, ob wir dabei Gleichung 2) selbst benutzen, oder ob wir sie etwa durch 10) ersetzen. Im letzteren Falle ergiebt sich zunächst:

---

* Aus 7) folgt nämlich:

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\nu' n_\nu,\,\mu+\nu' n'_\nu} \quad (\lambda, \mu, \nu' = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wählt man nun, was nach der Voraussetzung ($\nu$ prim zu $\delta$) immer möglich ist, $\nu'$ so, dass die Congruenz $\nu \nu' \equiv 1 \ (mod\ \delta)$

*erfüllt ist, so folgt* bei Berücksichtigung von 6):

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n,\,\mu+n'}.$$

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda-m,\mu-1} = a_{\lambda-2m,\mu-2} = \cdots = a_{\lambda-(\mu-1)m,1} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

oder, indem wir wieder die zweiten Indices 1 unterdrücken:

14) $a_{\lambda\mu} = a_{\lambda-(\mu-1)m}, \quad a_{\lambda,\mu+1} = a_{\lambda-\mu m}$* $(\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$.

In ähnlicher Weise folgt:

15) $a'_{\mu\lambda} = a'_{\mu-(\lambda-1)m'}, \quad a'_{\mu,\lambda+1} = a'_{\mu-\lambda m'}$* $(\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$.

Mit Rücksicht auf diese Beziehungen schreibt sich die Fundamentalgleichung $\alpha' a_{\lambda\mu} + a'_{\mu,\lambda+1} = \alpha a'_{\mu\lambda} + a_{\lambda,\mu+1}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$ jetzt folgendermassen:

16) $\alpha' a_{\lambda-(\mu-1)m} + a'_{\mu-\lambda m'} = \alpha a'_{\mu-(\lambda-1)m'} + a_{\lambda-\mu m}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$.

Führt man in dieser Gleichung für $\lambda$ den Werth $\delta$ ein, so ergiebt sich:

17) $\alpha' a_{\delta-(\mu-1)m} + a'_{\mu} = \alpha a'_{\mu+m'} + a_{\delta-\mu m}$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$.

Aus Gründen der Symmetrie kann man hierfür auch schreiben:

18) $\alpha' a_{\mu+m} + a'_{\delta-\mu m'} = \alpha a'_{\delta-(\mu-1)m'} + a_{\mu}$** $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$.

Für $\mu = 1, 2, 3, \ldots, \delta-1, \delta$ liefert die Gleichung 17) das System folgender Gleichungen:

$$18\text{a})\quad \left\{\begin{aligned} \alpha' a_{\delta} + a'_1 &= \alpha a'_{m'+1} + a_{\delta-m} \\ \alpha' a_{\delta-m} + a'_2 &= \alpha a'_{m'+2} + a_{\delta-2m} \\ \alpha' a_{\delta-2m} + a'_3 &= \alpha a'_{m'+3} + a_{\delta-3m} \\ \cdots & \cdots \\ \alpha' a_{2m} + a'_{\delta-1} &= \alpha a'_{m'-1} + a_{m} \\ \alpha' a_{m} + a'_{\delta} &= \alpha a'_{m'} + a_{\delta}. \end{aligned}\right.$$

Hätte man die Gleichung 18) zu Grunde gelegt, so würde man bei $\mu = 1, 2, 3, \ldots, \delta$ dieselben Gleichungen wie in 18a) erhalten haben, nur in anderer Anordnung.

Es könnte noch eingewendet werden, dass möglicherweise wesentlich von einander verschiedene Algorithmen entstehen dadurch, dass man in Gleichung 16) dem Index $\lambda$ andere und andere Werthe ertheilt. Dass dies jedoch thatsächlich nicht der Fall sein kann, das heisst, dass man stets dieselben Gleichungen 18a) erhalten muss, nur jedesmal mit einer anderen unter ihnen als Anfangsgleichung, davon überzeugt man sich leicht, wenn man für $\lambda$ den Werth $\delta - \nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, \delta-1)$ einführt und gleichzeitig $\mu - \nu m'$ für $\mu$ substituirt. Dann nimmt Gleichung 16) schliesslich für jeden Werth von $\nu$ wieder genau die Form 17) an.

---

* Soweit bei entsprechender Wahl von $\lambda$ und $\mu$ in dieser und den folgenden Gleichungen des vorliegenden Abschnittes die Indices null oder negativ werden, muss man wiederum solche Vielfache von $\delta$ sich hinzugefügt denken, welche sie positiv machen.

** Bei $m = 1$, $m' = 1$ erhält man den im vorigen Abschnitte betrachteten besonderen Fall (der Buchstabe $m$ hat dort dieselbe Bedeutung wie hier $\delta$).

Das Voranstehende führt zu den folgenden Satze:

„Es mögen die Ziffern $a_{\lambda\mu}$ und $a'_{\lambda\mu}$ des in den Systemen $(\alpha, \alpha')$ bezw. $(\alpha', \alpha)$ dargestellten echten Bruches $\frac{z}{k}$ die Perioden $\delta | \delta'$ bezw. $\delta' | \delta$ besitzen. Wenn dann

$$\alpha^n \alpha'^{n'} \equiv 1 \pmod k, \text{ also auch } a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n,\mu+n'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo $n$ und $n'$ positive ganze Zahlen sind von solcher Beschaffenheit, dass sowohl $n$ prim zu $\delta$, als auch $n'$ prim zu $\delta'$ ist, so ist $\delta = \delta'$; das heisst, die Perioden der Darstellungen des Bruches $\frac{z}{k}$ haben in den Zahlensystemen $\alpha$ und $\alpha'$ gleichviel, nämlich $\delta$, Stellen. Die Ziffern $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bezw. $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$ dieser Darstellungen gehorchen dem Algorithmus

$$\alpha' a_{\mu+m} + a'_{\delta-\mu m'} = \alpha a'_{\delta-(\mu-1)m'} + a_\mu,$$

während $m$ und $m'$ den Congruenzen

$$n'm \equiv n, \quad nm' \equiv n', \quad mm' \equiv 1 \pmod \delta$$

Genüge leisten.

Beispiel: Es sei $\frac{z}{k} = \frac{18}{31}$, $\alpha = 10$, $\alpha' = 9$; alsdann hat man $\delta = \delta' = 15$. Die $a_{\lambda\mu}$ genügen, wie man durch Aufstellung des entsprechenden Systems findet, der Beziehung:

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+7,\mu+11} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wir können demnach $n = 7$, $n' = 11$ setzen. Beide Zahlen sind prim zu $\delta = 15$ und entsprechen sonach der Voraussetzung des obigen Lehrsatzes. Die Zahlen $m$ und $m'$ berechnen sich leicht aus den Congruenzen

$$7m' \equiv 11, \quad 11m \equiv 7 \pmod{15},$$

aus welchen die Werthe $m = 2$, $m' = 8$ gefunden werden. Der Algorithmus 17) nimmt daher im vorliegenden Falle die folgende Gestalt an:

$$9a_{15-2(\mu-1)} + a'_\mu = 10a'_{\mu+8} + a_{15-2\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Da nun

$$\frac{18}{31} = (0{,}580645161290322\ldots)_{10}$$
$$= (0{,}520254672281140\ldots)_9,$$

also:

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 8, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 6, \quad a_5 = 4, \ldots$$
$$a'_1 = 5, \quad a'_2 = 2, \quad a'_3 = 0, \quad a'_4 = 2, \quad a'_5 = 5, \ldots,$$

so hat man der Reihe nach:

$$9a_{15} + a'_1 = 10a'_9 + a_{13} \quad \text{oder} \quad 9.2 + 5 = 10.2 + 3 = 23$$
$$9a_{13} + a'_2 = 10a'_{10} + a_{11} \quad „ \quad 9.3 + 2 = 10.2 + 9 = 29$$
$$9a_{11} + a'_3 = 10a'_{11} + a_9 \quad „ \quad 9.9 + 0 = 10.8 + 1 = 81$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$9a_4 + a'_{14} = 10a'_7 + a_2 \quad „ \quad 9.6 + 4 = 10.5 + 8 = 58$$
$$9a_2 + a'_{15} = 10a'_8 + a_{15} \quad „ \quad 9.8 + 0 = 10.7 + 2 = 72.$$

## § 12.

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall, in welchem $n$ und $\delta$ den grössten gemeinschaftlichen Theiler $\varepsilon$, $n'$ und $\delta'$ denjenigen $\varepsilon'$ besitzen. Es sei:

$$19)\qquad n = N\varepsilon,\quad \delta = \Delta\varepsilon,\quad n' = N'\varepsilon',\quad \delta' = \Delta'\varepsilon'.^*$$

Setzt man dann in der Gleichung

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\nu n,\,\mu+\nu n'}\quad (\lambda,\,\mu,\,\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

für $\nu$ die Werthe $\Delta$ und $\Delta'$ ein, so ergeben sich resp. die Beziehungen:

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\Delta n,\,\mu+\Delta n'} = a_{\lambda+N\delta,\,\mu+\Delta n'} = a_{\lambda,\,\mu+\Delta n'}$$

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\Delta' n,\,\mu+\Delta' n'} = a_{\lambda+\Delta' n,\,\mu+N'\delta'} = a_{\lambda+\Delta' n,\,\mu}.$$

Dieselben lassen erkennen, dass $\Delta n'$ durch $\delta'$, also $\Delta$ durch $\Delta'$, ebenso $\Delta' n$ durch $\delta$, daher auch umgekehrt $\Delta'$ durch $\Delta$ theilbar sein muss. Dies ist aber nur unter der Bedingung

$$\Delta = \Delta'$$

möglich. Wenn $\varepsilon$ prim zu $\varepsilon'$ ist, so stellt $\Delta = \Delta'$ zugleich den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $\delta$ und $\delta'$ vor; das heisst, der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\delta$ und $\delta'$ ist in diesem Falle gleich dem Quotienten aus $\delta$ (bezw. $\delta'$) und dem grössten gemeinschaftlichen Theiler von $n$ und $\delta$ (bezw. $n'$ und $\delta'$).

Wir machen jetzt in der Gleichung

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\nu n,\,\mu+\nu n'}\quad (\lambda,\,\mu,\,\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

die folgenden Substitutionen:

$$20)\qquad \nu n \equiv \varepsilon n_\nu (mod\ \delta),\quad \nu n' \equiv \varepsilon' n'_\nu (mod\ \delta'),$$

wobei $\varepsilon n_\nu$ und $\varepsilon' n'_\nu$ positive ganze Zahlen $< \delta$ bezw. $< \delta'$ sein sollen, somit $n_\nu$ und $n'_\nu$ positive ganze Zahlen $< \Delta$ sein müssen. Unter der Voraussetzung, dass $\nu$ prim zu $\Delta = \Delta'$ ist, gelangt man dann zu der Congruenz:

$$21)\qquad N n'_\nu \equiv N' n_\nu (mod\ \Delta).$$

Durch eine der im letzten Paragraphen angestellten genau analoge Betrachtung ergeben sich hierauf wieder zwei Werthe $m$ und $m'$, die aus den Congruenzen $\quad Nm' \equiv N',\quad N'm \equiv N (mod\ \Delta)$

zu berechnen sind, und welche die Congruenz

$$22)\qquad mm' \equiv 1\ (mod\ \Delta)$$

befriedigen. Führt man dieselben in die Gleichung

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\varepsilon n_\nu,\,\mu+\varepsilon' n'_\nu}\quad (\lambda,\,\mu,\,\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ein, so erhält man die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{ll} 23)\quad a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\varepsilon m,\,\mu+\varepsilon'}, & a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\varepsilon,\,\mu+\varepsilon' m'} \\ 24)\quad a'_{\lambda\mu} = a'_{\lambda+\varepsilon' m',\,\mu+\varepsilon}, & a'_{\lambda\mu} = a'_{\lambda+\varepsilon',\,\mu+\varepsilon m} \end{array}\right\}\ (\lambda,\,\mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

---

* Nach der im vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung dürfen im Hinblick auf das Folgende etwaige gemeinschaftliche Theiler der Zahlen $N$ und $N'$ ohne *Weiteres fortgestrichen* werden.

Es werde nun gesetzt:

$$\lambda = \lambda_1 . \varepsilon + i, \quad \mu = \mu_1 . \varepsilon' + i',$$

wobei $\lambda_1$, $\mu_1$, $i$, $i'$ positive ganze Zahlen bedeuten, $i$ und $i'$ insbesondere noch den Bedingungen $i \leqq \varepsilon$, $i' < \varepsilon'$ genügen sollen.

Wenn man diese Werthe für $\lambda$ und $\mu$ in die Gleichungen 23) und 24) einführt, so folgt:

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda - \varepsilon m, \mu - \varepsilon'} = \cdots = a_{\lambda - \mu_1 \varepsilon m, i'}$$

$$a'_{\mu\lambda} = a'_{\mu - \varepsilon' m', \lambda - \varepsilon} = \cdots = a'_{\mu - \lambda_1 \varepsilon' m', i}.$$

In ähnlicher Weise erhält man:

$$a_{\lambda, \mu+1} = a_{\lambda - \mu_1 \varepsilon m, i'+1}, \quad a'_{\mu, \lambda+1} = a'_{\mu - \lambda_1 \varepsilon' m', i+1}.$$

Bei Berücksichtigung dieser Beziehungen lässt sich die Fundamentalgleichung $\alpha' a_{\lambda\mu} + a'_{\mu, \lambda+1} = \alpha a'_{\mu\lambda} + a_{\lambda, \mu+1}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$ in folgender Gestalt schreiben:

$$25)\quad \alpha' a_{\lambda - \mu_1 \varepsilon m, i'} + a'_{\mu - \lambda_1 \varepsilon' m', i+1} = \alpha a'_{\mu - \lambda_1 \varepsilon' m', i} + a_{\lambda - \mu_1 \varepsilon m, i'+1}.$$

Setzt man darin zunächst $\lambda = \delta$, so ist $\lambda_1 = \Delta - 1 = \Delta' - 1$, $i = \varepsilon$, und man erhält für $\mu = 1, 2, 3, \ldots, \delta'$ der Reihe nach:

$$26)\quad \left\{ \begin{array}{llll}
\alpha' a_{\delta, 1} & + a'_{1, 1} & = \alpha a'_{1 + \varepsilon' m', \varepsilon} & + a_{\delta, 2} \\
\alpha' a_{\delta, 2} & + a'_{2, 1} & = \alpha a'_{2 + \varepsilon' m', \varepsilon} & + a_{\delta, 3} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\alpha' a_{\delta, \varepsilon' - 1} & + a'_{\varepsilon' - 1, 1} & = \alpha a'_{\varepsilon' - 1 + \varepsilon' m', \varepsilon} & + a_{\delta, \varepsilon'} \\
\alpha' a_{\delta, \varepsilon'} & + a'_{\varepsilon', 1} & = \alpha a'_{\varepsilon' + \varepsilon' m', \varepsilon} & + a_{\delta - \varepsilon m, 1} \\
\alpha' a_{\delta - \varepsilon m, 1} & + a'_{\varepsilon' + 1, 1} & = \alpha a'_{\varepsilon' + 1 + \varepsilon' m', \varepsilon} & + a_{\delta - \varepsilon m, 2} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\alpha' a_{\delta - \varepsilon m, \varepsilon'} & + a'_{2\varepsilon', 1} & = \alpha a'_{2\varepsilon' + \varepsilon' m', \varepsilon} & + a_{\delta - 2\varepsilon m, 1} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\alpha' a_{\varepsilon m, \varepsilon'} & + a'_{\delta', 1} & = \alpha a'_{\varepsilon' m', \varepsilon} & + a_{\delta, 1}.
\end{array} \right.$$

Der vorstehende Algorithmus umfasst $\delta'$ Gleichungen. Wenn nun noch für $\lambda$ nacheinander die Werthe $\delta - 1$, $\delta - 2, \ldots$, $\delta - \varepsilon + 1$ eingeführt werden, so erhält man $\varepsilon - 1$ weitere, dem obigen ähnliche Algorithmen, die wir der Raumersparniss halber nicht hinschreiben. Dagegen liefern die übrigen Werthe von $\lambda$, von $\lambda = \delta - \varepsilon$ bis $\lambda = 1$, nur Wiederholung des Früheren. Wir erhalten daher im Ganzen $\varepsilon$ Algorithmen von je $\delta'$ Gleichungen. Würde man zuerst $\mu = \delta'$, $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, \delta'$ u. s. w. eingeführt haben, so wäre man in ähnlicher Weise auf $\varepsilon'$ Algorithmen von je $\delta$ Gleichungen geführt worden; man hätte dieselben Gleichungen wie oben erhalten, nur in anderer Anordnung.

Kommt es lediglich auf den Zusammenhang der Ziffern des Bruches $\frac{z}{k}$ *in den Systemen* $\alpha$ und $\alpha'$ an, so entsteht die Aufgabe, aus den Algorithmen 26),... *alle Ziffern* $a_{\lambda\mu}$ und $a'_{\lambda\mu}$, deren zweite Indices $\mu$ von 1 ver-

schiedene Werthe haben, zu eliminiren. Dieselbe könnte in der Weise gelöst werden, dass man in den genannten Systemen zuerst mit $\alpha'^{\varepsilon'-1}$, $\alpha'^{\varepsilon'-2}, \ldots, \alpha'$, 1 und dann mit $1, \alpha, \ldots, \alpha^{\varepsilon-2}$, $\alpha^{\varepsilon-1}$ auf geeignete Art componiren würde. Indess verdient das folgende einfachere Verfahren, welches ohne Weiteres auf die im § 11 gegebenen Entwicklungen zurückführt, den Vorzug.

Um aus den Ziffern einer im Systeme $\alpha$ dargestellten Zahl diejenigen im Systeme $\alpha^\nu$ zu erhalten, wo $\nu$ irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, hat man offenbar nur nöthig, von jenen Ziffern, von vorne ab gerechnet, jedesmal je $\nu$ aufeinander folgende zu einer Zahl zu vereinigen. Die so erhaltenen Zahlen stellen dann der Reihe nach die Ziffern der betreffenden Zahl im Systeme $\alpha^\nu$ dar. Bezeichnet man nun die Ziffern des Bruches $\frac{g}{k}$ in den Systemen $(\alpha^\varepsilon, \alpha'^{\varepsilon'})$ und $(\alpha'^{\varepsilon'}, \alpha^\varepsilon)$ bezw. mit $A_{\lambda\mu}$ und $A'_{\lambda\mu}$, so hat man hiernach:

$$27)\quad \begin{cases} A_{\lambda\mu} = (a_{1+(\lambda-1)\varepsilon,\, 1+(\mu-1)\varepsilon'}\; a_{2+(\lambda-1)\varepsilon,\, 1+(\mu-1)\varepsilon'} \ldots a_{\lambda\varepsilon,\, 1+(\mu-1)\varepsilon'}) \\ A'_{\lambda\mu} = (a'_{1+(\lambda-1)\varepsilon',\, 1+(\mu-1)\varepsilon}\; a'_{2+(\lambda-1)\varepsilon',\, 1+(\mu-1)\varepsilon} \ldots a'_{\lambda\varepsilon',\, 1+(\mu-1)\varepsilon}); \end{cases}$$

die Periodicität dieser Ziffern ist durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} A_{\lambda\mu} &= A_{\lambda+\Delta,\mu} = A_{\lambda,\mu+\Delta'} \\ A'_{\lambda\mu} &= A'_{\lambda+\Delta',\mu} = A'_{\lambda,\mu+\Delta} \end{aligned}\right\} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

das heisst, die $A_{\lambda\mu}$ bezw. $A'_{\lambda\mu}$ besitzen die Perioden $\Delta|\Delta'$ bezw. $\Delta'|\Delta$. Die Gleichungen 27) lassen sogleich die Richtigkeit der Beziehung

$$A_{\lambda\mu} = A_{\lambda+N,\mu+N'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

erkennen, in welcher $N$ prim zu $\Delta$, $N'$ prim zu $\Delta' = \Delta$ ist. Es findet somit der Satz des § 11 Anwendung, wonach wir bei Weglassung der zweiten Indices den nachfolgenden Algorithmus erhalten:

$$28)\quad \begin{cases} \alpha'^{\varepsilon'} A_\Delta + A'_1 = \alpha^\varepsilon A'_{m'+1} + A_{\Delta-m} \\ \alpha'^{\varepsilon'} A_{\Delta-m} + A'_2 = \alpha^\varepsilon A'_{m'+2} + A_{\Delta-2m} \\ \alpha'^{\varepsilon'} A_{\Delta-2m} + A'_3 = \alpha^\varepsilon A'_{m'+3} + A_{\Delta-3m} \\ \quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ \alpha'^{\varepsilon'} A_m + A'_{\Delta'} = \alpha^\varepsilon A'_{m'} + A_\Delta, \end{cases}$$

in welchem, wie bemerkt, zur Abkürzung

$$(a_1 a_2 \ldots a_\varepsilon)_\alpha = A_1, \qquad (a_{\varepsilon+1} a_{\varepsilon+2} \ldots a_{2\varepsilon})_\alpha = A_2, \ldots$$
$$(a'_1 a'_2 \ldots a'_{\varepsilon'})_{\alpha'} = A'_1, \; (a'_{\varepsilon'+1} a'_{\varepsilon'+2} \ldots a'_{2\varepsilon'})_{\alpha'} = A'_2, \ldots$$

gesetzt ist. Dieser Algorithmus lässt sich kurz durch die Formel ausdrücken:

$$29)\quad \alpha'^{\varepsilon'} A_{\Delta-(\lambda-1)m} + A'_\lambda = \alpha^\varepsilon A'_{m'+\lambda} + A_{\Delta-\lambda m} \; (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

oder, der Symmetrie wegen, auch durch:

$$\alpha'^{\varepsilon'} A_{m+\lambda} + A'_{\Delta-\lambda m'} = \alpha^\varepsilon A'_{\Delta-(\lambda-1)m'} + A_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wir gelangen auf diese Weise zu dem nachstehenden Ergebniss:

„Es mögen die Ziffern $a_{\lambda\mu}$ und $a'_{\lambda\mu}$ des in den Systemen $(\alpha, \alpha')$ bezw. $(\alpha', \alpha)$ dargestellten echten Bruches $\frac{z}{k}$ die Perioden $\delta . \delta'$ bezw. $\delta' | \delta$ haben. Wenn dann

$$\alpha^n \alpha'^{n'} \equiv 1 \,(mod\, k), \text{ also auch } a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n, \mu+n'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo $n$ und $n'$ positive ganze Zahlen sind von solcher Beschaffenheit, dass $n$ mit $\delta$ den grössten gemeinschaftlichen Theiler $\varepsilon$, $n'$ mit $\delta'$ denjengen $\varepsilon'$ besitzt, und wenn man

$$n = N\varepsilon, \quad \delta = \Delta\varepsilon, \quad n' = N'\varepsilon', \quad \delta' = \Delta'\varepsilon'$$

setzt, so ergiebt sich zunächst $\Delta = \Delta'$. Die Ziffern $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bezw. $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$ des in den Systemen $\alpha$ bezw. $\alpha'$ dargestellten Bruches $\frac{z}{k}$ gehorchen dem Algorithmus

$$\alpha'^{\varepsilon'} A_{\lambda+m} + A'_{\Delta-\lambda m'} = \alpha^{\varepsilon} A'_{\Delta-(\lambda-1)m'} + A_{\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

in welchem zur Abkürzung

$$(a_1 a_2 \ldots a_{\varepsilon})_{\alpha} = A_1, \qquad (a_{\varepsilon+1} a_{\varepsilon+2} \ldots a_{2\varepsilon})_{\alpha} = A_2, \ldots$$

$$(a'_1 a'_2 \ldots a'_{\varepsilon'})_{\alpha'} = A'_1, \quad (a'_{\varepsilon'+1} a'_{\varepsilon'+2} \ldots a'_{2\varepsilon'})_{\alpha'} = A'_2, \ldots$$

gesetzt ist. Die Zahlen $m$ und $m'$ endlich genügen den Congruenzen: $Nm' \equiv N', \quad N'm \equiv N, \quad mm' \equiv 1 \,(mod\, \Delta)$."

Dieser Satz begreift die in den §§ 8 und 11 mitgetheilten als Specialfälle in sich. Wenn $n = \delta$, $n' = \delta'$ wird, so reducirt sich der Algorithmus auf die Gleichung:

$$(\alpha^{\delta} - 1)(a'_1 a'_2 \ldots a'_{\delta'})_{\alpha'} = (\alpha'^{\delta'} - 1)(a_1 a_2 \ldots a_{\delta})_{\alpha}.$$

Beispiel: Es sei $\frac{z}{k} = \frac{5}{31}$, $\alpha = 7$, $\alpha' = 27$; alsdann hat man $\delta = 15$, $\delta' = 10$. Durch Aufstellung des Systems der $a_{\lambda\mu}$ findet man z. B. die Beziehung

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+6, \mu+4} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

bestätigt. Indem man $n = 6$, $n' = 4$ setzt, ergiebt sich:

$$N = 2, \quad \varepsilon = 3, \quad N' = 2, \quad \varepsilon' = 2, \quad \Delta = \Delta' = 5.$$

Die Grössen $m$ und $m'$ sind hier beide gleich 1. Der Algorithmus 29) lautet unter diesen Umständen:

$$27^2 . A_{5-\lambda+1} + A'_{\lambda} = 7^3 . A'_{1+\lambda} + A_{5-\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Da nun

$$\frac{5}{31} = (0,106\ 215\ 434\ 201\ 403 \ldots)_7$$

$$= (0,49\ \overline{15}\ \overline{18}\ 7\ \overline{22}\ \overline{17}\ \overline{11}\ 8\ \overline{19} \ldots)_{27}$$

ist und in Folge dessen

$$A_1 = (106)_7, \quad A_2 = (215)_7, \quad A_3 = (434)_7, \quad A_4 = (201)_7, \quad A_5 = (403)_7,$$

$$A'_1 = (49)_{27}, \quad A'_2 = (\overline{15}\,\overline{18})_{27}, \quad A'_3 = (7\,\overline{22})_{27}, \quad A'_4 = (\overline{17}\,\overline{11})_{27}, \quad A'_5 = (8\,\overline{19})_{27}$$

gesetzt werden muss, so hat man:

$27^2 . A_5 + A'_1 = 7^3 . A'_2 + A_4$ oder $729 . 199 + 117 = 343 . 423 + 99 = 145188$
$27^2 . A_4 + A'_2 = 7^3 . A'_3 + A_3$ „ $729 . 99 + 423 = 343 . 211 + 221 = 72594$
$27^2 . A_3 + A'_3 = 7^3 . A'_4 + A_2$ „ $729 . 221 + 211 = 343 . 470 + 110 = 161320$
$27^2 . A_2 + A'_4 = 7^3 . A'_5 + A_1$ „ $729 . 110 + 470 = 343 . 235 + 55 = 80660$
$27^2 . A_1 + A'_5 = 7^3 . A'_1 + A_5$ „ $729 . 55 + 235 = 343 . 117 + 199 = 40330.$

## § 13.

Die in den beiden letzten Paragraphen aufgestellten Sätze gestatten für den Fall, dass der Nenner des Bruches $\frac{z}{k}$ eine Primzahl $(= p)$ ist, stets eine einfache Umkehrung, ohne dass jedoch eine solche für zusammengesetzte Nenner ausgeschlossen wäre.

Wenn nämlich zunächst $\delta = \delta'$ vorausgesetzt wird, so sind $\alpha$ und $\alpha'$ zwei primitive Wurzeln der Congruenz

$$x^\delta \equiv 1 \pmod p).*$$

Bekanntlich ist nun aber jede Wurzel einer derartigen Congruenz einer Potenz irgend einer und derselben primitiven Wurzel nach dem Modul $p$ congruent. Die Zahl $\alpha'$ muss sich daher unter den Potenzresten von $\alpha$ und $\alpha$ unter denjenigen von $\alpha'$ vorfinden. Hieraus folgt ohne Weiteres, dass der Rest $r_{12}$ nothwendiger Weise unter den Resten $r_{11} (= z)$, $r_{21}$, $r_{31}, \ldots, r_{\delta 1}$ enthalten ist. Es sei etwa $r_{12} = r_{1+i, 1}$, so muss $i$ prim zu $\delta$ sein**, und es ist sodann $r_{\lambda 2} = r_{\lambda + i, 1}$. Ebenso ergiebt sich $r_{\lambda 3} = r_{\lambda + i, 2}$, $r_{\lambda 4} = r_{\lambda + i, 3}, \ldots$; allgemein:

$$r_{\lambda, \mu+1} = r_{\lambda+i, \mu} \text{ oder } r_{\lambda\mu} = r_{\lambda-i, \mu+1} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Setzt man noch $\delta - i = m$, so schreibt sich die letzte Gleichung

$$r_{\lambda\mu} = r_{\lambda+m, \mu+1} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dabei ist $m$ prim zu $\delta$. Nach dem Früheren folgt daraus unmittelbar:

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+m, \mu+1} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

In ähnlicher Weise gelangt man zu der Gleichung

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+1, \mu+m'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

in welcher $m'$ prim zu $\delta$ ist. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass

$$m m' \equiv 1 \pmod \delta).$$

Bestimmt man jetzt, was immer [auf $\varphi(\delta)$ verschiedene Arten] möglich ist, zwei zu $\delta$ prime Zahlen $n$ und $n'$ so, dass sie der Congruenz:

* Vergl. J. A. Serret, Algebra, deutsch von Wertheim, S. 45, Anmerkung.

** Hätte nämlich $i$ mit $\delta$ den von 1 verschiedenen grössten gemeinschaftlichen Theiler $\varepsilon$, und wäre etwa $i = \varepsilon i_1$, $\delta = \varepsilon \delta_1$, so würde aus $r_{12} = r_{1+i, 1}$, oder

$$\alpha' \equiv \alpha^i \pmod p) \text{ sich } \alpha'^{\delta_1} \equiv \alpha^{\delta i_1} \equiv 1 \pmod p)$$

ergeben; das heisst, $\alpha'$ würde, entgegen der Voraussetzung, zu einem Exponenten $< \delta$ gehören.

$$nm' \equiv n' \,(mod\, \delta) \quad \text{oder} \quad n'm \equiv n \,(mod\, \delta)$$

genügen, so lassen sich die beiden vorerwähnten Gleichungen in der folgenden vereinigen:

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n,\mu+n'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wir entnehmen hieraus den Satz:

„Wenn die Ziffern $a_{\lambda\mu}$ bezw. $a'_{\lambda\mu}$ des in den Systemen $(\alpha, \alpha')$ bezw. $(\alpha', \alpha)$ dargestellten echten Bruches $\frac{z}{k}$ die Perioden $\delta_{|}\delta'$ bezw. $\delta'_{|}\delta$ besitzen, und es ist $\delta = \delta'$, so bestehen für den Fall, dass der Nenner $k$ eine Primzahl ist, stets Beziehungen von der Form

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n,\mu+n'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo $n$ und $n'$ prim zu $\delta$ sind. Es findet somit der Lehrsatz des § 11 Anwendung."

Besitzen zweitens $\delta$ und $\delta'$ den grössten gemeinschaftlichen Theiler $\Delta$, und wird

$$\delta = \varepsilon\Delta, \quad \delta' = \varepsilon'\Delta$$

gesetzt, so sind $\alpha^{\varepsilon}$ und $\alpha'^{\varepsilon'}$ primitive Wurzeln der Congruenz

$$x^{\Delta} \equiv 1 \,(mod\, p).$$

Durch eine der oben angewandten genau analoge Betrachtung gelangt man dann ohne Schwierigkeit zu den Gleichungen:

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\varepsilon m, \mu+\varepsilon'}, \quad a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\varepsilon, \mu+\varepsilon' m'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dabei ist $mm' \equiv 1 \,(mod\, \Delta)$. Bestimmt man nun noch, was stets [auf $\varphi(\Delta)$ verschiedene Arten] geschehen kann, zwei zu $\Delta$ prime Zahlen $N$ und $N'$ derart, dass sie der Congruenz

$$Nm' \equiv N' \,(mod\, \Delta)$$

genügen, so können die letzteren beiden Gleichungen in der Form

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\varepsilon N, \mu+\varepsilon' N'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

zusammengefasst werden. Dies führt uns zu dem folgenden Satze:

„Wenn die Ziffern $a_{\lambda\mu}$ bezw. $a'_{\lambda\mu}$ des in den Systemen $(\alpha, \alpha')$ bezw. $(\alpha', \alpha)$ dargestellten echten Bruches $\frac{z}{k}$ die Perioden $\delta_{|}\delta'$ bezw. $\delta'_{|}\delta$ besitzen, und es ist $\delta = \varepsilon\Delta$, $\delta' = \varepsilon'\Delta$, wo $\Delta$ den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $\delta$ und $\delta'$ bedeutet, so bestehen für den Fall, dass der Nenner $k$ eine Primzahl ist, stets Beziehungen von der Form $a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n,\mu+n'}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$, in welchen $n$ mit $\delta$ den grössten gemeinschaftlichen Theiler $\varepsilon$, $n'$ mit $\delta'$ denjenigen $\varepsilon'$ besitzt. Es findet somit der Satz des § 12 Anwendung."*

Diese Sätze rechtfertigen zugleich nachträglich die von uns in den §§ 10, 11 und 12 gemachte Annahme.*

* *Vergl. § 10 S. 12.*

Wenn schliesslich $\delta$ und $\delta'$ keinen Theiler ausser 1 gemeinsam haben, so giebt es keine Gleichung von der Form:

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n,\mu+n'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

in welcher $n$ und $n'$ von $\delta$ bezw. $\delta'$* verschiedene Werthe hätten. In diesem Falle ist auch die Fundamentalgleichung einer weiteren Vereinfachung im seitherigen Sinne nicht mehr fähig. Mit anderen Worten: Es existirt alsdann für die Ziffern von $\frac{z}{k}$ in den Systemen $\alpha$ und $\alpha'$ kein den vorausgehenden Algorithmen ähnlicher vereinfachter Algorithmus mehr.

## § 14.

Nachdem im Voranstehenden die Gleichung

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n,\mu+n'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

für den Fall, dass die Zahlen $n$ und $n'$ beide positiv sind, eine eingehende Behandlung erfahren hat, können wir uns bei der Betrachtung der übrigen Fälle, in welchen eine dieser Zahlen oder beide negative Werthe annehmen, um so kürzer fassen.

Was zunächst die Gleichung

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda-n,\mu-n'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots);$$

wo $n$ und $n'$ positive ganze Zahlen sind, angeht, so ist dieselbe offenbar mit der Gleichung $a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n,\mu+n'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$ identisch. Denn durch Einführung von $\lambda+n$, $\mu+n'$ an Stelle von $\lambda$ bezw. $\mu$ wird jene sogleich auf die letztere Form zurückgeführt. Ebenso leuchtet ein, dass die Gleichungen

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n,\mu-n'} \quad \text{und} \quad a_{\lambda\mu} = a_{\lambda-n,\mu+n'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

nicht von einander verschieden sind. Es genügt also, wenn wir noch den Fall

$$30) \qquad a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n,\mu-n'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo $n$ und $n'$ positive ganze Zahlen bedeuten, in Betracht ziehen.

Aus den Entwicklungen des § 7 folgt zunächst wieder ohne Weiteres der Satz:

„Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Gleichung

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n,\mu-n'} \quad \text{oder} \quad a_{\lambda\mu} = a_{\lambda-n,\mu+n'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

in welcher $n$ und $n'$ positive ganze Zahlen bedeuten, ist das Bestehen der Beziehung

$$\alpha^n = \alpha'^{n'} + uk^{**},$$

wo $u$ eine (positive oder negative) ganze Zahl vorstellt."

* Oder von Vielfachen derselben.

** Oder der Congruenz $\alpha^n \equiv \alpha'^{n'} \pmod{k}$.

Im Uebrigen führt man den vorliegenden Fall leicht auf den früher betrachteten zurück, indem man $\delta' - n'$ für $-n'$ setzt. Da stets $n' < \delta'$ vorausgesetzt werden darf, so kann $(\delta' - n')$ als eine positive ganze Zahl $< \delta'$ angesehen werden. Eine einfache Betrachtung lehrt alsdann, dass unter der Bedingung

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+n.\mu-n'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

die Sätze der §§ 11 und 12 bestehen bleiben, sofern man nur in den darin vorkommenden Gleichungen und Algorithmen $-n'$, $-m$, $-m'$ für bezw. $n'$, $m$, $m'$ einsetzt.

Greifen wir z. B. den einfachsten Fall heraus, in welchem $n$ und $n'$ beide gleich 1 sind, so folgt:

„Wenn $\alpha$ und $\alpha'$ nach dem Modul $k$ congruente Zahlen sind, so besitzen die Perioden der Darstellungen des echten Bruches $\frac{z}{k}$ in den Zahlensystemen $\alpha$ und $\alpha'$ gleichviel Stellen, und die Ziffern $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bezw. $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$ von $\frac{z}{k}$ in diesen Systemen gehorchen dem Algorithmus:

$$\alpha' a_\lambda + a'_{\lambda+1} = \alpha a'_\lambda + a_{\lambda+1} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).“$$

Beispiel: Es sei $z = 1$, $k = 7$, $\alpha = 3$, $\alpha' = 10 = 3 + 1.7$. Dann ist $\delta = \delta' = 6$, und da

$$\left(\frac{1}{7}\right)_3 = (0{,}010212\ldots)_3, \quad \left(\frac{1}{7}\right)_{10} = (0{,}142857\ldots)_{10},$$

also:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 2, \quad a_5 = 1, \quad a_6 = 2, \ldots,$$
$$a'_1 = 1, \quad a'_2 = 4, \quad a'_3 = 2, \quad a'_4 = 8, \quad a'_5 = 5, \quad a'_6 = 7, \ldots,$$

so hat man:

$$\begin{array}{lcl}
10a_1 + a'_2 = 3a'_1 + a_2 & \text{oder} & 10.0 + 4 = 3.1 + 1 = 4 \\
10a_2 + a'_3 = 3a'_2 + a_3 & „ & 10.1 + 2 = 3.4 + 0 = 12 \\
10a_3 + a'_4 = 3a'_3 + a_4 & „ & 10.0 + 8 = 3.2 + 2 = 8 \\
10a_4 + a'_5 = 3a'_4 + a_5 & „ & 10.2 + 5 = 3.8 + 1 = 25 \\
10a_5 + a'_6 = 3a'_5 + a_6 & „ & 10.1 + 7 = 3.5 + 2 = 17 \\
10a_6 + a'_1 = 3a'_6 + a_1 & „ & 10.2 + 1 = 3.7 + 0 = 21.
\end{array}$$

## § 15.

Bevor wir zu einem neuen Abschnitt übergehen, möge es gestattet sein, einerseits einen kurzen Rückblick auf das bis jetzt Behandelte zu werfen und andererseits mit wenigen Worten die Richtung anzudeuten, in welcher sich die nachfolgenden Untersuchungen bewegen.

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildete die Aufgabe, den Zusammenhang zum Ausdruck zu bringen, der zwischen den Darstellungen eines echten Bruches in zwei beliebigen Zahlensystemen $\alpha$ und $\alpha'$ besteht. *Es zeigte sich*, dass zur allgemeinen Auflösung dieser Aufgabe eine *Erweiterung des Begriffes* Zahlensystem nothwendig wird. So wurden wir

zur Definition des Zahlensystems $(\alpha, \alpha')$ mit zwei Grundzahlen $\alpha$ und $\alpha'$ veranlasst. Während die Ziffern eines im Systeme $\alpha$ dargestellten echten Bruches eine einfache Serie bilden und sich wie die in bestimmten Abständen aufeinander folgenden Theilpunkte einer geraden Linie aneinander reihen, machten die Ziffern eines im Systeme $(\alpha, \alpha')$ dargestellten Bruches eine Doppelserie aus. Sie konnten als über einen Winkelraum vertheilt gedacht werden, etwa wie die Gitterpunkte eines Quadranten, der durch ein System aufeinander senkrecht stehender Parallelen getheilt wird.* Diese Ziffern waren nun mit den Ziffern der Darstellung des Bruches im Systeme $(\alpha', \alpha)$ durch eine einfache Gleichung, die sogenannte Fundamentalgleichung, verbunden. Die soweit nur für echte Brüche angestellten Betrachtungen liessen sich leicht erweitern und auf beliebige positive Zahlen ausdehnen. Sie lieferten alsdann zwei Systeme von Ziffern, deren Verbreitungsgebiet die ganze Ebene war, und für welche die Fundamentalgleichung gleichfalls noch Bestand hatte.

Die weiteren Untersuchungen brachten hierauf gewisse Besonderheiten zur Sprache, die sich für die Darstellungen eines echten Bruches in den Systemen $\alpha$ und $\alpha'$ bei specieller Wahl der Grundzahlen $\alpha$ und $\alpha'$ ergeben. Hier bot der Fall „zugeordneter" Zahlen $\alpha$ und $\alpha'$ ein besonderes Interesse dar, indem er unter Anderem in Gestalt eines Algorithmus ein einfaches Mittel an die Hand gab, um die Ziffern eines im decadischen Zahlensysteme darzustellenden echten Bruches successive zu berechnen.** Dabei war die Thatsache besonders bemerkenswerth, dass nur directe Operationen (Multiplicationen***) in Anwendung kommen, also jedes Probiren, wie es die Ausführung einer Division sonst erfordert, vermieden wird.

Gegenstand der nachstehenden Capitel nun ist zunächst die Darlegung des einfachen Zusammenhangs, welcher zwischen den Ziffern der Darstellungen eines echten Bruches (sowie weiterhin einer beliebigen positiven Zahl überhaupt) in den Zahlensystemen $(\alpha, \alpha')$ bezw. $(\alpha', \alpha)$ und in Systemen besteht, deren Grundzahlen durch blosses Multipliciren und Potenziren aus den Grundzahlen $\alpha$ und $\alpha'$ erhalten werden. Von besonderem Interesse ist hier wiederum der einfachste Fall, in dem es sich um die Beziehungen zwischen den Darstellungen in den Zahlensystemen $(\alpha, \alpha')$, $(\alpha', \alpha)$ einerseits und $(\alpha\alpha', \alpha)$, $(\alpha\alpha', \alpha')$ andererseits handelt. Die Erörterung gewisser specieller Fälle liefert interessante Sonderergebnisse.

Nach Einführung der Zahlensysteme mit drei und mehr Grundzahlen und Betrachtung ihrer hauptsächlichsten Eigenthümlichkeiten werden wir alsdann, unter Zugrundelegung des im Vorausgehenden entwickelten Dar-

* Es braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden, dass die Beweisführung selbst von geometrischen Vorstellungen vollkommen frei ist.

** Dieser Algorithmus kann umgekehrt dazu benutzt werden, um einen echten Bruch (dessen Nenner prim zu $\alpha$ ist) zu definiren.

*** Und zwar nur Multiplicationen, bei denen ein Factor eine einstellige Zahl ist.

stellungsbegriffes, eine allgemeine Theorie der Rechnungsoperationen für die systematischen Brüche* zu geben versuchen. Mit einer Reihe ergänzender Bemerkungen und verschiedenartiger Anwendungen (zum Theil auf bekannte Probleme) gedenken wir alsdann den ersten Theil unserer Untersuchungen abzuschliessen, um uns danach der Betrachtung der höheren Congruenzen und Formen zuzuwenden. Das Ziel derselben, die allgemeine ganzzahlige Auflösung der unbestimmten algebraischen Gleichungen, ist zugleich das höchste Ziel der Algebra überhaupt.** Die unbestimmte Analytik dürfte auch allein die Mittel zu einer rein analytischen Definition der negativen, gebrochenen, irrationalen und imaginären Zahlen zu bieten im Stande sein. Ueber diesen letzteren Punkt beabsichtigen wir uns demnächst an anderer Stelle ausführlicher auszusprechen. Für jetzt mögen nur noch einige Bemerkungen gestattet sein.

Die üblichen Definitionen der negativen und gebrochenen Zahlen, sowie die in neuerer Zeit aufgestellten Definitionen der Irrationalzahlen stützen sich auf Begriffe und Anschauungen, die der reinen Analysis eigentlich fremd sind. Dahin gehören insbesondere der Begriff der Stetigkeit, sowie alle Grenzbetrachtungen. Schon bei der Einführung der negativen, und noch mehr der gebrochenen Zahlen sieht man sich genöthigt, entweder das unsichere Gebiet des Transcendenten zu betreten und die Existenz hypothetischer Zahlen vorauszusetzen, mit denen in keiner Weise der Begriff des Zählens mehr verbunden werden kann, oder geometrische Vorstellungen behufs Begriffsbildung heranzuziehen.*** Die ganze Zahl ist, rein analytisch betrachtet, im Allgemeinen eines Getheiltwerdens nicht fähig. Von einem solchen kann erst die Rede sein, sobald man sich die Zahl mit einer Raumgrösse, z. B. einer Strecke, in Verbindung gebracht denkt. Da aber damit zugleich eine geometrische Vorstellung mit hereingenommen wird, so kann eine darauf sich gründende Definition der gebrochenen Zahl keine rein analytische mehr sein. Gleichwohl kann und muss aber, wie wir glauben, die gesammte Analysis auf rein analytischer Grundlage aufgebaut werden, frei von geometrischem wie transcendentem Beiwerk. Diese Grundlage dürfte aber, wie bemerkt, nur die unbestimmte Analytik (im weitesten Sinne des Wortes) zu liefern im Stande sein, wie es auch von Kronecker (a. a. O.) ausgesprochen worden ist.

Dieser Auffassung gemäss möchten wir die negativen, gebrochenen, irrationalen und imaginären Zahlen als Systeme von ganzzahligen Lösungen

---

* Einschliesslich der ganzen Zahlen.

** Vergl. L. Kronecker, Ueber den Zahlbegriff, Crelle's Journ. 101 S. 355.

*** Man vergleiche z. B. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Leipzig 1885. 1. Theil. S. 43, 47, 58; A. Harnack, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1881. S. 4, Art. 4, u. s. w. Dieselben Ausstellungen *lassen sich auch* noch bezüglich der neuerlichen Bemerkungen des Herrn Pasch (*Math. Ann. Bd. 40* S. 150) über die Einführung der rationalen Zahlen machen.

entsprechender unbestimmter Gleichungen definiren, die algebraischen Zahlen insbesondere als ganzzahlige Lösungssysteme algebraischer Gleichungen bezw. Formen. Man hat es so in Wirklichkeit nur mit positiven ganzen Zahlen zu thun, und die Erweiterungen des Zahlbegriffs besitzen lediglich eine formale Bedeutung.* Sie sind keineswegs nothwendig, wohl aber erweist sich ihre Einführung als ein vorzügliches Hilfsmittel, um die oft verwickelten Gesetze, denen die ganzen Zahlen gehorchen, leichter überblicken und durchschauen zu können. Dazu kommt, dass sich auf diese Systeme ganzer Zahlen die auf die ganzen Zahlen selbst anwendbaren Rechnungsoperationen in gewissem Sinne übertragen lassen, wie auch umgekehrt in besonderen Fällen solche Systeme wieder ganze Zahlen bestimmen.** Auf diesem Umstande beruht zugleich die Berechtigung, das Wort Zahl in erweitertem Sinne zur kurzen Bezeichnung derartiger Systeme zu verwenden.

Der Kürze wegen wurde in den vorliegenden Untersuchungen von einer consequenten Durchführung der soeben andeutungsweise besprochenen Anschauungen, die wir freilich zur strengen Begründung der reinen Zahlenlehre für unerlässlich erachten, Abstand genommen. Es ist hier nur beabsichtigt, die Aufmerksamkeit auf ein Gebiet der mathematischen Wissenschaft zu lenken, das bis jetzt so gut wie nicht bebaut worden ist, welches aber bei sorgsamer Bearbeitung reiche Früchte zu tragen verspricht. Wir meinen das Gebiet der sogenannten systematischen Zahlen, das der Einführung des Positions-Systems in die Arithmetik seine Entstehung verdankt. Obwohl in der niederen Arithmetik die fundamentale Bedeutung des Positionsprinzips längst erkannt und gewürdigt worden ist, hat man merkwürdigerweise bis jetzt den weiteren Schritt nicht gethan, dasselbe in allgemeiner Weise auch der Forschung auf dem Gebiete der höheren Arithmetik dienstbar zu machen. Darum dürfte ein Versuch nach dieser Richtung, wie ihn die vorliegenden Untersuchungen darstellen, des Interesses nicht entbehren.

* Wie mit den erweiterten Zahlbegriffen Quantitätsvorstellungen zu verbinden seien, dies zu zeigen ist nicht Sache der reinen Zahlenlehre, sondern der Anwendungen, insbesondere der (rechnenden) Geometrie. Von diesem Standpunkt aus betrachtet scheinen uns die von H. Illigens (Math. Ann. Bd. 30 S. 155, Bd. 35 S. 451) den Theorien von Weierstrass und Cantor gegenüber gerügten angeblichen Mängel eher einen Vorzug dieser Theorien zu bedeuten.

** Zum Beispiel das System aller ganzzahligen Auflösungen $x \mid y$ der Gleichung

$$3 + x = 5 + y$$

bestimmt die ganze Zahl 2; man schreibt in diesem Falle $x - y$ für $x \mid y$. Ebenso bestimmt die Gesammtheit aller ganzzahligen Lösungen $x \mid y$ der Gleichung

$$3x = 12y$$

die ganze Zahl 4; man schreibt hier $\frac{x}{y}$ für $x \mid y$. Dagegen wird in der Gleichung

$$5 + x = 3 + y$$

durch die $x \mid y$ die ganze Zahl $x - y = -2$ bestimmt.

Wir bemerken noch zum Schlusse, dass die bereits am Eingange dieses Aufsatzes angekündigte Schrift sich zugleich die Aufgabe stellt, das Gebäude der Zahlenlehre (worunter wir die gesammte Analysis verstehen) auf denjenigen Anschauungen zu begründen, welche die oben berührten Definitionen der erweiterten Zahlbegriffe zur Voraussetzung haben. Die diesbezüglichen Ausführungen gestalten sich hier, wo die Zahlen als in systematischer Form dargestellt vorausgesetzt werden, besonders einfach.

## IV. Die Darstellung einer Zahl in den Systemen $(\alpha^n\alpha'^{n'}, \alpha^\nu\alpha'^{\nu'})$ und $(\alpha^{n'}\alpha'^n, \alpha^{\nu'}\alpha'^\nu)$ in Beziehung zu den Darstellungen in den Systemen $(\alpha, \alpha')$ und $(\alpha' \alpha)$.

### § 16.

Die in diesem Abschnitte anzustellenden Betrachtungen gewinnen bedeutend an Einfachheit und Durchsichtigkeit, wenn wir sie vorerst an einem echten Bruche $\frac{z}{k}$ und zwar für den besonderen Fall durchführen, in welchem $n = n' = 1$, $\nu = 1$, $\nu' = 0$ ist. Zudem verdient dieser Fall, wie wir sehen werden, auch aus anderen Gründen besonders hervorgehoben zu werden.

Wir legen wieder die Gleichungen

$$1)\quad \alpha r_{\lambda\mu} - r_{\lambda+1,\mu} = k a_{\lambda\mu}, \quad \alpha' r'_{\lambda\mu} - r'_{\lambda+1,\mu} = k a'_{\lambda\mu} \quad (\lambda,\ \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

zu Grunde und nehmen an, dass die Grössen $a_{\lambda\mu}$ und $r_{\lambda\mu}$ bezw. $a'_{\lambda\mu}$ und $r'_{\lambda\mu}$ die Perioden $\delta | \delta'$ bezw. $\delta' | \delta$ besitzen. Verschiebt man alsdann das System

$$2)\quad \left\{\begin{matrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \cdots \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \cdots \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{matrix}\right.$$

derart, dass die Diagonalreihen sich in Horizontalreihen verwandeln, während die Horizontalreihen zu Verticalreihen werden, so gelangt man zu dem folgenden neuen Systeme:

$$3)\quad \left\{\begin{matrix} r_{11} & r_{22} & r_{33} \cdots \\ r_{21} & r_{32} & r_{43} \cdots \\ r_{31} & r_{42} & r_{53} \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{matrix}\right.$$

Wenn

$$4)\quad r_{\lambda\mu} = s_{\mu,\lambda-\mu+1}\ (\lambda \geqq \mu) \quad \text{oder} \quad s_{\lambda\mu} = r_{\lambda+\mu-1,\lambda}\ (\lambda,\ \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

gesetzt wird, so überzeugt man sich leicht, dass das System 3) mit dem nachstehenden identisch wird ($s_{11} = r_{11}$):

$$5)\quad \left\{\begin{matrix} s_{11} & s_{21} & s_{31} \cdots \\ s_{12} & s_{22} & s_{32} \cdots \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{matrix}\right.$$

Es werde nun die erste der beiden Gleichungen

$$\alpha' r'_{\mu\lambda} - r'_{\mu+1,\lambda} = k a'_{\mu\lambda}, \quad \alpha r_{\lambda,\mu+1} - r_{\lambda+1,\mu+1} = k a_{\lambda,\mu+1}$$

mit $\alpha$ multiplicirt und die zweite zu dem erhaltenen Producte hinzugezählt. Dann erhält man wegen $r_{\lambda\mu} = r'_{\mu\lambda}$:

6) $\alpha\alpha' r_{\lambda\mu} - r_{\lambda+1,\mu+1} = k(\alpha a'_{\mu\lambda} + a_{\lambda,\mu+1}) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots).$

Mit Rücksicht auf 4) folgt hieraus

7) $$\alpha\alpha' s_{\mu,\lambda-\mu+1} - s_{\mu+1,\lambda-\mu+1} = k(\alpha a'_{\mu\lambda} + a_{\lambda,\mu+1})$$

oder, indem man $\lambda + \mu - 1$ für $\lambda$ setzt:

8) $$\alpha\alpha' s_{\mu\lambda} - s_{\mu+1,\lambda} = k(\alpha a'_{\mu,\lambda+\mu-1} + a_{\lambda+\mu-1,\mu+1}).$$

Bezeichnet man

9) $$\left\{ \begin{array}{l} p_{\mu\lambda} = \alpha a'_{\mu,\lambda+\mu-1} + a_{\lambda+\mu-1,\mu+1} \\ \text{oder} \\ p_{\mu,\lambda-\mu+1} = \alpha a'_{\mu\lambda} + a_{\lambda,\mu+1} \end{array} \right\} (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)^{*},$$

so schreibt sich Gleichung 8) auch:

10) $$\alpha\alpha' s_{\mu\lambda} - s_{\mu+1,\lambda} = k p_{\mu\lambda}.$$

Nun besteht nach 1) und 4) neben dieser Gleichung noch die folgende:

$$\alpha s_{\mu\lambda} - s_{\mu,\lambda+1} = \alpha r_{\lambda+\mu-1,\mu} - r_{\lambda+\mu,\mu} = k a_{\lambda+\mu-1,\mu}.$$

Wenn man daher

11) $$s_{\mu\lambda} = s'_{\lambda\mu}, \quad \alpha s'_{\lambda\mu} - s'_{\lambda+1,\mu} = k p'_{\lambda\mu}$$

einführt, so ist:

12) $$p'_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\mu-1,\mu} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nach der früher (§ 2 S. 325) gegebenen Definition stellen die $s_{\lambda\mu}$, $s'_{\lambda\mu}$ die Reste und die $p_{\lambda\mu}$, $p'_{\lambda\mu}$ die Ziffern des in den Zahlensystemen $(\alpha\alpha', \alpha)$ bezw. $(\alpha, \alpha\alpha')$ dargestellten Bruches $\frac{s}{k}$ dar.

Die Richtigkeit der Gleichungen 9) und 12) ist zunächst nur für positive Werthe von $\lambda$ und $\mu$ erwiesen. Es wäre jedoch nicht schwer, den Nachweis zu führen, dass sie bei Zugrundelegung der im § 5 S. 331 aufgestellten erweiterten Definition des Darstellungsbegriffes auch noch für

$$\lambda, \mu = 0, \quad -1, \quad -2, \quad -3, \ldots$$

richtig sind. Wir unterdrücken jedoch diesen Beweis, da wir im § 17 ganz allgemein zeigen werden, dass die erwähnten Gleichungen auch bei Ausdehnung der Betrachtung auf beliebige Zahlen für alle ganzen Werthe von $\lambda$ und $\mu$ ihre Giltigkeit behalten.

Vergleicht man Gleichung 9) mit der in der Form

13) $$\alpha' a_{\lambda\mu} + a'_{\mu,\lambda+1} = \alpha a'_{\mu\lambda} + a_{\lambda,\mu+1}$$

geschriebenen Fundamentalgleichung, so überzeugt man sich ohne Weiteres, dass der Werth von $p_{\mu,\lambda-\mu+1}$ mit der rechten Seite derselben identisch ist.

---

* Bei $\lambda = \mu$ hat man $p_{\lambda 1} = p_\lambda = \alpha a'_{\lambda\lambda} + a_{\lambda,\lambda+1}$.

Wenn man andererseits eine Verschiebung des Systems 1) in der Weise vornimmt, dass man zwar die Diagonalreihen wieder zu Horizontalreihen macht, die Verticalreihen dagegen als solche beibehält, so ergiebt sich als neues System:

$$14) \quad \left\{ \begin{array}{llll} r_{11} & r_{22} & r_{33} & \cdots \\ r_{12} & r_{23} & r_{34} & \cdots \\ r_{13} & r_{24} & r_{35} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right.$$

Indem man

$$r_{\lambda\mu} = t_{\lambda, \mu-\lambda+1} \; (\mu \geqq \lambda) \text{ oder } t_{\lambda\mu} = r_{\lambda, \lambda+\mu-1} = r'_{\lambda+\mu-1, \lambda} \; (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

setzt, fällt das letztere System augenscheinlich mit dem Systeme

$$15) \quad \left\{ \begin{array}{lll} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right.$$

zusammen ($t_{11} = r_{11}$). Dabei stellen die Grössen $t_{\lambda\mu}$ die Reste des im Zahlensysteme $(\alpha\alpha', \alpha')$ dargestellten Bruches $\frac{g}{k}$ dar. Durch ein dem vorhin dargelegten genau analoges Verfahren findet man weiter leicht die Gleichung

$$16) \quad \alpha\alpha' t_{\lambda, \mu-\lambda+1} - t_{\lambda+1, \mu-\lambda+1} = k(\alpha' a_{\lambda\mu} + a_{\mu, \lambda+1}) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

oder

$$17) \quad \alpha\alpha' t_{\lambda\mu} - t_{\lambda+1, \mu} = k(\alpha' a_{\lambda, \lambda+\mu-1} + a'_{\lambda+\mu-1, \lambda+1}) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

bestätigt. Führt man

$$\left.\begin{array}{ll} 18) & \alpha\alpha' t_{\lambda\mu} - t_{\lambda+1, \mu} = k q_{\lambda\mu} \\ 19) & t_{\lambda\mu} = t'_{\mu\lambda}, \; \alpha' t'_{\mu\lambda} - t'_{\mu+1, \lambda} = \alpha' r'_{\lambda+\mu-1, \lambda} - r'_{\lambda+\mu, \lambda} = k q'_{\mu\lambda} \end{array}\right\} (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ein, wobei die $q_{\lambda\mu}$, $q'_{\lambda\mu}$ die Ziffern von $\frac{g}{k}$ in den Systemen $(\alpha\alpha', \alpha')$ bezw. $(\alpha', \alpha\alpha')$ vorstellen, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{ll} 20) & q_{\lambda, \mu-\lambda+1} = \alpha' a_{\lambda\mu} + a'_{\mu, \lambda+1}, \; q_{\lambda\mu} = \alpha' a_{\lambda, \lambda+\mu-1} + a'_{\lambda+\mu-1, \lambda+1} \\ 21) & q'_{\mu\lambda} = a'_{\lambda+\mu-1, \lambda} \end{array}\right\} (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Von den beiden letzteren Gleichungen lässt sich dasselbe beweisen, wie von den Gleichungen 9) und 12), dass sie nämlich für **alle ganzen** Werthe von $\lambda$ und $\mu$ richtig sind (vergl. § 17). Vergleicht man 20) mit der Fundamentalgleichung 13), so ergiebt sich, dass **der Werth von** $q_{\lambda, \mu-\lambda+1}$ **mit der linken Seite derselben identisch ist.**

Wir gelangen auf diese Weise zu dem bemerkenswerthen Ergebniss:

„**Die Ziffern** $p_{\lambda\mu}$, $q_{\lambda\mu}$ **des Bruches** $\frac{g}{k}$ **in den Zahlensystemen** $(\alpha\alpha', \alpha)$ **bezw.** $(\alpha\alpha', \alpha')$ **hängen unter einander und mit den Ziffern** $a_{\lambda\mu}$, $a'_{\lambda\mu}$ **der Systeme** $(\alpha, \alpha')$ **bezw.** $(\alpha', \alpha)$ **durch die folgenden** ***Gleichungen*** **zusammen:**

$$p_{\mu,\lambda-\mu+1} = q_{\lambda,\mu-\lambda+1} = \alpha a'_{\mu\lambda} + a_{\lambda,\mu+1} = \alpha' a_{\lambda\mu} + a'_{\mu,\lambda+1},$$

welche für alle ganzen Werthe von $\lambda$ und $\mu$ giltig sind."

Gleichzeitig ergiebt sich:

„Die Ziffern $p'_{\lambda\mu}$, $q'_{\lambda\mu}$ des in den Zahlensystemen $(\alpha, \alpha\alpha')$ bezw. $(\alpha', \alpha\alpha')$ dargestellten Bruches $\frac{z}{k}$ sind mit denjenigen $a_{\lambda\mu}$, $a'_{\lambda\mu}$ in den Systemen $(\alpha, \alpha')$ bezw. $(\alpha', \alpha)$ durch die Gleichungen verbunden: $p'_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\mu-1,\mu}$, $q'_{\lambda\mu} = a'_{\lambda+\mu-1,\mu}$,

giltig für alle ganzen Werthe von $\lambda$ und $\mu$."

In dem speciellen Fall, in welchem $\lambda = \mu$ ist, lässt sich der vorerwähnte Satz folgendermassen aussprechen:

„Die $\lambda^{te}$ Ziffer des Bruches $\frac{z}{k}$ im Systeme $\alpha\alpha'$ erhält man, indem man die $\lambda^{te}$ Ziffer des Bruches $\frac{\alpha^{\lambda-1}z}{k}$ im Systeme $\alpha'$ $\left(\text{bezw. } \frac{\alpha'^{\lambda-1}z}{k} \text{ im Systeme } \alpha\right)$ mit der Zahl $\alpha$ (bezw. $\alpha'$) multiplicirt und zu dem Producte die $\lambda^{te}$ Ziffer des Bruches $\frac{\alpha'^{\lambda}z}{k}$ im Systeme $\alpha$ $\left(\text{bezw. } \frac{\alpha^{\lambda}z}{k} \text{ im Systeme } \alpha'\right)$ hinzuzählt.

## § 17.

Wenn unter $p_{\lambda\mu}$, $q_{\lambda\mu}$ die Ziffern eines in den Zahlensystemen $(\alpha\alpha', \alpha)$ und $(\alpha\alpha', \alpha')$ dargestellten echten Bruches $\frac{z}{k}$ verstanden werden, so bestehen, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, die folgenden Gleichungen:

$$22)\quad \left\{\begin{array}{l} p_{\lambda\mu} = \alpha a'_{\lambda,\lambda+\mu-1} + a_{\lambda+\mu-1,\lambda+1} \\ q_{\lambda\mu} = \alpha' a_{\lambda,\lambda+\mu-1} + a'_{\lambda+\mu-1,\lambda+1} \end{array}\right\} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es ist daselbst auch bereits bemerkt worden, dass diese Beziehungen nicht blos für echte Brüche, sondern überhaupt für beliebige positive Zahlen, und zwar für alle ganzen Werthe von $\lambda$ und $\mu$, Giltigkeit haben. Dies soll nun im Folgenden bewiesen werden.

Es seien also $a_{\lambda\mu}$, $a'_{\lambda\mu}$ die Ziffern einer in den Zahlensystemen $(\alpha, \alpha')$ bezw. $(\alpha', \alpha)$ dargestellten beliebigen positiven Zahl $z$. Setzt man dann allgemein:

$$\left.\begin{array}{l} p_{\lambda\mu} = \alpha a'_{\lambda,\lambda+\mu-1} + a_{\lambda+\mu-1,\lambda+1} \\ q_{\lambda\mu} = \alpha' a_{\lambda,\lambda+\mu-1} + a'_{\lambda+\mu-1,\lambda+1} \end{array}\right\} \quad (\lambda, \mu = -\infty \cdots + \infty),$$

so ist zunächst ohne Weiteres klar, dass beispielsweise die $p_{\lambda\mu}$ sämmtlich $< \alpha\alpha'$ sind. Da nämlich die Ziffern $a'_{\lambda,\lambda+\mu-1}$ und $a_{\lambda+\mu-1,\lambda+1}$ höchstens gleich $(\alpha'-1)$ bezw. $(\alpha-1)$ werden können, so vermag $p_{\lambda\mu}$ den Werth $\alpha(\alpha'-1) + (\alpha-1) = \alpha\alpha' - 1$ nicht zu übersteigen. Die $p_{\lambda\mu}$ lassen sich daher für irgend *einen* Werth von $\mu$ jedenfalls als Ziffern einer im Systeme

$\alpha\alpha'$ dargestellten Zahl $u\alpha^{\mu-1}$ auffassen. Die Zahl $u$ ist, wie wir jetzt zeigen wollen, nicht verschieden von $z$.

Zu diesem Zwecke bemerken wir zunächst, dass

$$u\alpha^{\mu-1} = (\dots p_{-2,\mu}\, p_{-1,\mu}\, p_{0\mu},\; p_{1\mu}\, p_{2\mu}\, p_{3\mu}\dots)_{\alpha\alpha'}.$$

Bezeichnet man in dieser Gleichung mit $p_{l\mu}$ die erste der Ziffern $p_{\lambda\mu}$, die einen von Null verschiedenen Werth hat, während gleichzeitig die Beziehungen $a'_{l-1,\,l+\mu-1} = 0$, $a'_{l-2,\,l+\mu-2} = 0, \dots$ bestehen, wo $l$ jede ganze Zahl sein kann, so lässt sich dieselbe auch schreiben:

$$u\alpha^{\mu-1} = \sum_{\lambda=l}^{\infty} (\alpha\alpha')^{-\lambda} p_{\lambda\mu},$$

oder:

$$u\alpha^{\mu-1} = \sum_{\lambda=l}^{\infty} [\alpha^{-\lambda}\alpha'^{-\lambda}(\alpha a'_{\lambda,\,\lambda+\mu-1} + a_{\lambda+\mu-1,\,\lambda+1})]. \tag{23}$$

Wenn man rechts je zwei benachbarte Glieder, die verschiedenen Klammern entnommen sind, zusammenfasst, so kann Gleichung 23) auch folgendermassen geschrieben werden:

$$u\alpha^{\mu-1} = \alpha^{-l+1}\alpha'^{-l}.\, a'_{l,\,l+\mu-1} + \sum_{\lambda=l}^{\infty} [\alpha^{-\lambda}\alpha'^{-\lambda+1}(\alpha' a_{\lambda+\mu-1,\,\lambda+1} + a'_{\lambda+1,\,\lambda+\mu})].$$

Da der Fundamentalgleichung zu Folge für $(\alpha' a_{\lambda+\mu-1,\,\lambda+1} + a'_{\lambda+1,\,\lambda+\mu})$ der Werth $(\alpha a'_{\lambda+1,\,\lambda+\mu-1} + a_{\lambda+\mu-1,\,\lambda+2})$ gesetzt werden darf, so hat man auch:

$$u\alpha^{\mu-1} = \alpha^{-l+1}\alpha'^{-l} a'_{l,\,l+\mu-1} + \sum_{\lambda=l}^{\infty} [\alpha^{-\lambda}\alpha'^{-\lambda-1}(\alpha a'_{\lambda+1,\,\lambda+\mu-1} + a_{\lambda+\mu-1,\,\lambda+2})]. \tag{24}$$

Indem man hierin wieder je zwei benachbarte, aber verschiedenen Klammern angehörige Glieder vereinigt, ergiebt sich mit Rücksicht auf die Fundamentalgleichung:

$$\left\{\begin{aligned} u\alpha^{\mu-1} &= \alpha^{-l+1}\alpha'^{-l} a'_{l,\,l+\mu-1} + \alpha^{-l+1}\alpha'^{-l-1} a'_{l+1,\,l+\mu-1} \\ &\quad + \sum_{\lambda=l}^{\infty} [\alpha^{-\lambda}\alpha'^{-\lambda-2}(\alpha a'_{\lambda+2,\,\lambda+\mu-1} + a_{\lambda+\mu-1,\,\lambda+3})]. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Durch Wiederholung desselben Verfahrens erhält man allgemein:

$$u\alpha^{\mu-1} = \alpha^{-l+1}.\sum_{\nu=l}^{l+i-1} (\alpha'^{-\nu} a'_{\nu,\,l+\mu-1}) + \sum_{\lambda=l}^{\infty} [\alpha^{-\lambda}\alpha'^{-\lambda-i}(\alpha a'_{\lambda+i,\,\lambda+\mu-1} + a_{\lambda+\mu-1,\,\lambda+i+1})],$$

oder nach Division durch $\alpha^{-l+1}$:

$$\left\{\begin{aligned} u\alpha^{l+\mu-2} &= \sum_{\nu=l}^{l+i-1} (\alpha'^{-\nu} a'_{\nu,\,l+\mu-1}) \\ &+ \frac{1}{\alpha'^{l+i-1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\alpha^{-\nu}\alpha'^{-\nu}.\, \frac{\alpha a'_{l+i+\nu,\,l+\nu+\mu-1} + a_{l+\nu+\mu-1,\,l+i+\nu+1}}{\alpha\alpha'}\right], \end{aligned}\right. \tag{26}$$

$i$ eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Aus Gleichung 26) folgt, da

$$\frac{\alpha a'_{l+i+\nu,\,l+\nu+\mu-1} + a_{l+\nu+\mu-1,\,l+i+\nu-1}}{\alpha\alpha'} < 1,$$

dass die Zahl $u\alpha^{l+\mu-2}$ mit einem Fehler

$$< \frac{1}{\alpha'^{l+i-1}} \quad \text{durch} \quad \sum_{\nu=l}^{l+i-1} (\alpha'^{-\nu} a'_{\nu,\,l+\mu-1})$$

ausgedrückt wird. Wenn $i=\infty$, so ist bei verschwindend kleinem Fehler

27) $u\alpha^{l+\mu-2} = (\ldots a'_{-2,\,l+\mu-1} a'_{-1,\,l+\mu-1} a'_{0,\,l+\mu-1},\, a'_{1,\,l+\mu-1} a'_{2,\,l+\mu-1} \ldots)_{\alpha'}$.

Da diese Beziehung für jeden ganzen Werth von $\mu$ Giltigkeit hat, so wird die Zahl $u$ im Systeme $(\alpha', \alpha)$ durch die Ziffern $a'_{\lambda\mu}$ dargestellt, das heisst, $u$ ist mit $z$ identisch. Die $p_{\lambda\mu}$ stellen daher in der That die Ziffern der Zahl $z$ im Systeme $(\alpha\alpha', \alpha)$ vor. In ähnlicher Weise findet man, dass die $q_{\lambda\mu}$ die Ziffern von $z$ im Zahlensysteme $(\alpha\alpha', \alpha')$ bezeichnen. Also:

„Die Ziffern $p_{\lambda\mu}$, $q_{\lambda\mu}$ einer in den Zahlensystemen $(\alpha\alpha', \alpha)$ bezw. $(\alpha\alpha', \alpha')$ dargestellten beliebigen (ganzen, gebrochenen oder irrationalen) positiven Zahl $z$ hängen unter einander und mit den Ziffern $a_{\lambda\mu}$, $a'_{\lambda\mu}$ von $z$ in den Systemen $(\alpha, \alpha')$ bezw. $(\alpha', \alpha)$ durch die folgenden Gleichungen zusammen:

$$p_{\mu,\,\lambda-\mu+1} = q_{\lambda,\,\mu-\lambda+1} = \alpha a'_{\mu\lambda} + a_{\lambda,\,\mu+1} = \alpha' a_{\lambda\mu} + a'_{\mu,\,\lambda+1},$$

welche für alle ganzen Werthe von $\lambda$ und $\mu$ giltig sind."

## § 18.

Die im § 16 gegebenen Entwicklungen lassen sich ohne Schwierigkeit erheblich verallgemeinern. Führt man nämlich an Stelle des Systems 1) dieses Paragraphen das Folgende ein:

$$28)\quad \begin{cases} r_{11} & r_{1+n,\,1+n'} & r_{1+2n,\,1+2n'} \cdots \\ r_{1+\nu,\,1+\nu'} & r_{1+n+\nu,\,1+n'+\nu'} & r_{1+2n+\nu,\,1+2n'+\nu'} \cdots \\ r_{1+2\nu,\,1+2\nu'} & r_{1+n+2\nu,\,1+n'+2\nu'} & r_{1+2n+2\nu,\,1+2n'+2\nu'} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{cases}$$

wo $n$, $n'$, $\nu$, $\nu'$ positive ganze Zahlen bedeuten, und setzt an Stelle dieses Systems das nachstehende:

$$29)\quad \begin{cases} s_{11} & s_{21} & s_{31} \cdots \\ s_{12} & s_{22} & s_{32} \cdots \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{cases}$$

so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Beziehung:

30) $s_{\lambda\mu} = r_{1+(\lambda-1)n+(\mu-1)\nu,\; 1+(\lambda-1)n'+(\mu-1)\nu'}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$.

Dieselbe liefert umgekehrt unter der Bedingung*:

31) $$n\nu' - n'\nu = \varepsilon,$$

wo $\varepsilon$ die positive oder negative Einheit bedeutet, die Relation:

32) $r_{\lambda\mu} = s_{1+\varepsilon(\lambda-1)\nu'-\varepsilon(\mu-1)\nu,\; 1-\varepsilon(\lambda-1)n'+\varepsilon(\mu-1)n}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$.

---

* Auf den allgemeinen Fall werden wir zurückkommen.

Nun folgt aus Gleichung 2) des § 1:

$$\alpha^n r_{\lambda\mu} - r_{\lambda+n,\mu} = k(a_{\lambda\mu}\, a_{\lambda+1,\mu} \dots a_{\lambda+n-1,\mu})_\alpha,$$

oder, indem wir zur Abkürzung

$$A_{\lambda\mu} = (a_{\lambda\mu}\, a_{\lambda+1,\mu} \dots a_{\lambda+n-1,\mu})_\alpha$$

einführen:

33) $$\alpha^n r_{\lambda\mu} - r_{\lambda+n,\mu} = k A_{\lambda\mu}.$$

Ebenso ergiebt sich:

34) $$\alpha'^{n'} r'_{\mu\lambda} = r'_{\mu+n',\lambda} = k A'_{\mu\lambda},$$

wenn

$$A'_{\mu\lambda} = (a'_{\mu\lambda}\, a'_{\mu+1,\lambda} \dots a'_{\mu+n'-1,\lambda})_{\alpha'}$$

gesetzt wird. Multiplicirt man Gleichung 33) mit $\alpha'^{n'}$ und addirt dazu die Gleichung 34), nachdem man darin $(\lambda + n)$ für $\lambda$ gesetzt hat, so folgt wegen $r_{\lambda\mu} = r'_{\mu\lambda}$:

35) $$\alpha^n \alpha'^{n'} r_{\lambda\mu} - r_{\lambda+n,\mu+n'} = k(\alpha'^{n'} A_{\lambda\mu} + A'_{\mu,\lambda+n}).$$

In ähnlicher Weise gelangt man zur Beziehung:

36) $$\alpha^n \alpha'^{n'} r'_{\mu\lambda} - r'_{\mu+n',\lambda+n} = k(\alpha^n A'_{\mu\lambda} + A_{\lambda,\mu+n'}).$$

Gleichzeitig ergiebt sich (vergl. auch § 4 S. 329, Anmerkung):

37) $$\alpha'^{n'} A_{\lambda\mu} + A'_{\mu,\lambda+n} = \alpha^n A'_{\mu,\lambda} + A_{\lambda,\mu+n'}.$$

Wir setzen jetzt zur Abkürzung:

$$\varrho = 1 + \varepsilon(\lambda - 1)\nu' - \varepsilon(\mu - 1)\nu, \quad \sigma = 1 - \varepsilon(\lambda - 1)n' + \varepsilon(\mu - 1)n.$$

Alsdann erhält man aus Gleichung 32) bei Berücksichtigung von 31):

$$r_{\lambda\mu} = s_{\varrho\sigma}, \quad r_{\lambda+n,\mu+n'} = s_{\varrho+1,\sigma}.$$

Dies in die Gleichung 35) eingeführt, giebt:

38) $$\alpha^n \alpha'^{n'} s_{\varrho\sigma} - s_{\varrho+1,\sigma} = k(\alpha'^{n'} A_{\lambda\mu} + A'_{\mu,\lambda+n}).$$

Setzt man allgemein:

$$\alpha^n \alpha'^{n'} s_{\lambda\mu} - s_{\lambda+1,\mu} = k p_{\lambda\mu},$$

so stellen die $p_{\lambda\mu}$ die Ziffern des Bruches $\frac{s}{k}$ im Zahlensysteme $(\alpha^n \alpha'^{n'}, \alpha^\nu \alpha'^{\nu'})$ dar*; und man hat den Zusammenhang:

39) $$p_{\varrho\sigma} = \alpha'^{n'} A_{\lambda\mu} + A'_{\mu,\lambda+n}.$$

Wenn man andererseits

40) $$t_{\lambda\mu} = r'_{1+(\lambda-1)n+(\mu-1)\nu,\ 1+(\lambda-1)n'+(\mu-1)\nu'} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \dots)$$

einführt, so erhält man unter der Bedingung 31):

41) $$r'_{\lambda\mu} = t_{1+\varepsilon(\lambda-1)\nu'-\varepsilon(\mu-1)\nu,\ 1-\varepsilon(\lambda-1)n'+\varepsilon(\mu-1)n} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \dots).$$

* Führt man nämlich $s_{\varrho\sigma} = s'_{\sigma\varrho}$ ein, so lässt sich nach einem dem eben angewandten ähnlichen Verfahren leicht die Gleichung

$$\alpha^\nu \alpha'^{\nu'} s'_{\varrho\sigma} - s'_{\varrho+1,\sigma} = k(\alpha'^{\nu'} B_{\lambda\mu} + B'_{\mu,\lambda+\nu})$$

bestätigen, wo zur Abkürzung

$$B_{\lambda\mu} = (a_{\lambda\mu}\, a_{\lambda+1,\mu} \dots a_{\lambda+\nu-1,\mu})_\alpha, \quad B'_{\mu\lambda} = (a'_{\mu\lambda}\, a'_{\mu+1,\lambda} \dots a'_{\mu+\nu'-1,\lambda})_{\alpha'}$$

*gesetzt ist.*

Bezeichnet man ähnlich, wie oben,

$$\varrho' = 1 + \varepsilon(\mu - 1)\nu' - \varepsilon(\lambda - 1)\nu, \quad \sigma' = 1 - \varepsilon(\mu - 1)n' + \varepsilon(\lambda - 1)n\text{*},$$

so folgt:

$$\alpha^n \alpha'^{n'} t_{\varrho'\sigma'} - t_{\varrho'+1,\sigma'} = k(\alpha^n A'_{\mu\lambda} + A_{\lambda,\mu+n'}).$$

Indem man

$$\alpha^n \alpha'^{n'} t_{\lambda\mu} - t_{\lambda+1,\mu} = k q_{\lambda\mu}$$

einführt, wo die $q_{\lambda\mu}$ die Ziffern des im Systeme $(\alpha^{n'}\alpha'^{n}, \alpha^{\nu'}\alpha'^{\nu})$ dargestellten Bruches $\frac{z}{k}$ bedeuten, ergiebt sich:

42) $$q_{\varrho'\sigma'} = \alpha^n A'_{\mu\lambda} + A_{\lambda,\mu+n'}.$$

Die Vergleichung von 42) und 39) liefert sodann mit Rücksicht auf 37) den Zusammenhang:

43) $$p_{\varrho\sigma} = q_{\varrho'\sigma'}.$$

Wir gelangen somit zu dem folgenden allgemeinen Satz:

„Die Ziffern $p_{\lambda\mu}$, $q_{\lambda\mu}$ der Darstellungen des echten Bruches $\frac{z}{k}$ in den Zahlensystemen $(\alpha^n\alpha'^{n'}, \alpha^\nu\alpha'^{\nu'})$ bezw. $(\alpha^{n'}\alpha'^{n}, \alpha^{\nu'}\alpha'^{\nu})$ hängen unter der Bedingung

$$n\nu' - n'\nu = \varepsilon,$$

wo $\varepsilon$ die positive oder negative Einheit bedeutet, mit den Ziffern $a_{\lambda\mu}$, $a'_{\lambda\mu}$ von $\frac{z}{k}$ in den Systemen $(\alpha, \alpha')$ bezw. $(\alpha', \alpha)$ und unter einander durch die Gleichungen zusammen:

$$p_{\varrho\sigma} = q_{\varrho'\sigma'} = \alpha'^{n'} A_{\lambda\mu} + A'_{\mu,\lambda+n} = \alpha^n A'_{\mu\lambda} + A_{\lambda,\mu+n'},$$

giltig für $\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots$ Dabei ist zur Abkürzung

$$\varrho = 1 + \varepsilon(\lambda - 1)\nu' - \varepsilon(\mu - 1)\nu, \quad \sigma = 1 - \varepsilon(\lambda - 1)n' + \varepsilon(\mu - 1)n$$

$$\varrho' = 1 + \varepsilon(\mu - 1)\nu' - \varepsilon(\lambda - 1)\nu, \quad \sigma' = 1 - \varepsilon(\mu - 1)n' + \varepsilon(\lambda - 1)n$$

$$A_{\lambda\mu} = (a_{\lambda\mu} a_{\lambda+1,\mu} \ldots a_{\lambda+n-1,\mu})_\alpha, \quad A'_{\lambda\mu} = (a'_{\lambda\mu} a'_{\lambda+1,\mu} \ldots a'_{\lambda+n'-1,\mu})_{\alpha'}$$

gesetzt worden."

Es würde nicht schwer sein, die hier für den echten Bruch $\frac{z}{k}$ gegebenen Entwicklungen auf eine beliebige positive Zahl $z$ auszudehnen, wie es für den besonderen Fall $n = n' = 1$, $\nu = 1$, $\nu' = 0$ im § 17 bereits geschehen ist. Der Kürze halber nehmen wir jedoch hiervon, sowie von einer weiteren Ausführung dieses Gegenstandes jetzt Abstand; wir gedenken aber, später darauf zurückzukommen.

## § 19.

Es ist eine interessante Aufgabe, die Ergebnisse der §§ 16 und 18 für diejenigen speciellen Fälle zu discutiren, für welche die schon mehrfach erwähnte Bedingungscongruenz

$$\alpha^n \alpha'^{n'} \equiv 1 \pmod{k}$$

erfüllt ist. Wir beschränken uns hier der Kürze wegen auf die Betrachtung des einfachsten und zugleich interessantesten Falles „bezüglich $k$ zugeordneter", oder, wie wir uns dafür in der Folge lieber ausdrücken wollen,

* Die $\varrho'$, $\sigma'$ gehen aus bezw. $\varrho$, $\sigma$ durch Vertauschen von $\lambda$ mit $\mu$ hervor.

„**bezüglich $k$ conjugirter**" Grundzahlen $\alpha$, $\alpha'$. Dieselben genügen (§ 7, S. 335) einer Gleichung von der Form:

44) $$\alpha\alpha' - 1 = uk.$$

Nach dem Lehrsatze des § 8 hat man in diesem Falle die Beziehung

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+1,\mu+1} \quad (\lambda,\ \mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

aus welcher (nach § 7) zugleich diese andere folgt:

$$r_{\lambda\mu} = r_{\lambda+1,\mu+1} \quad (\lambda,\ \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Führt man letztere in Gleichung 6) des § 16 ein, so verwandelt sich dieselbe mit Rücksicht auf die Fundamentalgleichung in die folgende:

$$(\alpha\alpha' - 1) r_{\lambda\mu} = k(\alpha a'_{\mu\lambda} + a_{\lambda,\mu+1}) = k(\alpha' a_{\lambda\mu} + a'_{\mu,\lambda+1}) = k p_{\mu,\lambda-\mu+1}),$$

oder wegen Gleichung 44) in:

$$u r_{\lambda\mu} = \alpha' a_{\lambda\mu} + a'_{\mu,\lambda+1} = p_{\mu,\lambda-\mu+1}.$$

Wenn man hierin noch $\lambda + \mu - 1$ für $\lambda$ setzt, so ergiebt sich:

45) $$u r_{\lambda+\mu-1,\mu} = p_{\mu\lambda} = \alpha' a_{\lambda+\mu-1,\mu} + a'_{\mu,\lambda+\mu}.$$

Nun ist nach § 8 S. 335:

$$a_{\lambda+\mu-1,\mu} = a_{\lambda 1} = a_\lambda, \quad a'_{\mu,\lambda+\mu} = a'_{\delta-\lambda+1,1} = a'_{\delta-\lambda+1}{}^{*},$$

ebenso:

$$r_{\lambda+\mu-1,\mu} = r_{\lambda 1} = r_\lambda.$$

Unter diesen Umständen schreibt sich Gleichung 45):

46) $$u r_\lambda = p_{\mu\lambda} = \alpha' a_\lambda + a'_{\delta-\lambda+1}{}^{**} \quad (\lambda,\ \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Zugleich ergiebt sich nebenbei:

$$p_{1\lambda} = p_{2\lambda} = p_{3\lambda} = \cdots$$

In ähnlicher Weise erhält man:

$$u r'_\lambda = \alpha a'_\lambda + a_{\delta-\lambda+1}.$$

In Worten:

„**Es mögen $\alpha$ und $\alpha'$ zwei bezüglich $k$ conjugirte Zahlen vorstellen, das heisst, es soll die Bedingungsgleichung**

$$\alpha\alpha' - 1 = uk$$

**erfüllt sein. Wenn alsdann $r_1, r_2, r_3, \ldots$ bezw. $r'_1, r'_2, r'_3, \ldots$ die Reste und $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bezw. $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$ die Ziffern des Bruches $\frac{s}{k} = \frac{r_1}{k} = \frac{r'_1}{k}$ in den Zahlensystemen $\alpha$ bezw. $\alpha'$ bedeuten, so besteht folgender Zusammenhang:**

$$u r_\lambda = \alpha' a_\lambda + a'_{\delta-\lambda+1}, \quad u r'_\lambda = \alpha a'_\lambda + a_{\delta-\lambda+1}\text{"}.$$

Diese Gleichungen lehren in Verbindung mit dem im § 8 abgeleiteten Algorithmus, die $r_\lambda$ bezw. $r'_\lambda$ in einfacher Weise successive zu berechnen.

---

* $\delta$ bedeutet die Stellenanzahl der Perioden von $\frac{\varepsilon}{k}$ in den Zahlensystemen *$\alpha$ und $\alpha'$.*

** *Vergl. § 9 S. 338.*

**Beispiel:** Es sei, um ein einfaches Beispiel anzuführen, $s=1$, $k=7$, $\alpha=3$, $\alpha'=5$. Alsdann ist $u=2$, $\delta=6$, und man hat:

$$\frac{s}{k}=\frac{1}{7}=(0{,}010212\ldots)_3=(0{,}032412\ldots)_5,$$

also:

$$r_1=1,\quad r_2=3,\quad r_3=2,\quad r_4=6,\quad r_5=4,\quad r_6=5,\ldots$$

$$r'_1=1,\quad r'_2=5,\quad r'_3=4,\quad r'_4=6,\quad r'_5=2,\quad r'_6=3,\ldots$$

$$a_1=0,\quad a_2=1,\quad a_3=0,\quad a_4=2,\quad a_5=1,\quad a_6=2,\ldots$$

$$a'_1=0,\quad a'_2=3,\quad a'_3=2,\quad a'_4=4,\quad a'_5=1,\quad a'_6=2,\ldots$$

Sonach bestehen die folgenden Gleichungen ($\mu=1, 2, 3,\ldots$):

$$p_{\mu 1}=ur_1=\alpha' a_1+a'_6 \quad \text{oder} \quad 2=2.1=5.0+2$$

$$p_{\mu 2}=ur_2=\alpha' a_2+a'_5 \quad \text{„} \quad 6=2.3=5.1+1$$

$$p_{\mu 3}=ur_3=\alpha' a_3+a'_4 \quad \text{„} \quad 4=2.2=5.0+4$$

$$p_{\mu 4}=ur_4=\alpha' a_4+a'_3 \quad \text{„} \quad 12=2.6=5.2+2$$

$$p_{\mu 5}=ur_5=\alpha' a_5+a'_2 \quad \text{„} \quad 8=2.4=5.1+3$$

$$p_{\mu 6}=ur_6=\alpha' a_6+a'_1 \quad \text{„} \quad 10=2.5=5.2+0.$$

Ebenso erhält man:

$$q_{\mu 1}=ur'_1=\alpha a'_1+a_6 \quad \text{oder} \quad 2=2.1=3.0+2$$

$$q_{\mu 2}=ur'_2=\alpha a'_2+a_5 \quad \text{„} \quad 10=2.5=3.3+1$$

$$q_{\mu 3}=ur'_3=\alpha a'_3+a_4 \quad \text{„} \quad 8=2.4=3.2+2$$

$$q_{\mu 4}=ur'_4=\alpha a'_4+a_3 \quad \text{„} \quad 12=2.6=3.4+0$$

$$q_{\mu 5}=ur'_5=\alpha a'_5+a_2 \quad \text{„} \quad 4=2.2=3.1+1$$

$$q_{\mu 6}=ur'_6=\alpha a'_6+a_1 \quad \text{„} \quad 6=2.3=3.2+0.$$

(Fortsetzung folgt.)

## Berichtigungen zur ersten Abhandlung.

(Bd. XXXVII d. Zeitschr. S. 321 flg.)

S. 323 Z. 9 von oben lies $\frac{r_\mu}{k\alpha^{\mu-\lambda}}$ statt $\frac{r^\mu}{k\alpha^{\mu-\lambda}}$,

„ 326 „ 9 „ „ „ $\binom{\nu}{1} r'_{\mu+1,\lambda}\,\alpha'^{\nu-1}$ statt $\binom{\nu}{1} r'_{\mu+1,\lambda}\,\alpha'_{\nu-1}$.

„ 331 „ 28 „ „ „ $s=627{,}610435056$ statt $104{,}601739176$.

## III.

# Bestimmung der Anzahl aller unter einer gegebenen Zahl $m$ liegenden Primzahlen, wenn die unter $\sqrt{m}$ liegenden Primzahlen bekannt sind.


Von

Prof. Dr. Fr. Graefe
in Darmstadt.


---

Wenn man alle Primzahlen, ausser den Zahlen 2 und 3, durch 6 theilt, so sieht man, dass sie entweder den Rest 1 oder 5 geben. Sämmtliche Primzahlen, ausser den Zahlen 2 und 3, sind demnach in den beiden arithmetischen Reihen

$$\text{I)}\quad \begin{cases} 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61, 67, 73, 79, \ldots p^I \ldots \\ p^I = 6n + 1, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots \end{cases}$$

$$\text{II)}\quad \begin{cases} 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, 65, 71, 77, \ldots p^{II} \ldots \\ p^{II} = 6n + 5, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots \end{cases}$$

enthalten. Die Primzahlenproducte aus Primfactoren $> 3$ haben die Form $6n + 1$ oder $6n + 5$; denn es ist:

$$(6m + 1)(6r + 1) = 6[m(6r + 1) + r] + 1 = 6n + 1,$$
$$n = m(6r + 1) + r;$$
$$(6m + 5)(6r + 5) = 6[m(6r + 5) + 5r + 4] + 1 = 6n + 1,$$
$$n = 4 + 5r + m(6r + 5);$$
$$(6m + 1)(6r + 5) = 6[m(6r + 5) + r] + 5 = 6n + 5,$$
$$n = m(6r + 6) + r.$$

In den Reihen I) und II) sind noch Primzahlenproducte aus Primfactoren $> 3$. Ferner befinden sich die Zahlen

$$(6n + 1)^r,\ (6n + 5)^{2r},\ n = 0, 1, 2, 3 \ldots,\ r = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$$

in der Reihe I) und die Zahlen

$$(6n + 5)^{2r+1},\ n = 0, 1, 2, 3 \ldots,\ r = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$$

*Reihe II).*

Die geraden Potenzen aller Primzahlen $> 3$ sind für den Modul 6 congruent. Die Quadrate der Zahlen der Reihe I)

$$1^2,\quad 7^2,\quad 13^2,\ldots$$

und die der Reihe II)

$$5^2,\quad 11^2,\quad 17^2,\ldots$$

bilden arithmetische Reihen zweiter Ordnung.

Die Zahl $6n+1$ ist theilbar durch die Zahl $6n_1+5$, wenn ist

$$n = 4 + 5n_1 + (6n_1+5)z, \quad z = 0, 1, 2, 3\ldots$$

und durch die Zahl $6n_1+1$, wenn ist

$$n = n_1 + (6n_1+1)z, \quad z = 0, 1, 2, 3\ldots$$

Die Zahl $6n+5$ ist theilbar durch die Zahl $6n_1+5$, wenn ist

$$n = n_1 + (6n_1+5)z, \quad z = 0, 1, 2, 3\ldots$$

und durch die Zahl $6n_1+1$, wenn ist

$$n = 5n_1 + (6n_1+1)z, \quad z = 0, 1, 2, 3\ldots$$

Die Zahl $6n+1$ ist das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied der Reihe I) und die Zahl $6n+5$ ist das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied der Reihe II).

In der Reihe I) ist also das

$$\{5 + 5n_1 + (6n_1+5)z\}^{\text{te}} \text{ Glied}$$

durch die Zahl $6n_1+5$ und das

$$\{n_1 + 1 + (6n_1+1)z\}^{\text{te}} \text{ Glied}$$

durch die Zahl $6n_1+1$ theilbar und in der Reihe II) ist das

$$\{n_1 + 1 + (6n_1+5)z\}^{\text{te}} \text{ Glied}$$

durch die Zahl $6n_1+5$ und das

$$\{5n_1 + 1 + (6n_1+1)z\}^{\text{te}} \text{ Glied}$$

durch die Zahl $6n_1+1$ theilbar. Setzt man in den Formeln für $n_1$ die Zahlen 0, 1, 2, 3 ..., so erhält man die umstehende Tabelle.

Eine unterstrichene Zahl $\underline{n}$ zeigt an, dass die Zahl $6n+1(6n+5)$ nicht nur durch die entsprechende Primzahl $p$, sondern auch durch eine Primzahl, kleiner als $p$, theilbar ist; z. B.: die Zahl $6.64+1$ ist theilbar durch 5, 7, 11, denn der Zahl $n=64$ entspricht in der Tabelle $p=5$, 7, 11; die Zahl $6.75+5$ ist theilbar durch 5, 7, 13. In dieser Tabelle sind die unterstrichenen $\underline{n}$ für $p > 19$ meistens weggelassen.

Mit Hilfe dieser Tabelle kann man sehr leicht die Anzahl der Primzahlen unter 10000 finden und ferner bestimmen, ob eine gegebene Zahl, die kleiner als 2400 ist, eine Primzahl ist.

Um die Anzahl der Primzahlen unter einer Zahl, die grösser als 10000 ist, zu finden, muss man die Reihe der Werthe von p und n fortsetzen.

| $p$ | Die Zahl $6n+1$ ist durch die Zahl $p$ theilbar, wenn ist $n =$ | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 9 | 14 alle Zahlen, die auf 4 oder 9 endigen. | | | | | | | | | | | |
| 7 | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 | 36 | 43 | 50 | 57 | 64 | 71 | 78 | 85 | 92 |
| | 99 | 106 | 113 | 120 | 127 | 134 | 141 | 148 | 155 | 162 | 169 | 176 | 183 | 190 |
| | 197 | 204 | 211 | 218 | 225 | 232 | 239 | 246 | 253 | 260 | 267 | 274 | 281 | 288 |
| | 295 | 302 | 309 | 316 | 323 | 330 | 337 | 351 | 358 | 365 | 372 | 386 | 393 | |
| 11 | 9 | 20 | 31 | 42 | 53 | 64 | 75 | 86 | 97 | 108 | 119 | 130 | 141 | 152 |
| | 163 | 174 | 185 | 196 | 207 | 240 | 251 | 262 | 273 | 306 | 317 | 328 | 350 | 361 |
| | 383 | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 2 | 15 | 28 | 41 | 54 | 67 | 80 | 93 | 106 | 119 | 132 | 145 | 158 | 171 |
| | 197 | 210 | 223 | 236 | 275 | 288 | 301 | 327 | 340 | 353 | 366 | 392 | 405 | |
| 17 | 14 | 31 | 48 | 65 | 82 | 99 | 116 | 133 | 150 | 167 | 201 | 218 | 235 | 252 |
| | 286 | 303 | 320 | 337 | 371 | 388 | | | | | | | | |
| 19 | 3 | 22 | 41 | 60 | 79 | 98 | 117 | 136 | 193 | 212 | 231 | 250 | 307 | 326 |
| | 345 | | | | | | | | | | | | | |
| 23 | 88 | 111 | 157 | 180 | 203 | 226 | 272 | 295 | 318 | 341 | 387 | | | |
| 29 | 140 | 198 | 227 | 256 | 285 | 343 | 401 | | | | | | | |
| 31 | 5 | 160 | 191 | 222 | 315 | 346 | 377 | 408 | | | | | | |
| 37 | 6 | 228 | 265 | 302 | 376 | 413 | | | | | | | | |
| 41 | 280 | 321 | 362 | | | | | | | | | | | |
| 43 | 7 | 308 | | | | | | | | | | | | |
| 47 | 321 | 368 | | | | | | | | | | | | |
| 53 | 309 | | | | | | | | | | | | | |
| 59 | 285 | | | | | | | | | | | | | |
| 61 | 10 | 315 | | | | | | | | | | | | |
| 67 | 11 | | | | | | | | | | | | | |
| 71 | 272 | | | | | | | | | | | | | |
| 73 | 12 | | | | | | | | | | | | | |
| 79 | 13 | | | | | | | | | | | | | |
| 83 | 318 | | | | | | | | | | | | | |
| 89 | 341 | | | | | | | | | | | | | |
| 97 | 16 | 307 | | | | | | | | | | | | |
| | *17* | | | | | | | | | | | | | |

| $p$ | Die Zahl $6n+5$ ist durch die Zahl $p$ theilbar, wenn ist $n =$ |
|---|---|
| 5 | 0 5 10 alle Zahlen, die durch 5 theilbar sind. |
| 7 | 5 12 19 26 33 40 47 54 61 68 75 82 89 96 103 110 117 124 131 138 145 152 159 166 173 180 187 194 201 208 215 222 229 236 243 250 257 264 271 278 285 292 299 306 313 320 327 334 341 348 362 369 376 383 397 |
| 11 | 1 12 23 34 45 56 67 78 89 100 111 122 133 144 155 166 177 188 199 210 221 232 243 254 265 276 287 298 309 320 331 342 353 364 375 386 397 |
| 13 | 10 23 36 49 62 75 88 101 114 127 140 153 166 179 192 205 218 231 244 257 270 283 296 309 322 335 361 374 387 |
| 17 | 2 19 36 53 70 87 104 121 138 155 172 189 206 223 240 257 274 291 308 325 342 359 376 393 |
| 19 | 15 34 53 72 91 110 129 148 167 186 224 262 281 319 338 357 376 |
| 23 | 3 85 118 141 164 233 256 279 302 371 |
| 29 | 4 149 178 207 236 294 323 352 381 |
| 31 | 87 118 211 242 273 304 366 397 |
| 37 | 178 252 289 326 363 |
| 41 | 6 293 334 |
| 43 | 35 293 336 379 |
| 47 | 7 289 |
| 53 | 8 326 |
| 59 | 9 |
| 61 | 294 |
| 67 | 323 |
| 71 | 11 |
| 73 | 279 |
| 79 | 302 |
| 83 | 13 |
| 89 | 14 |
| 97 | 274 |
| 101 | 16 319 |

Es sind z. B. die Zahlen 2387, 2363 keine Primzahlen, dagegen sind die Zahlen 2399, 1949 Primzahlen. Es ist nämlich:

$$2387 = 6.397 + 5, \quad 2363 = 6.393 + 5;$$

der Zahl $n = 397$ entspricht $p = 7$, und der Zahl $n = 393$ entspricht $p = 17$; also ist 2387 durch 7 und 2363 durch 17 theilbar; es ist:

$$2387 = 7.11.31, \quad 2363 = 17.139.$$

Ferner ist:

$$2399 = 6.399 + 5, \quad 1949 = 6.324 + 5;$$

da die Zahlen $n = 399$, $n = 324$ in vorstehender Tabelle nicht enthalten sind, so sind die beiden Zahlen Primzahlen.

Aus den Formeln oder auch aus der Tabelle folgt:

$$\text{dem Gliede} \left\{ \begin{matrix} 5 + 5n_1 + (6n_1 + 5)z \\ n_1 + 1 + (6n_1 + 1)z \end{matrix} \right\} \begin{matrix}\text{in der} \\ \text{Reihe I)}\end{matrix} \atop \left\{ \begin{matrix} n_1 + 1 + (6n_1 + 5)z \\ 1 + 5n_1 + (6n_1 + 1)z \end{matrix} \right\} \begin{matrix}\text{in der} \\ \text{Reihe II)}\end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \text{gehen} \\ z \text{ Glieder} \\ \text{voraus,} \\ \text{die durch} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 6n_1 + 5 \\ 6n_1 + 1 \\ 6n_1 + 5 \\ 6n_1 + 1 \end{matrix} \right\} \text{theilbar sind.}$$

Diese Andeutungen genügen, um die Anzahl der Primzahlen unterhalb einer Zahl $m$ zu finden, wenn die Primzahlen kleiner als $\sqrt{m}$ bekannt sind. Ein Primzahlenproduct kleiner als die Zahl $m$ sei $m_1 . m_2$; ist einer der Factoren, z. B. $m_1$, grösser als $\sqrt{m}$, so ist der andere Factor $m_2$ natürlich kleiner als $\sqrt{m}$. Um daher die Primzahlenproducte, die weder den Factor 2, noch den Factor 3 enthalten, und kleiner als die Zahl $m$ sind, zu finden, genügt es, in den Reihen I) und II) die Zahlen zu bestimmen, deren eine Factor kleiner als $\sqrt{m}$ ist.

Die grösste Zahl der Reihe I), die kleiner als $m$ ist, sei $m^I$ und die grösste Zahl der Reihe II), die kleiner als $m$ ist, sei $m^{II}$. Die Anzahl der Glieder der Reihe I) von 1 bis $m^I$ ist

$$N^I = \frac{m^I - 1}{6} + 1$$

und die Anzahl der Glieder der Reihe II) von 5 bis $m^{II}$ ist

$$N^{II} = \frac{m^{II} - 5}{6} + 1.$$

Wenn in der Reihe I) von 1 bis $m^I$:

1. die Zahl $6n^I_{6r+5} + 1$ die grösste durch $6r + 5$ theilbare Zahl ist, so ist die Anzahl der durch $6r + 5$ theilbaren Zahlen der Reihe I) von 1 bis $m^I$:

$$N^I_{6r+5} = \frac{n^I_{6r+5} + r + 1}{6r + 5}, \text{ (also } 6n^I_{6r+5} + 1 = \{6(N^I_{6r+5} - 1) + 5\}\{6r + 5\}\text{)};$$

2. die Zahl $6n^{I}_{6r+1}+1$ die grösste durch $6r+1$ theilbare Zahl ist, so ist die Anzahl der durch $6r+1$ theilbaren Zahlen (ausgenommen die Zahl $6r+1$) der Reihe I) von 1 bis $m^{I}$:

$$N^{I}_{6r+1}=\frac{n^{I}_{6r+1}-r}{6r+1},\ (\text{also } 6n^{I}_{6r+1}+1=\{6N^{I}_{6r+1}+1\}\{6r+1\}).$$

Wenn in der Reihe II) von 5 bis $m^{II}$:

1. die Zahl $6n^{II}_{6q+5}+5$ die grösste durch $6q+5$ theilbare Zahl ist, so ist die Anzahl der durch $6q+5$ theilbaren Zahlen (ausgenommen die Zahl $6q+5$) der Reihe II) von 5 bis $m^{II}$:

$$N^{II}_{6q+5}=\frac{n^{II}_{6q+5}-q}{6q+5},\ (\text{also } 6n^{II}_{6q+5}+5=\{6N^{II}_{6q+5}+1\}\{6q+1\});$$

2. die Zahl $6n^{II}_{6q+1}+5$ die grösste durch $6q+1$ theilbare Zahl ist, so ist die Anzahl der durch $6q+1$ theilbaren Zahlen der Reihe II) von 5 bis $m^{II}$:

$$N^{II}_{6q+1}=\frac{n^{II}_{6q+1}+q+1}{6q+1},\ (\text{also } 6n^{II}_{6q+1}+5=\{6(N^{II}_{6q+5}-1)+5\}\{6q+1\}).$$

Es sei $m=10000$. Es ist dann $m^{I}=9997$, $m^{II}=9995$.

Die Anzahl der Glieder der Reihe I) von 1 bis 9997 ist

$$N^{I}=\frac{9997-1}{6}+1=1667$$

und die Anzahl der Glieder der Reihe II) von 1 bis 9995 ist

$$N^{II}=\frac{9995-5}{6}+1=1666.$$

Die grösste durch 5 theilbare Zahl der Reihe I) ist $9985=6.1664+1$; die Anzahl der durch 5 theilbaren Zahlen der Reihe I) des Intervalls von 1 bis 9997 ist demnach:

$$\frac{1664+1}{5}=333.$$

Die grösste durch 7 theilbare Zahl der Reihe I) ist $9961=6.1660+1$; die Anzahl der durch 7 theilbaren Zahlen der Reihe I) des Intervalls von 1 bis 9997 (mit Ausnahme der Zahl 7) ist

$$\frac{1660-1}{7}=237.$$

Unter den durch 7 theilbaren Zahlen befinden sich einige, die auch durch 5 theilbar sind; die durch 7 theilbaren Zahlen sind:

$$7(6n+1),\ n=1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots 237$$

und die grösste durch 35 theilbare Zahl der Reihe ist demnach:

$$(6.234+1)7=6.1639+1;$$

die Anzahl der durch 35 theilbaren Zahlen ist

$$\frac{1639+5+1}{35}=47.$$

Die Anzahl der durch 5 und der durch 7 theilbaren Zahlen der Reihe I) des Intervalls von 1 bis 9997 (mit Ausnahme der Primzahl 7) ist demnach gleich

$$333+237-47=523.$$

Die grösste durch 5 theilbare Zahl der Reihe II) ist

$$9995=6.1665+5;$$

die Anzahl der durch 5 theilbaren Zahlen der Reihe II) des Intervalls von $1-9995$ (mit Ausnahme der Zahl 5) ist

$$\frac{1665}{5}=333.$$

Die grösste durch 7 theilbare Zahl der Reihe II) ist

$$9989=6.1664+5;$$

die Anzahl der durch 7 theilbaren Zahlen der Reihe II) des Intervalls von $1-9995$ ist

$$\frac{1664+1+1}{7}=238.$$

Die durch 7 theilbaren Zahlen sind

$$(6n+5)7,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots 237$$

und die grösste durch 35 theilbare Zahl der Reihe ist demnach

$$(6.235+5)7=(6.47+1)35=6.1650+5;$$

die Anzahl der durch 35 theilbaren Zahlen ist

$$1+\frac{1650-5}{35}=48.$$

Die Anzahl der durch 5 und der durch 7 theilbaren Zahlen der Reihe II) des Intervalls von $1-9995$ (mit Ausnahme der Primzahl 5) ist demnach gleich

$$333+238-48=523.$$

Diese Rechnungen sind leichter mit Hilfe der Tabelle auszuführen. Es sei die Anzahl der durch 19 theilbaren Zahlen der Reihe I) zu bestimmen und unter den durch 19 theilbaren Zahlen die Anzahl der Zahlen, die

1. durch 5 | 3. durch 11
2. durch 7 | 4. durch 13
5. durch 17

*theilbar sind.* Die grösste durch 19 theilbare Zahl der Reihe I) ist

$$(6.87+1)19.$$

Die Anzahl der durch 19 theilbaren Zahlen ist 87 (mit Ausnahme der Zahl 19). Setzt man in

$$6n+1$$

für $n$ die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5...87, so zeigt die Tabelle, dass $6n+1$,

1. für 17 Werthe von $n$ durch 5,
2. „ 13 „ „ $n$ „ 7,
3. „ 8 „ „ $n$ „ 11,
4. „ 7 „ „ $n$ „ 13,
5. „ 5 „ „ $n$ „ 17

theilbar ist. Unter den 87 durch 19 theilbaren Zahlen sind 17 durch 5, 13 durch 7, 8 durch 11, 7 durch 13 und 5 durch 17 theilbar. Die unterstrichenen Zahlen der Tabelle zeigen an, dass unter den durch

7 theilbaren Zahlen 2 durch 5 theilbar sind,
11 „ „ 1 „ 5 und 1 durch 7 theilbar ist,
13 „ „ 1 „ 5 „ 1 „ 7 „ „
17 „ „ 1 „ 5 „ 1 „ 11 „ „

Unter den 87 durch 19 theilbaren Zahlen giebt es weder durch 5 noch durch 11, noch durch 13, noch durch 17 theilbare Zahlen, deren Anzahl ist

$$87-(17+13+8+7+5)+(2+2+2+2)=45.$$

Führt man diese Berechnungen für alle Primzahlenproducte des Intervalls von 1 bis 10000 aus, so erhält man die umstehenden Tabellen.

Im Schnittpunkte der Horizontalreihe $p$ und der Verticalreihe $p_1$ steht die Anzahl der durch $p.p_1$ theilbaren Zahlen des Intervalls von 1 bis 9997. Diese Anzahl enthält nicht die Anzahl der durch $p.p_1p_2$ theilbaren Zahlen, wenn die Primzahl $p_2$ kleiner als die Primzahl $p_1$ ist.

In der Reihe I) des Intervalls von 1 bis 9997 sind z. B. 87 Zahlen (mit Ausnahme der Primzahl 19) durch die Zahl 19 theilbar; unter diesen 87 Zahlen sind 17 durch 5, 11 durch 7, aber diese nicht durch 5; 6 durch 11, aber diese nicht durch 5, 7; 5 durch 13, diese nicht durch 5, 7, 11; 3 durch 17, diese nicht durch 5, 7, 11, 13 theilbar.

Die Anzahl der Primzahlen der Reihe I) unterhalb 10000 ist (wenn die Einheit zu den Primzahlen gezählt wird)

$$1667-(1603-548)=612$$

und die Anzahl der Primzahlen der Reihe II) unterhalb 10000 ist

$$1666-(1605-555)=616.$$

Die Anzahl der Primzahlen des Intervalls von 1 bis 10000 ist mit Einschluss der Einheit

$$612+616+2=1230.$$

| $p$ | | Anzahl der Primzahlenproducte $6n+1$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $p_1 =$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 1 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 | 41 | 43 | 47 | 53 | 59 | 61 | 67 | 71 | 73 | 79 |
| 5 | 333 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 237 | 47 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 151 | 31 | 16 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 128 | 25 | 16 | 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 98 | 20 | 11 | 6 | 4 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 19 | 87 | 17 | 11 | 6 | 5 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 23 | 72 | 15 | 8 | 5 | 3 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 29 | 57 | 12 | 6 | 4 | 2 | 2 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 31 | 53 | 10 | 7 | 4 | 3 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 37 | 44 | 9 | 6 | 3 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 41 | 40 | 8 | 4 | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 43 | 38 | 7 | 5 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| 47 | 35 | 7 | 4 | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | | | | | | | | | |
| 53 | 31 | 7 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | | | | | | | |
| 59 | 28 | 6 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | | | | | | |
| 61 | 27 | 5 | 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | | | | | | |
| 67 | 24 | 5 | 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | |
| 71 | 23 | 5 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 73 | 22 | 4 | 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | | |
| 79 | 20 | 4 | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 83 | 20 | 4 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | | |
| 89 | 18 | 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 97 | 17 | 3 | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| Sa. d. Verticalreihen: | 1603 | 255 | 123 | 55 | 28 | 15 | 8 | 8 | 7 | 7 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 3 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| | | 548 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Es ist für $m = 10000$:

$6n_5' + 1 = 9985 = 5.1997 = 6.1664 + 1 = 5(6.332 + 5)$

$6n_7' + 1 = 9961 = 7.1423 = 6.1660 + 1 = 7(6.237 + 1)$

$6n_{11}' + 1 = 9955 = 11.905 = 6.1659 + 1 = 11(6.150 + 5) = 5.11.181$

$6n_{13}' + 1 = 9997 = 13.769 = 6.1666 + 1 = 13(6.128 + 1)$

$6n_{17}' + 1 = 9979 = 17.587 = 6.1663 + 1 = 17(6.97 + 5)$

$6n_{19}' + 1 = 9937 = 19.523 = 6.1656 + 1 = 19(6.87 + 1)$

$6n_{23}' + 1 = 9913 = 23.431 = 6.1652$

$6n_{29}' + 1 = 9889 = 29.341 =$

$= 11.$

| $p$ | 1 | Anzahl der Primzahlenproducte $6n+5$ $p_1 =$ 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 | 41 | 43 | 47 | 53 | 59 | 61 | 67 | 71 | 73 | 79 | 83 | 89 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 333 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 238 | 48 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 151 | 30 | 18 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 128 | 26 | 14 | 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 97 | 19 | 12 | 7 | 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 19 | 87 | 18 | 9 | 6 | 3 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 23 | 72 | 14 | 9 | 4 | 4 | 2 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 29 | 57 | 11 | 8 | 4 | 3 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 31 | 53 | 11 | 5 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 37 | 45 | 9 | 4 | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 41 | 40 | 8 | 5 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 43 | 38 | 8 | 4 | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 47 | 35 | 7 | 4 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | |
| 53 | 31 | 6 | 4 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | |
| 59 | 28 | 5 | 4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | |
| 61 | 27 | 6 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 67 | 25 | 5 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 71 | 23 | 4 | 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | | | | |
| 73 | 22 | 5 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | | | | |
| 79 | 21 | 5 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | | | | |
| 83 | 19 | 4 | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | |
| 89 | 18 | 3 | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | |
| 97 | 17 | 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| S. d. Verticalreihen: | 1605 | 256 | 120 | 53 | 31 | 13 | 10 | 8 | 8 | 7 | 7 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |

555

$$6n'_{37}+1 = 9805 = 37.265 = 6.1634+1 = 37(6.44+1)$$
$$= 5.\ 37.53 = 6n'_{53}+1 = 53(6.30+5)$$
$$6n'_{41}+1 = 9799 = 41.239 = 6.1633+1 = 41(6.39+5)$$
$$6n'_{43}+1 = 9847 = 43.229 = 6.1641+1 = 43(6.38+5)$$
$$6n'_{47}+1 = 9823 = 47.209 = 6.1637+1 = 47(6.34+5) = 11.19.47$$
$$6n'_{59}+1 = 9853 = 59.167 = 6.1642+1 = 59(6.27+5)$$
$$6n'_{61}+1 = 9943 = 61.163 = 6.1657+1 = 61(6.27+1)$$
$$6n'_{67}+1 = 9715 = 67.145 = 6.1619+1 = 67(6.24+1) = 5.29.67$$
$$9727 = 71.137 = 6.1621+1 = 71(6.22+5)$$
$$= 73.133 = 6.1618+1 = 73(6.22+1) = 7.19.73$$

[illegible] $= 6.$ [illegible] $- 1 =$ [illegible] $. 20+1) = 11^2.79$

[illegible] $. 19+5) = 7.17.83$

[illegible] $- 1 =$ [illegible] $. 17+5)$

[illegible] $. 17+1)$

[illegible] $= 5$ [illegible] $= 5\ 6.333+1$

[illegible] $= 7$ [illegible] $= 7$ [illegible] $237+5)$

[illegible] $- 5 = 11\ 6.151+1$

[illegible] $6.127-5$

[illegible]

[illegible] $+5,$

[illegible]

[illegible] $- 5$

[illegible] $6.72-1,$

[illegible] $-1) = 7^2.29$

[illegible] $-5)$

[illegible] $.44-5$

[illegible] $= 41$ [illegible] $= 41$ [illegible] $40-1)$

[illegible] $= 43$ [illegible] $= 43$ [illegible] $.37-5)$

[illegible] $= 47$ [illegible] $= 47$ [illegible] $35-1)$

[illegible] $+5) = 7.23.61$

[illegible] $.24-5$

[illegible] $.23-1)$

[illegible] $-5)$

[illegible] $-5) = 5^2.79$

[illegible] $-1) = 5.23.83$

[illegible] $-1$

[illegible] $-5)$

[illegible] Tabelle zu Grunde [illegible] Primfactoren [illegible] nehmen; z. B. statt [illegible] und statt $61(6.26+5)$ [illegible] $6.149+5)$, so wird [illegible]

[illegible] $30\ 16$

[illegible] die Horizontalreihe:

| | 1 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 | 41 | 43 | 47 | 53 | 59 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 61 | 27 | 6 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

zu

| | 1 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 | 41 | 43 | 47 | 53 | 59 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 61 | 25 | 5 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Diese Annahmen ändern natürlich nicht die Differenzen

$$1603 - 548 = 1602 - 547, \quad 1605 - 555 = 1603 - 553.$$

Die letzte Tabelle zeigt ferner, dass die Anzahl der durch 5 und der durch 7 theilbaren Zahlen (inclusive 7) der Reihe I) unterhalb 10000 gleich ist

$$333 + 238 - 47 = 524$$

und die Anzahl der durch 5 und der durch 7 theilbaren Zahlen (inclusive 5) der Reihe II) unterhalb 10000 gleich ist

$$334 + 238 - 48 = 524.$$

Die Anzahl der Zahlen des Intervalls von 1 bis 10000, die weder durch 2, noch durch 3, noch durch 5 und noch durch 7 theilbar sind, ist somit:

$$1667 + 1666 - 524 - 524 = 2285.$$

Schliesslich sei noch erwähnt, dass man die gegebenen Zahlen

$$6n_7^I + 1 = 9961 \text{ etc.}, \quad 6n_7^{II} + 5 = 9989 \text{ etc.}$$

benutzen kann, um mittelst höchstens 20 Differenzen zu ermitteln, ob eine gegebene Zahl $< 10000$ und $> 2400$ eine Primzahl ist. Wenn nämlich die Zahl $6p^I + 1$ durch $6r \pm 1$ theilbar ist, so ist auch die Zahl

$$n_{6r\pm1}^I - p^I = D_{6r\pm1}^I, \quad 6r \pm 1 < \sqrt{6p^I + 1}$$

durch $6r \pm 1$ theilbar, und wenn die Zahl $6p^{II} + 5$ durch $6r \pm 1$ theilbar ist, so ist die Zahl

$$n_{6r\pm1}^{II} - p^{II} = D_{6r\pm1}^{II}, \quad 6r \pm 1 < \sqrt{6p^{II} + 1}$$

durch $6r \pm 1$ theilbar. Wenn für einen bestimmten Werth von $r$ die Differenz $D_{6r\pm1}^I (D_{6r\pm1}^{II})$ den Factor $6r \pm 1$ hat, so ist die Zahl $6p^I + 1$ $(6p^{II} + 5)$ durch $6r \pm 1$ theilbar.

Es sei $6p^{II} + 5 = 4997$, $6p^I + 1 = 4999$.

1) $$4997 = 6 . 832 + 5, \quad 6r \pm 1 < 71$$

$$6n_7^{II} + 5 = 9989, \quad 6n_{11}^{II} + 5 = 9977 \text{ etc.}$$

$$1664 - 832 = 832 = 2^6 . 13 = D_7^{II}$$

$$1662 - 832 = 2 . 5 . 83 = D_{11}^{II}$$

$$1661 - 832 = 829 = D_{13}^{II}$$

$$1651 - 832 = 819 = 3^2 . 7 . 13 = D_{17}^{II}$$

$$1649 - 832 = 817 = 6 . 136 + 1 = 19 . 43 = D_{19}^{II};$$

da $D_{19}^{II}$ den Factor 19 hat, so ist die Zahl 4997 durch 19 theilbar; es ist $4997 = 19 . 263$.

Die Factoren der Zahlen $D^I_{6r\pm1}(D^{II}_{6r\pm1})$ erhält man leicht aus der ersten Tabelle, denn der grösste Werth der Differenz $D$ ist für

$$6p^I+1> 2400,\quad 6p^{II}+5> 2400,$$
$$<10000,\qquad <10000,$$
$$D=1666-400=1266.$$

2) $4999=6.833+1,\ 6r\pm1<71$

$6n^I_7+1=9961,\ 6n^I_{11}+1=9955$ etc.

$1660-833=827=D^I_7$

$1659-833=826=2.7.59=D^I_{11}$

$1666-833=833=7^2.17=D^I_{13}$

$1663-833=830=2.5.83=D^I_{17}$

$1656-833=823=D^I_{19}$

$1652-833=819=3^2.7.13=D^I_{23}$

$1648-833=815=3.5.61=D^I_{29}=D^I_{31}$

$1634-833=801=3^2.79=D^I_{37}=D^I_{53}$

$1633-833=800=2^5.5^2=D^I_{41}$

$1641-833=808=2^3.101=D^I_{43}$

$1637-833=804=2^2.3.67=D^I_{47}$

$1642-833=809=D^I_{59}$

$1657-833=824=2^3.103=D^I_{61}$

$1619-833=786=2.3.131=D^I_{67}$;

da kein $D^I_{6r\pm1}$ den Factor $6r\pm1$ hat, so ist die Zahl 4999 eine Primzahl.

Darmstadt, 25. October 1892.

# IV.

# Ueber zwei Fusspunktenflächen des Achsencomplexes einer Fläche zweiter Ordnung.

Von

CH. BÖKLE

in Frankenthal (Rheinbayern).

Hierzu Tafel I.

## I.

Wir finden im 23. Vortrage von Reye's Geometrie der Lage (zweite Abtheilung, zweite Auflage 1892) eine äusserst interessante Fusspunktenfläche des Achsencomplexes einer Fläche zweiter Ordnung erwähnt und deren Gleichung in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem in einer Anmerkung beigefügt.

Die nachstehenden Mittheilungen betreffs dieser Fläche haben den Zweck, die merkwürdige Thatsache zu begründen, dass dieselbe eine Dupin'sche Cyklide ist und ihre Entstehung in diesem Sinne anzugeben. Behufs Charakterisirung der in Rede stehenden Fläche nehmen wir wohl am besten den Wortlaut des betreffenden Satzes aus dem angegebenen Werke:

> „Werden zwei Symmetrie-Ebenen $\gamma$ und $\gamma'$ (einer Fläche $F^2$ zweiter Ordnung) von irgend einer Achse* in den resp. Punkten $P$ und $P_1$ geschnitten, und sind $g$ und $g_1$ die Perpendikel, welche aus resp. $P$ und $P_1$ auf die gemeinschaftliche Hauptachse von $\gamma$ und $\gamma'$ gefällt werden können, so ist jede Gerade des Raumes, welche einen Punkt von $g$ mit einem Punkte von $g_1$ verbindet, eine Achse (S. 171).
>
> Die Fusspunkte** aller dieser Achsen erfüllen eine durch $g$ und $g_1$ gehende Fläche, von welcher $\gamma$ und $\gamma'$ zwei Symmetrie-Ebenen sind, und welche von jeder durch $g$ oder $g_1$ gelegten Ebene in dieser Geraden und einem Kreise geschnitten wird.

* Eine „Achse" einer Fläche $F^2$ zweiter Ordnung heisst jede Gerade des Raumes, die zu ihrer Polaren in Bezug auf $F^2$ normal ist (Reye, Geometrie der Lage, 21. Vortrag).

** Der Punkt, in welchem eine Achse von der ihr conjugirten Ebene rechtwinklig geschnitten wird, heisst „Fusspunkt" der Achse (23. Vortrag).

Diese Fusspunktenfläche ist demnach völlig bestimmt und leicht construirbar, sobald ausser den Geraden $g$ und $g_1$ noch ein Punkt derselben bekannt ist."

In einer hierauf bezüglichen Anmerkung heisst es dann weiter:

„Wird die Fläche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, in dessen $X$-Achse die Symmetrie-Ebenen $\gamma$ und $\gamma'$ sich schneiden, dessen $Y$-Achse mit $g$ zusammenfällt und dessen in $\gamma'$ liegende $Z$-Achse folglich zu $g_1$ parallel ist, so lautet die Gleichung der Fläche:

$$(x^2 + z^2 - dx)(x - k) + xy^2 = 0.$$

Hierin bezeichnet $k$ den Abstand der Geraden $g_1$ von der $Z$-Achse, und $d$ den Durchmesser des Kreises, in welchem die Ebene $XZ$ oder $\gamma'$ der Fläche begegnet.

Jede zur $X$-Achse normale, also zu den Geraden $g$ und $g_1$ parallele Ebene hat ebenfalls einen Kegelschnitt mit dieser Fläche gemein."

Halten wir die Gleichung der Fläche einstweilen im Auge.

Gelegentlich einer Untersuchung nämlich über quadratische Kugelschaaren ergab sich eine Einhüllungsfläche einer solchen Schaar, deren Gleichung sich leicht mit der Reye'schen identificiren liess. Die Definition der Schaar muss so ausfallen:

Durch den Mittelpunkt einer Kugel ist eine Ebene $\gamma$ senkrecht zu einer Ebene $\varepsilon$ gelegt.

Alle Kugeln nun, die die gegebene Kugel und die Ebene $\varepsilon$ berühren und ihre Mittelpunkte in $\gamma$ haben, bilden eine quadratische Schaar.

Die Einhüllungsfläche dieser Schaar zeigt alle Eigenschaften der erwähnten Fusspunktenfläche.

Es werde die gegebene Kugel von der Ebene $\gamma$ nach dem Grosskreise mit dem Mittelpunkte $C$ geschnitten, die Ebene $\varepsilon$ längs der Geraden $g$ getroffen, die in einem rechtwinkligen Coordinatensystem $Y$-Achse sein soll. Unsere $X$-Achse sei das Loth von dem Mittelpunkte $C$ der Kugel und des Grosskreises auf $g$; dieselbe schneide den Letzteren in den Punkten $A$ und $A'$, die Gerade $g$ im Ursprung 0 (siehe Tafel I).

Die $Z$-Achse legen wir durch den Letzteren lothrecht zur Ebene $\gamma$. In dem so festgelegten System sei $A0 = K$, $A'0 = 2d$.

Will man jetzt den Mittelpunkt $M$ einer Kugel der Schaar auffinden, so ziehe man einen Strahl $AD$, wo $D$ der Treffpunkt dieses Strahles mit $g$ ist, während der Grosskreis von ihm zum zweiten Male in $B$ geschnitten wird. Der Radius $CB$ und das Loth in $D$ auf $g$ treffen sich dann in dem im Mittelpunkte $M$ einer Kugel der Schaar, die die Ebene $\varepsilon$ in $D$ und die Kugel $C$ in $B$ berührt. Der Beweis stützt sich in äusserst elementarer Weise auf die Aehnlichkeit der Dreiecke $MBD$ und $CBA$.

Weil daher $MD = MB$ ist, so ist stets auch $ME = MC$, wenn $E$ auf der Parallelen $l$ zu $g$ sich verschiebt, wo $DE = CB$ gleich dem Radius der Kugel ist.

Wir sehen so leicht ein, dass der Ort der Mittelpunkte $M$ der Kugeln unserer Schaar eine Parabel mit dem Brennpunkte $C$ und der Directrix $l$ ist.

Die kleinste Kugel der Schaar hat ihren Mittelpunkt in $\mathfrak{M}$ auf der $X$-Achse und der Parabelparameter ist $2 . C\mathfrak{M} = k$.

Die Gleichung der Parabel in Bezug auf ihre Scheiteltangente als $Y$-Achse ist daher:

$$y^2 = 2kx.$$

In unserem Coordinatensystem müssen wir $x$ ersetzen durch $\xi - d$, daher erhält sie die Form:

$$\eta^2 = 2k(\xi - d). \tag{1}$$

Die Gleichung einer Kugel der Schaar lautet:

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2 = \xi^2,$$

oder:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y\eta + \eta^2 = 2x\xi,$$

worin $\xi$ und $\eta$ die Coordinaten des Mittelpunktes vorstellen.

Setzen wir hierin den Werth von $\xi$ aus Gleichung 1), so bekommen wir die Gleichung der Kugel in folgender Form:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y\eta + \eta^2 \frac{(k-x)}{k} - 2dx = 0. \tag{2}$$

Aendert hier $\eta$ seinen Werth, so beschreibt unsere Kugel 2) die Schaar.

Sie wird von ihrer Nachbarlage in einem Kreise geschnitten und die Gleichung der Ebene dieser Charakteristik der Einhüllungsfläche ist:

$$-y + \eta - \frac{x\eta}{k} = 0,$$

wie wir sie durch Differention von 2) nach $\eta$ finden, oder umgeformt:

$$\eta = \frac{ky}{k-x}. \tag{3}$$

Aus 2) und 3) folgt für die Gleichung der Einhüllungsfläche:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2y^2k}{k-x} + \frac{k^2y^2(k-x)}{k(k-x)^2} - 2dx = 0,$$

oder:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 2dx)(x-k) + ky^2 = 0, \tag{4}$$

oder:

$$(x^2 + z^2 - 2dx)(x-k) + xy^2 = 0. \tag{4a}$$

Diese Gleichung 4a) wird identisch mit der oben angeführten Gleichung der Fusspunktenfläche, wenn wir $2d$ durch $d$ ersetzen.

Die Fusspunktenfläche ist demnach eine Dupin'sche Cyklide, die sich in das Unendliche erstreckt.

Dieselbe besitzt zwei geradlinige Krümmungslinien, die sich rechtwinklig kreuzen.*

In unserem Falle sind dies die Geraden $g$ und die Parallele $g_1$ durch $A$ zu der $Z$-Achse.

Die Ebenen normal zur $X$-Achse, also parallel zu den Geraden $g$ und $g_1$, schneiden die Fläche nach Hyperbeln.

Führt man den Schnitt durch $A'$, so zerfällt die Hyperbel in zwei sich in $A'$ schneidende Geraden.

Die Fläche enthält demnach ausser $g$ und $g_1$ noch zwei Geraden, die aber nicht Krümmungslinien sind.

Setzen wir nämlich $x = 2d$, so erhalten wir als Gleichung der Schnittcurve der Ebene $x = 2d$ mit unserer Fläche:

$$(4d^2 + z^2 - 4d^2)(2d - k) + 2dy^2 = 0,$$

oder:

$$z^2 - \frac{2d}{k - 2d} y^2 = 0,$$

das heisst:

$$\left(z + \sqrt{\frac{2d}{k - 2d}} y\right)\left(z - \sqrt{\frac{2d}{k - 2d}} y\right) = 0.$$

Die Gleichungen unserer beiden Geraden sind demnach:

$$1) \quad z + \sqrt{\frac{2d}{k - 2d}} \cdot y = 0,$$

$$2) \quad z - \sqrt{\frac{2d}{k - 2d}} \cdot y = 0.$$

Wir wollen noch eine kleine Bemerkung machen über die Regelfläche, deren Erzeugende die Asymptoten unserer Hyperbeln sind.

Diese Asymptoten gehören in den Tangentencomplex unserer Fläche; dieser Complex ist daher dritten Grades. Dieselben Asymptoten gehören aber auch in die Congruenz erster Ordnung und erster Classe, gebildet von allen Strahlen, die die $X$-Achse schneiden und zur $YZ$-Ebene parallel laufen.

Da nun ein Complex vom Grade $p$ und eine Congruenz von der Ordnung $m$ und der Classe $n$ eine Regelfläche vom Grade** $p(m + n)$ gemeinsam haben, so ist unsere Asymptotenfläche vom Grade $3(1 + 1) = 6$.

Dieselbe enthält die Geraden $g$ und $g_1$ und durchdringt die Cyklide in zwei Geraden, die durch $A'$ gehen (siehe oben: Schnitt durch $A'$). Wir könnten zu demselben Resultate auch so gelangen:

Die Erzeugenden unserer Fläche stützen sich

1. auf die $X$-Achse,
2. auf die dazu normale unendlich ferne Gerade,

* Vergl. hierüber: Reye, Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme.

** *Vergl. hierüber:* R. Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der *Liniengeometrie I. Bd.* S. 43.

3. auf die Curve dritter Ordnung, welche die unendlich ferne Ebene aus unserer Fläche ausschneidet.

Ihr Grad* ist daher $2.1.1.3 = 6$.

Zum Schlusse seien noch einige Eigenschaften der Fusspunktenfläche erwähnt, die sich leicht aus unserer Definition ableiten lassen. Die Durchdringungspunkte der $X$-Achse mit der Kugel, die mehrfach erwähnten Punkte $A$ und $A'$ sind die Aehnlichkeitspunkte der Kugel und der Ebene $\varepsilon$.

Daher haben alle Kugeln der Schaar in $A$ z. B. gleiche Potenz ($AF^2 = AB.AD$). Zieht man daher von $A$ aus die Tangenten an die Kugeln der Schaar, so sind dieselben alle gleich gross. Fassen wir eine bestimmte Kugel in's Auge, so erhalten wir einen Tangentenkegel, auf welchem zwei Tangenten an unsere Cyklide liegen. Dieselben sind die Tangenten an den Kreis, in welchem diese Kugel von ihrer Nachbarlage geschnitten wird, dessen Ebene ja durch $A$ geht. Wir gelangen dadurch zu folgendem Resultate:

Die Tangenten vom Punkte $A$ an unsere Fusspunktenfläche sind alle gleich gross. Ihre Länge ist:

$$\sqrt{C\mathfrak{M}^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - d^2}.$$

Der Ort der Berührungspunkte auf der Fläche ist demnach eine sphärische Curve, nämlich der Schnitt einer Kugel um $A$ mit dem Radius $\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - d^2}$ und der Fläche.

Die Projection dieser Curve auf die $XY$-Ebenen oder $\gamma$ ist leicht auffindbar. Auf der Kugel $M$ liegt der Kreis mit dem Durchmesser $BD$, längs welchem die Kugel die Fläche berührt. Die Ebene des Kreises steht senkrecht auf der $XY$-Ebene.

Denkt man sich diesen Kreis in die Ebene $XY$ umgeklappt, so ist der Schnittpunkt $H$ desselben mit dem Kreise um $A$ mit dem Radius $\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - d^2}$ die Umklappung des Berührungspunktes der Tangente von $A$ an den Kreis.

Das Loth $HJ$ auf $AB$ ist die Umklappung des projicirenden Lothes des Punktes $H$, somit $J$ die Projection des Punktes auf die Ebene $\gamma$.

Die Gleichung des Ortes für $J$ und damit auch die Gleichung des Cylinders, der die Berührungscurve auf die $XY$-Ebene projicirt, erhalten wir, wenn wir aus der Gleichung unserer Kugel um $A$, welche sämmtliche Kugeln der Schaar rechtwinklig schneidet und aus der Gleichung unserer Fläche $z$ eliminiren.

---

* Vergl. hierüber: R. Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie I. Bd. S. 11, woselbst verwiesen wird auf: „Cayley, Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Bd. VIII, S. 145; Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Reihen Bd. II Art. 232 (3 Aufl.).

Wir erhalten dadurch eine Gleichung zweiten Grades in $x$ und $y$.

Der projicirende Cylinder ist daher von der zweiten Ordnung; der Ort für $J$ ist eine Ellipse.

Der Schnitt der Kugel um $A$ mit diesem Cylinder ist eine Curve vierter Ordnung.

Unsere Berührungscurve, die von der sechsten Ordnung sein muss, zerfällt daher in eine Curve vierter Ordnung (Schnitt der Kugel und des Cylinders) und in die Gerade $g_1$, die als Doppelgerade aufzufassen ist.

Wir wollen nicht abschliessen ohne die Bemerkung, dass durch unsere angenommene Kugel und der Ebene $\varepsilon$ noch eine zweite Cyklide gegeben ist, welche die Schaar Kugeln umhüllt, welche die Kugel berührend einschliessen. Es ist Grund zu der Annahme vorhanden, dass die eine oder andere Cyklide als Fusspunktenfläche auftritt, je nachdem die $X$-Achse ein Paar reeller oder imaginärer Brennpunkte der Fläche zweiter Ordnung trägt.

Der Fall $d = 0$ bietet wenig Neues.

## II.

Am Schlusse des 23. Vortrages wird noch eine zweite Fusspunktenfläche erwähnt im beifolgenden Satze:

Diejenigen Normalen einer Schaar confocaler Flächen zweiter Ordnung, welche von einer Symmetrie-Ebene $\gamma$ in den Punkten eines Durchmessers geschnitten werden, sind zu einer auf $\gamma$ senkrechten Ebene $\varepsilon$ parallel. Ihre Fusspunkte liegen auf einer durch $d$ gehenden Fläche, von welcher $\gamma$ eine Symmetrie-Ebene ist. Dieselbe wird von jeder zu $\varepsilon$ parallelen Ebene in einem Kreise und einer unendlich fernen Geraden geschnitten, und von jeder durch $d$ gelegten Ebene in diesem Durchmesser und einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt mit demjenigen der confocalen Flächen zusammenfällt und von deren Asymptoten die eine zu $\varepsilon$ parallel ist.

Wir wollen nun von dieser Fläche zeigen, dass sie durch ein verhältnissmässig sehr einfaches Princip in eine Ebene transformirt werden kann.

Denken wir uns irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem, so soll in dieser Weise abgebildet werden:

Eine der Coordinaten bleibt bestehen, z. B. der Abstand von der $YZ$-Ebene.

In jeder Ebene dagegen parallel zur $YZ$-Ebene, also normal zur $X$-Achse, wird nach dem Principe der reciproken Radien abgebildet, deren Mittelpunkt auf der $X$-Achse liegt und deren Potenz für alle Ebenen constant ist.

Man könnte dieses Abbildungsprincip das Princip der reciproken Achsendistanzen nennen.

*Es ist leicht* ersichtlich, dass die Bilder einer Geraden je nach Lage *r letzteren verschieden* ausfallen und zwar:

1. Jede Gerade parallel zur Achse (bei obiger Annahme die $X$-Achse) wird als Parallele zur Achse abgebildet.
2. Jede Gerade normal zur Achse wird als Kreis abgebildet, der durch einen Punkt der Achse geht. Schneidet die Normale die Achse, so wird sie in sich selbst abgebildet.
3. Jede Gerade, welche die Achse schneidet, wird als gleichseitige Hyperbel abgebildet.

Legen wir durch beide Geraden, die Achse und die abzubildende, eine Ebene, nehmen in derselben die Achse als $X$-Achse, die $Y$-Achse aber senkrecht dazu durch den Schnitt der Geraden mit derselben, so lautet die Gleichung der Geraden im Allgemeinen: $x = y \, tang \, \varphi,$

wo $\varphi$ die Neigung unserer Geraden gegen die $Y$-Achse bedeutet.

Für die Coordinaten des Bildes haben wir die Substitutionen:

$$1) \quad \xi = x,$$

$$2) \quad y\eta = p,$$

wo $p$ constant, oder:

$$\eta = \frac{p}{y};$$

daraus ziehen wir die Gleichung:

$$\xi = \frac{p}{\eta} \cdot tan \, \varphi,$$

oder:

$$\xi\eta = p \, . \, tang \, \varphi.$$

wodurch die Behauptung 3) erwiesen ist.

Nehmen wir noch die letztmögliche Lage einer Geraden zur Achse des Systems, so können wir behaupten:

4. Jede zur Achse windschiefe Gerade, die nicht zu ihr normal ist, wird als Raumcurve $k^3$ dritter Ordnung abgebildet.

Wir können das auf die einfachste Weise so zeigen:

Durch die Gerade denken wir uns eine Ebene parallel zur Achse gelegt, so ist deren Bild ein Cylinder, auf welchem die Achse Mantellinie ist. Auf diesem Cylinder liegen somit die Bildpunkte der Punkte unserer Geraden. Diese Bilder liegen aber auch auf den Lothen durch die Punkte zur Achse. Da letztere ein hyperbolisches Paraboloid erzeugen, auf welchem auch unsere Achse liegt, so ist die Bildcurve unserer Geraden der Schnitt des Cylinders und der Regelschaar. Da diese beiden indes eine Gerade, die Achse, gemeinsam haben, so ist dieser Schnitt eine Raumcurve dritter Ordnung.

Wie sieht nun das Bild einer beliebigen Ebene aus?

Läuft die Ebene parallel zur Achse, so wissen wir schon, dass wir einen Cylinder bekommen, dessen Schnitte normal zur Achse Kreise sind (die Bilder der Geraden der Ebene normal zur Achse).

Schneidet die Ebene $\varepsilon$ unsere Achse ($X$-Achse) im Punkte 0, so ziehen wir in $\varepsilon$ eine Gerade senkrecht zur Achse und nehmen dieselbe als

$Y$-Achse; die $Z$-Achse soll auf beiden senkrecht stehen. Die Gleichung der Ebene $\varepsilon$ wird dann allgemein so ausfallen:

$$\frac{x}{z} = k.$$

Ist die Entfernung eines Punktes von der $X$-Achse $r$, die Entfernung des Bildpunktes $\varrho$, so ist:

$$r . \varrho = p$$

(Potenz der reciproken Radien).

Die Coordinaten des Bildpunktes seien $\xi$, $\eta$, $\zeta$; es gelten dann folgende Gleichungen:

$$z : \zeta = r : \varrho,$$

$$z = \frac{r\zeta}{\varrho} = \frac{p\zeta}{\varrho^2}.$$

Aber:

$$\varrho^2 = \eta^2 + \zeta^2,$$

somit:

$$z = \frac{p\zeta}{\eta^2 + \zeta^2}.$$

Unsere Ebene wird daher in die Fläche

$$\xi(\eta^2 + \zeta^2) = kp\zeta,$$

also in eine Fläche III transformirt.

Wir brauchen kaum noch hinzuzufügen, dass diese Fläche alle Eigenheiten der zweiten Reye'schen Fusspunktenfläche besitzt.

Diese Fläche kann als Bild von unendlich vielen Ebenen aufgefasst werden, die einen Büschel mit der $Y$-Achse als Träger bilden. Da sich hierbei $k$ ändert, so muss sich $p$ derart ändern, dass

$$q = kp$$

constant bleibt.

Es muss nun offenbar $q$ eine Function der Bestimmungsstücke der beiden Focalkegelschnitte der confocalen Flächenschaar sein, welche ausfindig zu machen uns nicht gelungen ist.

# Kleinere Mittheilungen.

## I. Ueber Ordinalfunctionen.

Die intensiven Grössen lassen sich als solche kennzeichnen, die nur durch Ordinalzahlen messbar sind. Eine Anzahl von Farben gleicher Art aber verschiedener Intensität kann man nach dieser ordnen und jeder Intensität eine bestimmte Ordnungszahl beilegen. Kommen jetzt neue Intensitäten hinzu, so muss man entweder die Ordnungszahlen ändern, oder man muss interpoliren, wobei man sich wiederum entweder damit begnügen kann, zu constatiren, dass eine der neuen Intensitäten zwischen zweien der ursprünglichen Grade liegt, oder man kann jedes Intervall entsprechend der Anzahl der einzuschaltenden Intensitäten in Bruchgrade eintheilen. Die Mohs'sche Härtescala der Mineralien kann auch zur Veranschaulichung dieser Verhältnisse dienen.

Liegt ein bestimmtes, abgeschlossenes System von Intensitäten vor, so kann man jeder Intensität eine Zahl aus einem Zahlensystem in der Weise zuordnen, dass gleichen Intensitäten gleiche Zahlen entsprechen, höheren Intensitäten höhere Zahlen. Die Wahl des Zahlensystems ist nur an die Bedingung gebunden, dass sie eine vollständige und eindeutige Abbildung der Intensitäten ermöglicht; im Uebrigen bleibt es der Willkür überlassen, ob man z. B. nur ganze oder auch gebrochene Zahlen verwenden, ob man im ersteren Falle die natürliche Zahlenreihe oder eine unterbrochene Zahlenreihe wählen will; denn, gleichen Differenzen der Zahlen brauchen nicht gleiche Unterschiede der Intensitäten zu entsprechen. Von gleichen Unterschieden intensiver Grössen kann man überhaupt nur in zwei Fällen sprechen, nämlich erstens, wenn neben der unmittelbaren Vergleichung derselben noch eine mittelbare Vergleichung möglich ist, die eine andere Art des Maasses liefert.* So kann man die unmittelbar empfundene Intensität der Wärme auch durch das Thermometer messen, welches übrigens

* Der Begriff der intensiven Grösse ist hiernach also ein relativer, nämlich relativ zu der Art, wie sie gemessen wird. Die unmittelbar empfundene Tonstärke ist eine intensive Grösse, die durch die Schwingungsamplitude gemessene „Intensität" des Tones dagegen eine extensive Grösse. Wenn in philosophischen und manchmal sogar in mathematischen Werken der Bogengrad für eine intensive Grösse erklärt wird, so ist das natürlich nur ein grobes Missverständniss. Der Name Grad *beweist nichts*.

auch noch kein absolutes Maass liefert, und man kann die Härte der Mineralien auch vermittelst des Druckes messen, der auf eine sie ritzende Spitze ausgeübt werden muss, und nur mit Rücksicht auf diese Art der Messung hat es einen Sinn, zu sagen, dass die den Mohs'schen Härtegraden entsprechenden Härteunterschiede nicht gleich seien. Der zweite Fall ist der, dass das System der Intensitäten ein vollständiges ist, das heisst, so beschaffen, dass eine Interpolation zwischen zwei auf einander folgenden der gegebenen Intensitäten unmöglich ist. Das ist der Fall, wenn die auf einander folgenden Grade durch die eben merklichen Unterschiede bestimmt werden. Mit einem gewissen Rechte kann man dann diese Grade als absolute Einheiten der Intensität betrachten. Das psychophysische Messen trifft diese Festsetzung.*

Denken wir uns nun eine intensive Grösse abhängig von einem oder mehreren Argumenten, die nicht selber intensive Grössen sind, sondern deren Maass in Cardinalzahlen ausgedrückt ist. Eine solche Function möge eine Ordinalfunction genannt werden, weil ihre Werthe durch ein System von Ordinalzahlen, dem die oben erörterte Willkürlichkeit anhaftet, dargestellt werden. Durch diese Willkürlichkeit unterscheidet sich die Ordinalfunction von der gewöhnlichen Function. Während diese, wenn sie von zwei Variablen abhängig ist, durch eine bestimmte Fläche dargestellt wird, wird jene durch eine Schaar verwandter Flächen repräsentirt, mit deren gemeinsamen Eigenschaften wir uns im Folgenden beschäftigen wollen. Diese Untersuchung ist für diejenigen Wissenschaften, die sich vorwiegend mit intensiven Grössen beschäftigen, von Bedeutung, indem sie zeigt, welche Eigenschaften der Functionen solcher Grössen von der theilweisen Unbestimmtheit derselben, die man manchmal als ein Hinderniss exacter mathematischer Schlüsse überhaupt hinstellte, völlig unberührt bleiben.

Die Ebene der unabhängigen Variablen möge die Horizontalebene sein. Jede Parallele zu derselben schneidet dann aus einer der Flächen, welche die Ordinalfunction darstellen, eine Niveaulinie aus, auf welcher gleiche Functionalwerthe liegen. Auf jeder anderen Fläche der Schaar müssen nun den Punkten der Horizontalebene, die durch die Projection jener Niveaulinie bezeichnet werden, ebenfalls gleiche Functionalwerthe entsprechen, welches auch immer deren absolute Grösse sein mag. Es haben also sämmtliche Flächen dieselben Niveaulinien und deren Projectionen fallen zusammen. Man kann sich die Flächen der Schaar dadurch aus einander hervorgegangen denken, dass die Niveaulinien vertical und parallel mit sich selber verschoben wurden und die zwischen ihnen liegenden Flächenstreifen entsprechende Dehnungen oder Zusammenziehungen erfuhren.

---

* *Vergl.* Wiener, Die Empfindungseinheit und das Messen der Empfindungs*stärke.* *Wiedemann's* Annalen. N. F. Bd. XLVII, S. 659.

Betrachten wir ein Flächenelement während einer solchen Deformation, so werden die auf einander folgenden Lagen der zugehörigen Tangentenebene sich in horizontalen Geraden schneiden und die zugehörige Normale wird in einer und derselben Verticalebene bleiben. Daraus ergiebt sich die analytische Bedingung, der alle Flächen genügen müssen.

Wir denken uns die Normale in den Coordinatenanfang verschoben. Mit der $X$-Achse bilde sie den Winkel $\alpha$, mit der $Y$-Achse den Winkel $\beta$, mit der $X$-, $Y$-Ebene den Winkel $\lambda$, und die Projection der Normalen in diese Ebene bilde mit der $Y$-Achse den Winkel $\mu$. Es ist dann:

$$\cos\alpha = \cos\lambda \sin\mu, \quad \cos\beta = \cos\lambda \cos\mu,$$

woraus:

$$\cos\alpha : \cos\beta = \operatorname{tang}\mu.$$

Da nun der Winkel $\mu$ bei allen Lagen des Flächenelementes derselbe bleibt, so hängt $\operatorname{tang}\mu$ und damit das Verhältniss der Cosinus der Winkel, welche die Flächennormale mit der $X$- und $Y$-Achse machen, nur von $x$ und $y$ ab, und wir können setzen:

$$\cos\alpha : \cos\beta = f(x, y).$$

Nun sind aber diese Winkelcosinus den Differentialquotienten der Flächenordinate $z$ nach $x$ und $y$ proportional, also auch:

$$1) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial z}{\partial x} - f(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

und dies ist somit die partielle Differentialgleichung, der alle Flächen genügen müssen.

Der Winkel $\mu$ der Projection der Normalen mit der positiven Richtung der $Y$-Achse ist zugleich der Winkel, den die Tangente an die Niveaulinie des Fusspunktes der Normalen mit der negativen Richtung der $X$-Achse bildet. Bezeichnen daher $dx$ und $dy$ die Incremente von $x$ und $y$ auf der Niveaulinie, so ist:

$$2) \qquad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang}\mu = -f(x, y) \quad \text{oder} \quad dy + f(x, y)\,dx = 0.$$

Dieser totalen Differentialgleichung, die bekanntlich auch aus 1 abgeleitet werden kann, müssen hiernach alle Niveaulinien genügen, für die natürlich ausserdem $dz = 0$ gilt.

Es sei nun $\varphi(x, y) = a$ das allgemeine Integral von 2, wo $a$ eine willkürliche Constante, also die allgemeine Gleichung der Niveaulinien, so stellt

$$3) \qquad z = F[\varphi(x, y)]$$

das allgemeine Integral von 1 dar, wo $F$ eine willkürliche Function bezeichnet. Kennen wir eine der Flächen, die 1 genügen, z. B. $z = \varphi(x, y)$, so erhalten wir also alle möglichen ihr genügenden Flächen, indem wir für $z$ eine willkürliche Function derselben Grösse setzen.

Nicht aber die Gesammtheit der durch 3) dargestellten Flächen stellt dieselbe Ordinalfunction dar, denn die Erfüllung der Differentialgleichung 1) war nur eine nothwendige aber keine hinreichende Bedingung für dieselbe. Doch, bevor wir die Gleichung 3) weiter beschränken, sei eine allgemeine Eigenschaft der durch sie dargestellten Flächen hervorgehoben. Alle haben gemeinsame Maxima, Minima, Wendepunkte u. s. w.; denn es wird

$$dz = F'[\varphi(x, y)]\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy\right),$$

unabhängig von der Wahl von $F$, null überall, wo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

sind. Ausserdem kann allerdings in besonderen Flächen noch $dz = 0$ werden, nämlich dadurch, dass

$$F'[\varphi(x, y)] = 0$$

wird, das wäre nicht in einzelnen Punkten, sondern für alle Werthe von $x$ und $y$, die auf der durch diese Gleichung bezeichneten Curve liegen. Sie stellt eine Niveaulinie dar, da sie der Gleichung 2) genügt. Geometrisch gedeutet wird auf diese zweite Art $dz$ dadurch null, dass die Fläche Einstülpungen erleidet, wobei Niveaulinien die Einstülpungsränder bilden.

Soll nun 3) eine Ordinalfunction darstellen, so muss $F$ so gewählt werden, dass keine derartige Einstülpungen entstehen. Es genügt nämlich nicht, dass alle Flächen, die eine Ordinalfunction darstellen sollen, dieselben Niveaulinien haben, diese müssen auch auf allen Flächen dieselbe Reihenfolge behalten. Das geschieht aber dann und nur dann, wenn $F$ und damit auch die Inverse von $F$ eine eindeutige, mit wachsendem Argument fortwährend steigende Function ist, deren Ableitung niemals null wird.

Ausser den Maximumeigenschaften haben die Flächen einer Schaar ferner die Eigenschaft gemein, dass sie mit einer gegebenen Fläche alle dieselben Begleit- bezw. Schneidecurven* haben und zwar ohne jede Einschränkung bezüglich der Wahl von $F$. Die für Ordinalfunctionen nöthige Beschränkung hat nur zur Folge, dass ein Begleitpunkt für eine der Flächen nothwendig ein solcher für alle ist, ein Scheidepunkt ebenso, während ohne dieselbe ein Begleitpunkt für eine Fläche der Schaar Scheidepunkt für eine andere sein konnte.

---

* Siehe Jahrgang 38 S. 315 dieser Zeitschrift.

Karlsruhe. Dr. ANDREAS VOIGT.

### II. Zur Construction eines Kegelschnittes aus fünf Punkten.

Hat man auf einem Kegelschnitt als Träger die Involution $J_1$ gleich $CC.\mathfrak{A}N_a.\mathfrak{B}N_b$ und die Involution $J_2$ gleich $\mathfrak{A}\mathfrak{B}.S_1T_1.S_2T_2\ldots$ und ist $N_aN_b$ ein Paar der Involution $J_2$, so sind auch die beiden Doppelpunkte $CC'$ von $J_1$ ein Paar von $J_2\ldots$ Die Geraden $(\mathfrak{A}N_a)$, $(\mathfrak{B}N_b)$ schneiden sich in einem Punkte $Q_1$ der Tangente $c$ in $C$, dem Involutionscentrum von $J_1$. Die Geraden $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ $(N_aN_b)$ schneiden sich in einem Punkte $Q_2$ der Polare $q_1$ von $Q_1$, dem Involutionscentrum von $J_2$. Die Gerade $q_1$ bestimmt einerseits den zweiten Doppelpunkt $C'$ von $J_1$ auf $K$, anderseits $CC'$ als ein Paar der Involution $J_2$, womit der Satz erwiesen ist, der nun offenbar auch gilt, wenn $J_1J_2$ auf einem geraden Träger liegen.

Damit wird die von mir auf Seite 382 des vorigen Jahrganges dieser Zeitschrift gegebene Construction eines Kegelschnittes aus zwei Involutionen und einem reellen Punkte $C$ wesentlich abgekürzt. Denn es ist dort nun in der Involution $\mathfrak{S}\mathfrak{T}.\mathfrak{A}\mathfrak{B}\ldots$ nur zum Punkte $C$ der entsprechende Punkt $C'$ zu construiren. Dies lässt sich z. B. so ausführen: Die Gerade $(M_cC)$ treffe $s_a$ in $U$, die Gerade $U\mathfrak{T}$ treffe $s_b$ in $V$. Die Gerade $s_c$ trifft dann die sechs Seiten des Vierecks $UL_bM_cV$ in der Involution $\mathfrak{S}\mathfrak{T}.\mathfrak{A}\mathfrak{B}.CC'$, womit $C'$ gefunden ist.

J. Thomae.

---

### III. Ueber die barometrische Höhenmessungsformel.

Die von mir im Repertorium der Physik vom Jahre 1890 S. 578 „endgiltig“ angenommene Formel

$$z_0 - z_u = 18400\, log\left(\frac{b_u}{b_0}\right)\cdot\left\{1 + \alpha t + \frac{3}{8}k + \frac{cos\,2\varphi}{400} + \frac{z_0 + z_u}{r}\right\}$$

wurde auch im „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“, Berlin 1893 Reimer, S. 1249 angeführt und darauffolgend diejenige von Jordan aus der „Meteorologischen Zeitschrift VII“ mit Hinweis auf dessen zweite Auflage seines Handbuchs der Vermessungskunde vom Jahre 1877. Letztere Formel lautet im Eingange gleich obiger, statt des fünfgliedrigen Aggregates stehen aber bei Jordan, oder wenigstens im Jahrbuch, die vier Factoren:

$$(1 + \alpha t)\left[1 + 0{,}377\left(\frac{e_1}{b_1} + \frac{e_2}{b_2}\right)\right](1 + 0{,}00265\, cos\,2\varphi)\left(1 + \frac{z_0 + z_u}{r}\right).$$

Ich will nun den Unterschied beider Ausdrücke kurz besprechen. Erstens ist die Aggregat- und Productenform kein wesentlicher Unterschied; erstere beruht nur auf der Annahme, dass die Correctur wegen Temperatur, Feuchtigkeit, geographischer Breite und mittlerer Höhenlage gegen die Einheit klein sei.

Der Unterschied wegen $\varphi$ ist nicht bedeutend, da $\frac{1}{400} = 0{,}00250$ ist. F. Neumann hat in seiner „Theoretischen Physik“ $\frac{1}{384{,}2} = 0{,}00260$. Ich habe also statt 384 oder einer noch etwas kleineren Zahl (um 0,00265 zu bilden)

geschrieben 400 in meiner genannten Abhandlung und der ihr unmittelbar voranstehenden („Ueber die Constante des Gasgesetzes") und damit auch für das Gedächtniss die Variation von 5 Millimetern bezüglich 9,78 und 9,83 am Aequator und Pole zu Grunde gelegt; $\frac{5}{980} = 0{,}00510$, dessen Hälfte 0,00255; $\frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$, Hälfte $\frac{1}{400}$.

Aber bezüglich des Einflusses der Feuchtigkeit liegt mindestens im Jahrbuch ein Versehen vor, da $\frac{3}{8}k$ bedeutet $\frac{3}{8}\frac{e}{b}$, oder, wenn die Spannkraft des Wasserdampfes an der unteren und oberen Station mit dem bezüglichen $b$ merklich verschiedene Quotienten liefert, $\frac{3}{16}\left(\frac{e_1}{b_1}+\frac{e_2}{b_2}\right)$. So habe ich auch im Zahlenbeispiel S. 576 gerechnet; ich hätte besser das Letztere auch in der Formel geschrieben. Nun ist aber $\frac{3}{16}$ nicht ganz 0,2, genauer 0,19 oder 0,188; bei Jordan, bezw. im Jahrbuch, steht aber statt dessen das Doppelte. Die Begründung des $\frac{3}{8}$, welches die Ergänzung zu 1 von $\frac{5}{8}$, der annähernden Dichte des Wasesrdampfes gegenüber der Luft, ist, habe ich S. 575 gegeben. Den hiermit ersichtlichen Fehler der zweit angegebenen Formel wollte ich hauptsächlich hiermit berichtigen.

Augsburg. Prof. Kurz.

---

### IV. Bemerkungen zu dem Artikel „Ein stereometrisches Analogon zum Pythagoreischen Satz", Bd. 38 S. 383.

1. Der von Herrn Dr. Beau mitgetheilte Satz ist längst bekannt und findet sich u. A. im zweiten Theile von Grunert's „Lehrbuch der Mathematik für die oberen Classen höherer Lehranstalten", dessen erste Auflage 1832 erschienen ist.

Bautzen. Prof. Dr. Kloss, Conr. d. Gymn.

2. Der pythagoräische Satz ist längst auf Polygone und Polyeder ausgedehnt worden. Bei Einführung der Innenwinkel lautet er für das Tetraeder:

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB\cos(a,\ b) - 2AC\cos(a,\ c) - 2BC\cos(b,\ c),$$

wozu noch gestellt werden kann:

$$D = A\cos(a,\ d) + B\cos(b,\ d) + C\cos(c,\ d).$$

Aachen. Pützer, Dir. d. Oberrealschule.

V.

# Die Auflösung der Gleichungen mittelst der Normalform.*

Von

Dr. Gottl. Friedr. Lipps
in Strassburg (Elsass).

---

## I. Die Begleiterin der Normalform.

§ 1. Gegeben sei eine Normalform mit den $\nu$ wesentlichen Einheitswurzeln $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2}\ldots\varepsilon_{n_\nu}$, so dass:

$$1)\qquad x_{\lambda_1\ldots\lambda_\nu}=\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}\varepsilon_{n_1}^{\alpha_1\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{\alpha_\nu\lambda_\nu}a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}$$

$$(\alpha_k=0,1\ldots n_k-1;\;\;\lambda_k=1,2\ldots n_k;\;\;k=1,2\ldots\nu).$$

Die $a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}$ sind nach den etwa vorhandenen unwesentlichen Einheitswurzeln entwickelt zu denken. Sie gestatten die linearen Substitutionen

$$2)\qquad \left(\alpha_k;\;i_{k1}\frac{n_k}{n_{1k}}\alpha_1+i_{k2}\frac{n_k}{n_{2k}}\alpha_2+\cdots i_{k\nu}\frac{n_k}{n_{\nu k}}\alpha_\nu\right)$$
$$(k=1,\;2\ldots\nu)$$

und keine anderen, da die linearen und homogenen Gleichungen zwischen den $a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}$, welche die Existenz anderweitiger Substitutionen begründen, nicht erfüllt sein sollen.

Ich eliminire nun aus der Normalform die Einheitswurzeln $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2}\ldots\varepsilon_{n_\nu}$, indem ich aus

$$x_{11\ldots1}=\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}\varepsilon_{n_1}^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{\alpha_\nu}a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}$$

die $n_1.n_2\ldots n_\nu$ Gleichungen ableite:

$$3)\quad\begin{cases} -\varepsilon_{n_1}^{\beta_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{\beta_\nu}.x_{11\ldots1}+\sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}\varepsilon_{n_1}^{\alpha_1+\beta_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{\alpha_\nu+\beta_\nu}.a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}=0;\\ \text{oder:}\\ -\varepsilon_{n_1}^{\beta_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{\beta_\nu}.x_{11\ldots1}+\sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}\varepsilon_{n_1}^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{\alpha_\nu}a_{\alpha_1-\beta_1\ldots\alpha_\nu-\beta_\nu}=0;\end{cases}$$

$$(\beta_k=0,\;1\ldots n_k-1;\;\;k=1,\;2\ldots\nu),$$

wo negative Indiceswerthe $\alpha_k-\beta_k$ durch $n_k+\alpha_k-\beta_k$ zu ersetzen sind.

---

* Dieser Artikel steht in unmittelbarem Zusammenhange mit den Untersuchungen über „die Normalform des allgemeinen Wurzelausdrucks und ihre Eigenschaften" im 38. Jahrg. 6. Heft und im 39. Jahrg 1. Heft. Sie sollen, wo es nöthig ist, als „Normalform" citirt werden.

Als Eliminationsresultat erhält man eine der Null gleichgesetzte Determinante, deren Verticalreihen aus den Elementen

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}, \quad a_{\alpha_1 - 1 \ldots \alpha_\nu - 1} \ldots a_{\alpha_1 - n_1 + 1 \ldots \alpha_\nu - n_\nu + 1}; \quad (\alpha_k = 0, 1 \ldots n_k - 1)$$

bestehen; nur zu dem Elemente $a_{00\ldots 0}$ tritt noch $-x_{11\ldots 1}$. Insbesondere können die Reihen der Determinante so geordnet werden, dass das Element $-x_{11\ldots 1} + a_{00\ldots 0}$ eine Diagonalreihe ausfüllt.

Es ist klar, dass die nämliche Determinante für alle Functionen $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu}$ die von den Einheitswurzeln $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}$ unabhängige Beziehung zwischen jenen Functionen und den $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ zum Ausdruck bringt, so dass an Stelle von $x_{11\ldots 1}$ die allgemeine Function $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu}$ gesetzt werden kann.

Führt man nun $x$ als Collectivbezeichnung für die $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Functionen $-x_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu}$ ein, so erhält man dadurch eine Gleichung vom Grade $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$. Die von der Null getrennte Determinante ist folglich eine Function desselben Grades bezüglich $x$. Sie kann in folgender Form angedeutet werden:

$$4) \quad \begin{vmatrix} x + a_{00\ldots 0} & \cdots & a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} & \cdots & a_{n_1 - 1 \ldots n_\nu - 1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{-\alpha_1 \ldots -\alpha_\nu} & \cdots & x + a_{00\ldots 0} & \cdots & a_{n_1 - \alpha_1 - 1 \ldots n_\nu - \alpha_\nu - 1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{-n_1+1 \ldots -n_\nu+1} & \cdots & a_{\alpha_1 - n_1 + 1 \ldots \alpha_\nu - n_\nu + 1} & \cdots & x + a_{00\ldots 0} \end{vmatrix}$$

wo der negative Index $-\alpha_i$ durch $n_i - \alpha_i$ ersetzt werden muss.

Diese Function soll die **Begleiterin der Normalform** genannt werden.

§ 2. Die Begleiterin der Normalform ist somit eine Specialisirung der allgemeineren Function:

$$5) \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} x & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & x \ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots x \end{vmatrix}.$$

Es bleibt nun $\Delta_x$ ungeändert, wenn die Elemente der $i^{\text{ten}}$ Verticalreihe mit der Constanten $c_i$ multiplicirt und die Elemente der $i^{\text{ten}}$ Horizontalreihe durch dieselbe Constante dividirt werden (für $i = 1, 2 \ldots n$). Es darf ferner die $i^{\text{te}}$ Verticalreihe mit der $k^{\text{ten}}$ und die $i^{\text{te}}$ Horizontalreihe mit der $k^{\text{ten}}$ in vertauschbarer Aufeinanderfolge permutirt werden (für $i = 1, 2 \ldots n$; $k = 1, 2 \ldots n$).

*Die Coefficienten der nach Potenzen von $x$ entwickelten Function $\Delta_x$ sind somit ganze, homogene* Functionen von solcher Beschaffenheit, dass sie un-

geändert bleiben, wenn jedes $a_{ik}$ mit $c_k/c_i$ multiplicirt wird, und wenn alle $a_{\alpha i}$ mit den $a_{\alpha k}$ und dann alle $a_{i\alpha}$ mit den $a_{k\alpha}$, oder umgekehrt alle $a_{i\alpha}$ mit den $a_{k\alpha}$ und dann alle $a_{\alpha i}$ mit den $a_{\alpha k}$ $(\alpha = 1, 2 \ldots n)$ vertauscht werden.

Dieselben Bemerkungen in modificirter Form gelten auch für die Begleiterin. Aus ihnen leite ich die Eigenschaften der Begleiterin ab.

Ich bestimme zunächst die multiplicirenden Factoren für die Elemente $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ der Art, dass die Verticalreihe, deren erstes Element $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ ist, mit $c_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ multiplicirt und die Horizontalreihe, deren erstes Element $a_{-\alpha_1 \ldots -\alpha_\nu}$ ist, durch denselben Coefficienten dividirt erscheint. Damit nun aber ein und dasselbe Element, in welcher Horizontal- oder Verticalreihe es stehen mag, mit einem und demselben Coefficienten multiplicirt und dividirt erscheine, muss für alle Indices $\alpha$ und $\beta$

$$c_{\alpha_1-\beta_1 \ldots \alpha_\nu-\beta_\nu} = c_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} : c_{\beta_1 \ldots \beta_\nu}$$

sein. Es ist dies der Fall, wenn

$$c_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} = \varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu \alpha_\nu} \quad (\lambda_i = 1, 2 \ldots n_i;\ i = 1, 2 \ldots \nu)$$

gesetzt wird.

Daraus folgt, dass die Begleiterin sich nicht ändert, wenn jedes Element $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ mit $\varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu \alpha_\nu}$ multiplicirt wird.

Führt man diese Multiplication thatsächlich aus und addirt man sodann zur ersten Verticalreihe die Summe der übrigen Verticalreihen in 4), so sind die Elemente dieser Reihe alle gleich

$$x + \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu \alpha_\nu} . a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu},$$

also gleich

$$x + x_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu}$$

und man erhält den Satz:

Die Begleiterin kann in das Product

$$\prod_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu} (x + x_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu}) \tag{6}$$

zerlegt werden, so dass die Wurzeln der gleich Null gesetzten Begleiterin die Functionen der Normalform mit negativem Vorzeichen sind.

Entwickelt man ferner die Begleiterin 4) nach Potenzen von $(x + a_{00 \ldots 0})$, so sind die Coefficienten dieser Potenzen homogene, ganze Functionen der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ von solcher Art, dass sie ungeändert bleiben, wenn jedes $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ mit $\varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu \alpha_\nu}$ multiplicirt wird. Daraus ergiebt sich folgende Kenntniss von der Natur jener Coefficienten:

Die als Coefficienten der Potenzen von $(x + a_{00 \ldots 0})$ auftretenden homogenen, ganzen Functionen der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ sind Summen von Producten der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ von der Art, dass für jedes Product

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \cdot a_{\alpha'_1 \ldots \alpha'_\nu} \cdots a_{\alpha''_1 \ldots \alpha''_\nu}$$

die Congruenzen:

$$\alpha_i + \alpha'_i + \ldots \alpha''_i \equiv 0 \ (mod\, n_i)$$

$$(i = 1, 2 \ldots \nu)$$

erfüllt sind.

Wird nun gemäss der in „Normalform" I. 27) gewonnenen Formel (38. Jahrg. S. 331) in diesen Coefficienten

$$7) \qquad n_1 \cdot n_2 \ldots n_\nu \cdot a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} = \sum_{\mu_1 \ldots \mu_\nu} \varepsilon_{n_1}^{-\mu_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{-\mu_\nu \alpha_\nu} \cdot x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$$

gesetzt, so werden sie zu Functionen der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$. Es entspricht aber der Multiplication der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ mit $\varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu \alpha_\nu}$ die Vertauschung aller $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ mit $x_{\mu_1 + \lambda_1 \ldots \mu_\nu + \lambda_\nu}$, denn es ist:

$$7a) \ n_1 \cdot n_2 \ldots n_\nu \cdot \varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu \alpha_\nu} \cdot a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} = \sum_{\mu_1 \ldots \mu_\nu} \varepsilon_{n_1}^{-\mu_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{-\mu_\nu \alpha_\nu} \cdot x_{\mu_1 + \lambda_1 \ldots \mu_\nu + \lambda_\nu}.$$

Es gilt daher der Satz:

Die als Functionen der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ dargestellten Coefficienten der nach Potenzen von $(x + a_{00 \ldots 0})$ entwickelten Begleiterin gestatten die $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Substitutionen:

$$8) \qquad (\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_\nu;\ \ \mu_1 + \lambda_1, \mu_2 + \lambda_2 \ldots \mu_\nu + \lambda_\nu),$$

$$\lambda_i = 1, 2 \ldots n_i.$$

§ 3. Diese drei Sätze sind Folgerungen aus der an erster Stelle genannten Eigenschaft der Function $\Delta_x$, ungeändert zu bleiben, wenn alle $a_{ik}$ mit $c_k/c_i$ multiplicirt werden. Aus der an zweiter Stelle angegebenen Vertauschbarkeit der $a_{ik}$ folgen entsprechend modificirte Substitutionen der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$. Um ihre Form und ihre Anzahl festzustellen, brauchen der Kenntniss der für $\Delta_x$ geltenden Substitutionen lediglich die Bedingungen hinzugefügt zu werden, durch welche die $a_{ik}$ zu den $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ werden.

Indessen weise ich blos darauf hin, dass dadurch eine Methode gegeben ist, nach welcher die Substitutionen der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$, welche die Begleiterin gestattet, gefunden werden können. Die Kenntniss der Substitutionen gewinne ich direct durch folgende Bemerkung:

Da die Begleiterin nichts Anderes ist, als das Product 6), nämlich:

$$9) \qquad \prod_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu} \left( x + \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu \alpha_\nu} \cdot a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \right)$$

und — nach dem Fundamentalsatze der Algebra — jede Function $n^{\text{ten}}$ Grades nur auf eine Weise in ein Product von $n$ linearen Factoren zerlegt werden kann, so muss jede Vertauschung der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$, welche die Begleiterin ungeändert lässt, auch das System der linearen Factoren 9), das heisst das System der Functionen der Normalform, ungeändert lassen *und jede von diesem* Functionensysteme gestattete Vertauschung muss auch *von der Begleiterin* gestattet werden.

Daraus folgt unmittelbar:

Die Begleiterin und insbesondere die Coefficienten der nach Potenzen von $(x + a_{00\ldots 0})$ entwickelten Begleiterin gestatten dieselben Substitutionen der $a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}$, welche das System der Functionen der Normalform gestattet, und keine anderen.

Hinzugefügt kann werden, dass zwar einzelne jener Coefficienten der Potenzen von $(x + a_{00\ldots 0})$ mehr Substitutionen gestatten können; dass es aber mindestens **einen** geben muss, der nur die Substitutionen der Normalform gestattet. Ein solcher ist das von $(x + a_{00\ldots 0})$ freie Glied der Begleiterin.

Werden nun wieder mittelst der Formel

$$10)\qquad n_1 \ldots n_\nu \,.\, a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu} = \sum_{\mu_1\ldots\mu_\nu} \varepsilon_{n_1}^{-\mu_1\alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{-\mu_\nu\alpha_\nu} \,.\, x_{\mu_1\ldots\mu_\nu}$$

die $a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}$ in den Coefficienten der Begleiterin durch die $x_{\mu_1\ldots\mu_\nu}$ dargestellt, so ergiebt sich, dass der Vertauschung der Grössen $a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}$ mit den Grössen $a_{i_{11}\alpha_1+\ldots i_{1\nu}\frac{n_1}{n_{1\nu}}\alpha_\nu;\ldots i_{\nu 1}\frac{n_\nu}{n_{1\nu}}\alpha_1+\ldots i_{\nu\nu}\alpha_\nu}$ als gleichwerthig die Vertauschung der Grössen $x_{\mu_1 i_{11}+\ldots\mu_\nu i_{\nu 1}\frac{n_1}{n_{1\nu}};\ldots\mu_1 i_{1\nu}\frac{n_\nu}{n_{1\nu}}+\ldots\mu_\nu i_{\nu\nu}}$ mit den Grössen $x_{\mu_1\ldots\mu_\nu}$ zur Seite steht. Es folgt dies daraus, dass zufolge der Gleichung

$$\varepsilon_{n_\lambda}^{\frac{n_\lambda}{n_{\lambda k}}} = \varepsilon_{n_k}^{\frac{n_k}{n_{\lambda k}}}$$

die Relation 10) in der Form

$$10\text{a})\quad \begin{cases} n_1 \ldots n_\nu \,.\, a_{i_{11}\alpha_1+\ldots i_{1\nu}\frac{n_1}{n_{1\nu}}\alpha_\nu;\ldots i_{\nu 1}\frac{n_\nu}{n_{1\nu}}\alpha_1+\ldots i_{\nu\nu}\alpha_\nu} \\ = \sum\limits_{\mu_1\ldots\mu_\nu} \varepsilon_{n_1}^{-\alpha_1\left(\mu_1 i_{11}+\ldots\mu_\nu i_{\nu 1}\frac{n_1}{n_{1\nu}}\right)} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{-\alpha_\nu\left(\mu_1 i_{1\nu}\frac{n_\nu}{n_{1\nu}}+\ldots\mu_\nu i_{\nu\nu}\right)} \,.\, x_{\mu_1\ldots\mu_\nu} \end{cases}$$

geschrieben werden kann, wenn dortselbst $\alpha_k$ durch $i_{k1}\frac{n_k}{n_{1k}}\alpha_1 + \ldots i_{k\nu}\frac{n_k}{n_{k\nu}}\alpha_\nu$ ersetzt wird. Dieselbe Relation 10) kann aber auch in die Form

$$10\text{b})\quad \begin{cases} n_1 \ldots n_\nu \,.\, a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu} = \sum\limits_{\mu_1\ldots\mu_\nu} \varepsilon_{n_1}^{-\alpha_1\left(\mu_1 i_{11}+\ldots\mu_\nu i_{\nu 1}\frac{n_1}{n_{1\nu}}\right)} \\ \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{-\alpha_\nu\left(\mu_1 i_{1\nu}\frac{n_\nu}{n_{1\nu}}+\ldots\mu_\nu i_{\nu\nu}\right)} \,.\, x_{\mu_1 i_{11}+\ldots\mu_\nu i_{\nu 1}\frac{n_1}{n_{1\nu}};\ldots\mu_1 i_{1\nu}\frac{n_\nu}{n_{1\nu}}+\ldots\mu_\nu i_{\nu\nu}} \end{cases}$$

gebracht werden, da der Eigenschaft der $i_{\lambda k}$ zufolge die $\nu$ Summen $\mu_1 i_{1k}\frac{n_k}{n_{1k}} + \mu_2 i_{2k}\frac{n_k}{n_{2k}} + \ldots \mu_\nu i_{\nu k}\frac{n_k}{n_{\nu k}}$ $(k = 1, 2 \ldots \nu)$ zugleich mit den $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_\nu$ die $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Restensysteme bezüglich der Modulen $n_1, n_2 \ldots n_\nu$ darstellen.

Aus der Vergleichung der Formeln 10a) und 10b) folgt aber die obige Behauptung, dass der Vertauschung der $a$ die genannte Vertauschung der $x$ zur Seite steht.

**Man erhält daher mit Rücksicht auf die bereits festgestellten Substitutionen der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$:**

$$(\mu_1, \ldots \mu_\nu;\quad \mu_1 + \lambda_1, \ldots \mu_\nu + \lambda_\nu)$$

den Satz:

Werden die Coefficienten der nach Potenzen von $(x + a_{00\ldots 0})$ entwickelten Begleiterin als Functionen der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ dargestellt, so gestatten diese Functionen folgende Substitutionen der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$:

$$11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Big(\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_\nu;\ \mu_1 i_{11} + \ldots \mu_\nu i_{\nu 1} \frac{n_1}{n_{1\nu}} + \lambda_1,\ \mu_1 i_{12} \frac{n_2}{n_{12}} + \ldots \mu_\nu i_{\nu 2} \frac{n_2}{n_{2\nu}} + \lambda_2, \\ &\qquad\qquad \ldots \mu_1 i_{1\nu} \frac{n_\nu}{n_{1\nu}} + \mu_2 i_{2\nu} + \mu_\nu i_{\nu\nu} + \lambda_\nu\Big), \end{aligned} \right.$$

wo die $i_{\lambda x}$ die in „Normalform" III.5) (S. 2 d. Jahrg.) angegebenen Bedingungen erfüllen müssen, und wo die $\lambda_\alpha$ die Werthe 1, $2 \ldots n_\alpha (\alpha = 1, 2 \ldots \nu)$ annehmen können. Die Anzahl der Substitutionen ist daher gleich dem Producte der Anzahl der Substitutionen: $(\mu_1, \ldots \mu_\nu;\ \mu_1 + \lambda_1, \ldots \mu_\nu + \lambda_\nu)$ und der Anzahl der Substitutionen:

$$\Big(\mu_1, \ldots \mu_\nu;\ \mu_1 i_{11} + \ldots \mu_\nu i_{\nu 1} \frac{n_1}{n_{1\nu}}, \ldots \mu_\nu i_{1\nu} \frac{n_\nu}{n_{1\nu}} + \ldots \mu_\nu i_{\nu\nu}\Big),$$

die mit der in „Normalform" III. 13) angedeuteten Zahl übereinstimmt. Man erhält daher die Gesammtzahl, wenn diese letztere Zahl mit $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ multiplicirt wird.

**§ 4.** Aus den bis jetzt aufgestellten Sätzen über die Begleiterin der Normalform lassen sich einestheils für die $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$, anderntheils für die $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ Bedingungen angeben, die sich als einfache Folgen der Existenz der Normalform präsentiren.

Da nämlich die Wurzeln der gleich Null gesetzten Begleiterin die $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Functionen $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ sind, so folgt, dass die als Functionen der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ dargestellten Coefficienten der Begleiterin symmetrischen Verbindungen der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ gleich zu setzen sind. Während also diese Coefficienten im Allgemeinen ihre Form ändern bei jeder Substitution der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$, die nicht der Gruppe 11) angehört, ändern sie bei keiner der $(n_1 . n_2 \ldots n_\nu)!$ Substitutionen ihren Werth. Daraus ergeben sich Bedingungsgleichungen zwischen den $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$, wofern nicht die als Functionen der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ dargestellten Coefficienten der Begleiterin, da sie blos bis zum Grade $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ ansteigen, schon ihrer Form nach symmetrische Verbindungen der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ sind; dies ist der Fall, wenn $n_1 . n_2 \ldots = 2$, 3 oder 4 ist.

In gleicher Weise sind die als Functionen der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ dargestellten *Coefficienten* der Begleiterin den symmetrischen Verbindungen der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ *gleich zu setzen*, so dass die $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ in Abhängigkeit von diesen sym-

metrischen Verbindungen stehen. Da nun diese Abhängigkeit dieselbe ist für alle $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$, die kraft der Substitutionen

$$11a) \qquad \left(\alpha_k;\ i_{k1} \frac{n_k}{n_{1k}} \alpha_1 + i_{k2} \frac{n_k}{n_{2k}} \alpha_2 + \cdots i_{k\nu} \frac{n_k}{n_{\nu k}} \alpha_\nu\right)$$

ihren Platz mit einander vertauschen, so muss sie eine entsprechend vieldeutige Abhängigkeit sein. Diese vieldeutigen Abhängigkeiten können nur die unwesentlichen Einheitswurzeln vermitteln. Es wird somit das Wesen und die Bedeutung der unwesentlichen Einheitswurzeln in soweit erhellt, als der Satz gilt:

Alle $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$, die in Folge der Substitutionen 11a) ihre Stellen mit einander wechseln, können mittelst einer und derselben Gruppe von unwesentlichen Einheitswurzeln der Normalform dargestellt werden.

Es bestätigt sich an dieser Stelle die schon früher* gemachte Bemerkung, dass die Grade der unwesentlichen Einheitswurzeln Divisoren der die Anzahl der Substitutionen der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ bestimmenden Zahl sein können; zugleich muss aber daran erinnert werden, dass nichts darüber bekannt ist, ob nicht ausser den genannten auch noch andere unwesentliche Einheitswurzeln vorhanden sind.

Von besonderem Interesse ist nun noch die Frage, welche Besonderheiten eintreten, wenn die Normalform keine unwesentlichen Einheitswurzeln aufweist. Die Begleiterin selbst und ihre Eigenschaften bleiben selbstverständlich bestehen, da ja das Vorhandensein unwesentlicher Einheitswurzeln bei den diesbezüglichen Darlegungen keine Rolle spielte. Es tritt aber zu den bereits gefundenen Eigenschaften der Normalform noch folgende.

Da die $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ nicht als Entwickelungen nach unwesentlichen Einheitswurzeln aufgefasst werden dürfen, so sind sie gemäss der Herstellung der Normalform eindeutig bestimmbare Potenzreihen der ursprünglichen Variablen des Wurzelausdrucks und gewisser Hilfsgrössen. Diese Herleitung lehrt aber zugleich, dass an Stelle der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ mit demselben Rechte die $\varepsilon_{n_1}^{k_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{k_\nu \alpha_\nu} . a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ treten können. Stellt nun $m$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $n_1, n_2 \ldots n_\nu$ dar, so ist klar, dass $a^m_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ unbeeinflusst ist von den als Coefficienten zu $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ etwa hinzutretenden Producten der Einheitswurzeln. Es muss daher auch gemäss den Relationen 7) zwischen den $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ und den $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$:

$$12) \qquad \left(\sum_{\mu_1}^{1} \cdots \sum_{\mu_\nu}^{1} \varepsilon_{n_1}^{-\mu_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{-\mu_\nu \alpha_\nu} . x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}\right)^m$$

völlig eindeutig sein. Die Functionen $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ der Normalform unterliegen daher in diesem Falle der Bedingung, dass die

* „Normalform" III. § 5; S. 10 d. Jahrg.

sogenannten cyklischen Functionen* der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ eindeutiger Natur sein müssen.

## II. Die Auflösung der Gleichungen mittelst der Normalform.

§ 1. Die durch Galois begründete Theorie der Auflösung der Gleichungen beruht im Wesentlichen auf dem Begriffe der Resolvente der aufzulösenden Gleichung, auf dem Begriffe der Gruppe von Substitutionen, welche durch die Resolvente an die Hand gegeben wird und den Charakter der vorgelegten Gleichung bestimmt und auf dem Begriffe der adjungirten Grössen, die irrationale Grössen darstellen und als bekannt betrachtet werden, so dass durch sie die Zerlegung der vorher irreduciblen Resolvente möglich wird. Wird aber die Resolvente reducirt, so wird auch die Gruppe der Gleichung erniedrigt.

Man gelangt so zu einer Angabe der Bedingung der Auflösbarkeit der Gleichungen, die in der „Theorie der algebraischen Gleichungen" von Petersen folgendermassen formulirt wird:**

„Die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass eine Gleichung algebraisch aufgelöst werden könne, besteht darin, dass ihre Gruppe eine andere Gruppe enthält, diese wieder eine andere u. s. w., bis man zur Gruppe 1 gelangt, und zwar muss diese Reihe von Gruppen so beschaffen sein, dass jede von ihnen mit allen Substitutionen der vorhergehenden permutabel ist, und dass ihre Ordnung aus der Ordnung der vorhergehenden durch Division mit einer Primzahl gefunden wird."

Dadurch wird die Richtung angegeben, in der man auf Grund der Galois'schen Begriffe vorgehen muss, um zu einer thatsächlichen Angabe der Auflösbarkeitsbedingungen von Gleichungen zu gelangen.

Galois*** selbst hat seine Theorie auf die irreduciblen Gleichungen vom Primzahlgrade angewendet und als wesentliche Resultate gefunden, dass die Gruppe dieser Gleichungen die $p(p-1)$ Substitutionen $(z;\ az+b)$ enthält, wenn die Wurzeln durch $x_z$ bezeichnet werden, oder dass alle Wurzeln einer solchen Gleichung durch irgend zwei derselben rational dargestellt werden können.

Ferner hat insbesondere Jordan den von Galois eingeschlagenen Weg in seinem Traité des substitutions et des équations algébriques weiter verfolgt und von Sylow wurden detaillirte Auflösbarkeitsbedingungen im 5. Bande der mathematischen Annalen entwickelt†.

---

* Die Functionen 12) nenne ich cyklische Functionen in Uebereinstimmung mit der Bezeichnungsweise Kronecker's. Vergl. die Fussnote zu S. 567 im II. Bd. von Serret's Algebra; übersetzt von Wertheim.

** Petersen, Theorie der algebraischen Gleichungen S. 315; Kopenhagen 1878.

*** *Journal des mathématiques pures et appliquées* t. XI, année 1846.

† *Vergl. die* Darstellung dieser Resultate in Netto's Substitut.-Theorie S. 274 flg.

Betreffs der Galois'schen Resultate über die Gleichungen vom Primzahlgrade sagt nun aber Kronecker in einer der Berliner Akademie der Wissenschaften am 20. Juni 1853 vorgelegten Arbeit:*

„Die bisherigen Untersuchungen über die Auflösbarkeit von Gleichungen, deren Grad eine Primzahl ist — namentlich die Abel'schen und Galois-schen, welche die Grundlage aller weiteren Forschungen in diesem Gebiete bilden — haben im Wesentlichen als Resultat zwei Kriterien ergeben, vermittelst deren man beurtheilen konnte, ob eine gegebene Gleichung auflösbar sei oder nicht. Indessen gaben diese Kriterien über die Natur der auflösbaren Gleichungen selbst eigentlich nicht das geringste Licht."

Dasselbe kann mit demselben Rechte auch von den weiterhin gefundenen, auf die Begriffe der Substitutionentheorie allein gegründeten Kriterien der Auflösbarkeit von Gleichungen gesagt werden.

Dem gegenüber betont Kronecker in derselben Arbeit als Hauptproblem, das alle anderen Probleme in sich schliesst, das Aufsuchen aller auflösbaren Gleichungen, wie es bereits von Abel in allerdings unvollständiger Fassung in der fragmentarischen Abhandlung über die algebraische Auflösung der Gleichungen aufgestellt wird.

Dieses Hauptproblem in vollständiger und präciser Fassung lautet in der citirten Abhandlung:

„Für eine gegebene Zahl $n$ die allgemeinste algebraische Function von $A$, $B$, $C$ u. s. w. zu finden, welche durch die Variirung der darin enthaltenen Wurzelzeichen verschiedene Ausdrücke ergiebt, unter denen $n$ so beschaffen sind, dass ihre symmetrischen Functionen sämmtlich rationale Functionen jener Grössen $A$, $B$, $C$ u. s. w. sind."

§ 2. Wenn nun hier versucht wird darzulegen, wie mittelst der Normalform des allgemeinen Wurzelausdrucks die Bedingung der Auflösbarkeit der Gleichungen und ihre Auflösung selbst zu finden sei, so wird der soeben angeführten Forderung Kronecker's Rechnung getragen, da es der allgemeine Wurzelausdruck ist, der, in seine Normalform gebracht, der Untersuchung zu Grunde gelegt wird. Indem aber die Wurzelgrössen nicht als arithmetische Grössen, sondern als Functionen variabler Argumente betrachtet werden, ergeben sich Modificationen in der Stellung und Behandlung des Problems, die nicht willkürlich hineingetragen werden, sondern aus der Natur der durch die Normalform geschaffenen Grundlage fliessen.

Da die Wurzelgrösse $\sqrt[n]{a}$ als Function der beliebig variablen Zahl $a$ aufgefasst wird, ist es ohne Bedeutung, wenn die Wurzelgrösse für individuelle Werthe von $a$ rational wird. Das Wesen der Wurzelgrösse besteht

* Abgedruckt in Serret's Handbuch der Algebra, deutsch von Wertheim, Bd. II S. 565 flg.

vielmehr darin, dass sie $n$ völlig gleichberechtigte Functionen von $a$ definirt, die in einheitlicher Form durch

$$\varepsilon_n^\lambda \, . \, P(a) \quad (\lambda = 1, 2 \ldots n),$$

wo $\varepsilon_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \, . \, \sin \frac{2\pi}{n}$, dargestellt werden können. In entsprechender Weise ist es ohne Interesse, ob der in die Normalform gebrachte allgemeine Wurzelausdruck für individuelle Werthensysteme der unabhängigen Variablen ganz oder theilweise rational werden kann. Vielmehr besteht das Wesen der Normalform darin, dass sie eine Anzahl von gleichberechtigten Functionen in einer blos durch die Einheitswurzeln vermittelten Vieldeutigkeit zu einer einheitlichen Darstellung bringt.

Es hat somit im vorliegenden Falle keinen Sinn, von einem Rationalitätsbereich zu reden, dem die durch den Wurzelausdruck dargestellten Zahlenwerthe angehören. Sind ja doch die Argumente der durch die Wurzelgrössen definirten Functionen selbst schon beliebige rationale oder irrationale, reelle oder complexe Zahlen. Der Begriff des Rationalitätsbereichs, wie Kronecker ihn aufstellt, kann daher hier keine Verwendung finden.

Indem die Wurzelgrösse als Function variabler Argumente betrachtet wird, ergiebt sich für die aufzulösende Gleichung, dass auch ihre Coefficienten als Functionen beliebiger variabler Zahlen aufzufassen sind; ein specieller Fall ist es, wenn die Coefficienten selbst die unabhängigen Variablen sind. Es ist folglich ohne Bedeutung, welche Zahlenwerthe durch die Coefficienten für ein specielles Werthensystem der unabhängigen Variablen dargestellt werden. Insbesondere kann der Auflösungsprocess keinen Vortheil daraus ziehen, wenn für solche individuelle Werthensysteme der unabhängigen Veränderlichen die Gleichung zerlegbar wird.

Die Galois'sche Methode, die sich gerade auf eine derartige Zerlegbarkeit der Gleichungen und auf die Herbeiführung der Zerlegbarkeit durch Adjungiren von Irrationalitäten stützt, kann darum im vorliegenden Falle nicht befolgt werden.

Die aus der Variabilität der Coefficienten resultirende wesentliche Bedeutung der Gleichung liegt vielmehr darin, dass ihre Wurzeln Functionen derselben Argumente sind, von welchen die Coefficienten der Gleichung abhängen. Dabei ist zu beachten, dass keine der Wurzeln vor der anderen bevorzugt ist, dass im Gegentheil jede in gleicher Weise, wie jede andere, durch die Gleichung bestimmt wird. Die Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades definirt somit $n$ Functionen — ihre Wurzeln — in gleichberechtigter Weise und die Argumente dieser Functionen sind die Variablen, von welchen die *Coefficienten* der Gleichung abhängen, oder als welche in speciellen Fällen *die Coefficienten* selbst zu gelten haben.

Zerlegbar wird eine Gleichung bei dieser Auffassungsweise nur dann, wenn z. B. die Coefficienten $a, b, \ldots c$ der Gleichung $(n+m)^{\text{ten}}$ Grades

$$x^{n+m} + ax^{n+m-1} + bx^{n+m-2} + \ldots c = 0$$

derart an die Coefficienten $a_1, b_1 \ldots c_1$ und $a_2, b_2 \ldots c_2$ der Gleichungen $n^{\text{ten}}$ und $m^{\text{ten}}$ Grades

$$x^n + a_1 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots c_1 = 0; \quad x^m + a_2 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots c_2 = 0$$

geknüpft sind, dass

$$x^{n+m} + ax^{n+m-1} + \ldots c = (x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots c_1)(x^m + a_2 x^{m-1} + \ldots c_2),$$

wo $a, b, c$; $a_1, b_1, c_1$; $a_2, b_2, c_2$ Functionen der unabhängigen Variablen sind. Aber auch in diesem Falle bleibt die Aufgabe zu lösen, die $(n+m)$ Wurzeln der Gleichung $(n+m)^{\text{ten}}$ Grades in einheitlicher Weise als Functionen der unabhängigen Variablen darzustellen, als welche sie durch die Gleichung definirt werden.

Für die durch die Coefficienten der Gleichungen dargestellten Functionen gilt die eigentlich selbstverständliche Bedingung, dass sie in thatsächlich entwickelter Form vorliegen müssen, wobei es an sich gleichgiltig ist, ob sie durch eine endliche oder durch eine unendlich oft wiederholte Anzahl von Grundoperationen aus den unabhängigen Variablen hergestellt werden.

Man wird daher zu folgender Fassung des Auflösungsproblems der Gleichungen geführt:

Durch eine Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades

$$1) \qquad x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots c = 0,$$

wo $a, b, \ldots c$ entweder Functionen von beliebig variablen allgemeinen Zahlen oder selbst unabhängige Variable sein sollen, werden $n$ Functionen — die Wurzeln der Gleichung — in gleichberechtigter Weise definirt.

Es ist zu untersuchen, ob und in wie weit diese Wurzeln durch das Functionensystem der Normalform

$$2) \qquad x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu} = \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{\mu_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\mu_\nu \alpha_\nu} . a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$$

dargestellt werden können, wo $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}$ wesentliche Einheitswurzeln und die $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ nach unwesentlichen Einheitswurzeln entwickelt zu denken sind, und wo die $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ Potenzreihen darstellen, die, abgesehen von den bei ihrer Herstellung auftretenden Hilfsgrössen, von den nämlichen Argumenten abhängen, wie die *Coefficienten* der aufzulösenden Gleichung.

§ 3. Bei der Lösung dieses Problems ist die Frage nach den Auflösbarkeitsbedingungen von der Frage nach der thatsächlichen Auflösung der Gleichung 1) zu unterscheiden.

Beide Fragen finden ihre Beantwortung nicht dadurch, dass aus der Gleichung 1) die ihre Auflösung darstellende Normalform 2) herzustellen unternommen wird — denn dies könnte blos durch unsicher tastendes Probiren geschehen —, sondern vielmehr dadurch, dass aus der Normalform 2) die Gleichung 1) gewonnen wird, deren Auflösung alsdann durch die vorgelegte Normalform gegeben wird.

Ist somit eine Normalform aus einem thatsächlich gegebenen Wurzelausdrucke gewonnen, deren wesentliche und unwesentliche Einheitswurzeln bekannt sind, so muss die Begleiterin der Normalform construirt und die Coefficienten derselben müssen als Functionen der unabhängigen Variablen des Wurzelausdrucks dargestellt werden. Die so vollständig entwickelte Begleiterin stellt alsdann die durch den allgemeinen Wurzelausdruck auflösbare Gleichung dar. Ist die Normalform die denkbar allgemeinste, so resultirt auf diesem Wege die auflösbare Gleichung allgemeinster Form.

Daraus ergiebt sich, dass der Grad $n$ der aufzulösenden Gleichung blos von den wesentlichen Einheitswurzeln der Normalform abhängt, da der Grad der Begleiterin gleich dem Grade der aufgelösten Gleichung ist und also

$$3) \qquad n = n_1 \cdot n_2 \ldots n_\nu$$

sein muss; es folgt ferner, dass die Normalform der auflösbaren Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades allgemeinster Form blos wesentliche Einheitswurzeln vom Primzahlgrade enthalten darf.

Es ist daher die Normalform, die als Auflösung einer Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades vorausgesetzt werden muss, wenigstens insofern bestimmbar, als ihre wesentlichen Einheitswurzeln bekannt sind. Dadurch ist zwar für die Auflösung blos ein erster Schritt gethan, auch die Auflösbarkeitsbedingungen sind noch nicht vollständig angebbar, es lassen sich aber auf Grund der wesentlichen Einheitswurzeln nothwendige Bedingungen bestimmen.

Man erhält sie dadurch, dass die $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ der Coefficienten der Begleiterin durch ihre Ausdrücke in den $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ nach I. 7) ersetzt und die so gewonnenen Functionen der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ den entsprechenden symmetrischen Functionen der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$, welche aus den Coefficienten der aufzulösenden Gleichungen sich ergeben, gleichgesetzt werden. Es werden so thatsächliche Bedingungsgleichungen für die Wurzeln der durch die Normalform auflösbaren Gleichung gefunden und die Bedingungen selbst lassen *sich in* allgemeiner Fassung dahin bestimmen, dass Functionen dieser *Wurzeln, die ihre* Form nur für eine gewisse Gruppe von Substitutionen

nicht ändern, für alle übrigen Substitutionen aber im Allgemeinen ändern, ihren Werth für jede beliebige Substitution, denen die Wurzeln unterworfen werden können, unverändert lassen. Die Gruppe der Substitutionen aber, welche die Form jener Functionen nicht ändern, ist die in I. 11) angegebene.

Die Weiterführung des begonnenen Auflösungsprocesses und die Hinzufügung der etwa noch vorhandenen einschränkenden Auflösbarkeitsbedingungen, welche die soeben charakterisirten nothwendigen Bedingungen zu hinreichenden machen, beruht auf der Bestimmung der unwesentlichen Einheitswurzeln der Normalform, das heisst auf der Ergründung der Normalformen, durch welche die Grössen $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ darzustellen sind.

Hierzu dient die Bedingung, dass die Functionen der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$, welche als Coefficienten der Begleiterin auftreten, den zugehörigen Coefficienten der aufzulösenden Gleichung, das heisst den durch diese Coefficienten dargestellten Functionen der unabhängigen Variablen gleich zu setzen sind und somit eindeutig sein müssen. Es folgt daraus, dass alle diejenigen Grössen $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$, welche in Folge der erlaubten Substitutionen ihre Stellen wechseln können, durch eine und dieselbe Normalform darzustellen sind; ganz allgemein aber folgt, dass für jede der Grössen $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ eine Gleichung gewonnen werden kann, die nun ihrerseits durch eine Normalform aufzulösen ist, deren wesentliche Einheitswurzeln in Einklang mit den von den $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ zu erfüllenden Bedingungen zu bringen sind. Diese für die Darstellung der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ wesentlichen Einheitswurzeln sind für die ursprüngliche Normalform unwesentliche Einheitswurzeln. In Folge der Darstellung der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ durch geeignete Normalformen erwachsen aber jenen Grössen im Allgemeinen neue Bedingungen, die sich auf die Wurzeln der aufzulösenden Gleichung übertragen. Die vollständige Entwickelung der Normalform für die $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ führt schliesslich zur vollständigen Kenntniss der anfänglich dem Auflösungsprocess zu Grunde gelegten Normalform, aus der die fertige Form der auflösbaren Gleichung gewonnen werden kann, während gleichzeitig die unbehinderte Angabe der nothwendigen und hinreichenden Auflösbarkeitsbedingungen sich ermöglicht.

§ 4. Der soeben in seinen wesentlichen Momenten dargelegte Auflösungsprocess soll durch die Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades erläutert werden.

Um die Gleichung dritten Grades

$$4) \qquad (x+a)^3 - b(x+a) + c = 0$$

aufzulösen, muss eine Normalform mit der wesentlichen Einheitswurzel $\varepsilon = \cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3$ vorausgesetzt werden.

Es sei demgemäss

5) $$x_\kappa = a_1 + \varepsilon^\kappa . a_2 + \varepsilon^{2\kappa} . a_3 \quad (\kappa = 1, 2, 3),$$

wo $a_2$ und $a_3$ nach den vorläufig noch unbekannten unwesentlichen Einheitswurzeln entwickelt zu denken sind. Darans erhält man die Begleiterin:

[illegible] $$\begin{vmatrix} x + a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & x + a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & x + a_1 \end{vmatrix} \equiv (x + a_1)^3 - 3a_2 a_3 (x + a_1) + a_2^3 + a_3^3,$$

die gleich Null gesetzt die Wurzeln $-x_1, -x_2, -x_3$ hat. Soll die Gleichung 1) dieselben Wurzeln haben, so muss sein:

7) $$a_1 = a; \quad 3a_2 a_3 = p; \quad a_2^3 + a_3^3 = q.$$

Somit müssen $a_2$ und $a_3$ und ebenso $a_2^3$ und $a_3^3$ durch eine und dieselbe Normalform mit der wesentlichen Einheitswurzel zweiten Grades $\varepsilon = -1$ darstellbar sein; dieses $\varepsilon$ ist dann die einzige unwesentliche Einheitswurzel der Normalform 5). Es ist daher

8) $$a_2 = a_{21} + \varepsilon a_{22}; \quad a_3 = a_{21} + \varepsilon^2 a_{22},$$
also auch
$$a_2^3 = a_{31} + \varepsilon a_{32}; \quad a_3^3 = a_{31} + \varepsilon^2 a_{32}$$

zu setzen. Substituirt man diese Darstellungen in 7), so folgt

9) $$2a_{31} = q, \quad a_{31}^2 - a_{32}^2 = \frac{p^3}{27}$$

und es zeigt sich, dass als unabhängige Variable der Normalform 5) die Coefficienten $a, p, q$ der Gleichung 1) selbst gewählt werden können. Die vorausgesetzte Normalform muss dann folgende Gestalt haben:

10) $$x_\kappa = -a + \varepsilon^\kappa \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon^{2\kappa} \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$
$$\kappa = 1, 2, 3,$$

wo die Wurzelgrössen die symbolischen Zusammenfassungen der die Normalform zusammensetzenden Potenzreihen sind. Aus ihr folgt als völlig entwickelte Begleiterin die von der Null getrennte Gleichung 4).

Die Gleichung vierten Grades

11) $$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

muss durch eine Normalform

12) $$x_{\kappa\kappa_1} = a_0 + \varepsilon^\kappa a_1 + \eta^{\kappa_1} a_2 + \varepsilon^\kappa \eta^{\kappa_1} a_3 \quad (\kappa = 1, 2; \kappa_1 = 1, 2)$$

mit den wesentlichen Einheitswurzeln $\varepsilon$ und $\eta$ vom zweiten Grade $\varepsilon = \eta = -1$ aufgelöst werden. Als Begleiterin erhält man:

$$13)\quad \begin{vmatrix} x+a_{00} & a_{10} & a_{01} & a_{11} \\ a_{10} & x+a_{00} & a_{11} & a_{01} \\ a_{01} & a_{11} & x+a_{00} & a_{10} \\ a_{11} & a_{01} & a_{10} & x+a_{00} \end{vmatrix} \begin{aligned} &\equiv (x+a_{00})^4 - 2(a_{10}^2+a_{01}^2+a_{11}^2)(x+a_{00})^2 \\ &\quad + 8a_{10}a_{01}a_{11}(x+a_{00}) - a_{10}^4 - a_{01}^4 - a_{11}^4 \\ &\quad + 2(a_{10}^2a_{01}^2 + a_{10}^2a_{11}^2 + a_{01}^2a_{11}^2). \end{aligned}$$

Soll nun die Gleichung 11) in gleicher Weise wie die der Null gleichgesetzte Begleiterin die Wurzeln $-x_{10}$, $-x_{12}$, $-x_{21}$, $-x_{22}$ haben, so muss sein:

$$14)\quad \begin{cases} a_{00} = a; \quad 2(a_{10}^2 + a_{01}^2 + a_{11}^2) = b; \quad 8a_{10}a_{01}a_{11} = c; \\ a_{10}^4 + a_{01}^4 + a_{11}^4 - 2(a_{10}^2a_{01}^2 + a_{10}^2a_{11}^2 + a_{01}^2a_{11}^2) = d. \end{cases}$$

Daraus ergiebt sich, dass $a_{10}^2$, $a_{01}^2$, $a_{11}^2$ die Wurzeln der Gleichung dritten Grades

$$15)\quad x^3 - \frac{b}{2}x^2 + \left(\frac{b^2}{16} - \frac{d}{4}\right)x - \frac{c^2}{64} = 0$$

sein müssen. Die $a_{10}$, $a_{01}$, $a_{11}$ werden somit die Einheitswurzeln dritten und zweiten Grades aufweisen, die für die Normalform 12) die unwesentlichen Einheitswurzeln darstellen. Es können wiederum die Coefficienten $a$, $b$, $c$, $d$ als unabhängige Variable der Normalform 12) angenommen werden, die nach Auflösung der Gleichung 15) in völlig entwickelter Form angegeben werden kann.

Da die Normalformen, welche die Gleichungen dritten und vierten Grades auflösen, die Coefficienten dieser Gleichungen als unabhängige Variable besitzen können, so folgt schon daraus die bedingungslose Auflösbarkeit dieser Gleichungen. Ueberdies wird das Substituiren der Ausdrücke der $a_1$, $a_2$ resp. $a_{10}$, $a_{01}$, $a_{11}$ durch die $x_1$, $x_2$, $x_3$ resp. $x_{11}$, $x_{12}$, $x_{21}$, $x_{22}$ für die Coefficienten der Begleiterinnen 6) und 13) symmetrische Verbindungen der Wurzeln ergeben, die nach Gleichsetzen mit den entsprechenden symmetrischen Verbindungen der Wurzeln für die Coefficienten der Gleichungen 4) und 11) blose Identitäten ergeben. Es wird sich somit aus dem Fehlen jeglicher Bedingung die Auflösbarkeit der allgemeinen Gleichung ergeben.

Nach dieser Erläuterung des Auflösungsprocesses der Gleichungen durch die Normalform des allgemeinen Wurzelausdrucks bemerke ich noch, dass sich die hier benutzte Methode dem Grundgedanken nach mit einer schon von Euler* benutzten berührt, nach welcher der Auflösung der Gleichungen eine mögliche Darstellung ihrer Wurzeln zu Grunde gelegt wird, um nachträglich die vorausgesetzte Wurzeldarstellung in ihrer Abhängigkeit von den Coefficienten der aufzulösenden Gleichung zu bestimmen. Es fehlt nur bei Euler die Kenntniss von der Natur des allgemeinen Wurzelausdrucks; diesen letzteren entwickelt Abel systematisch; er be-

* Leonh. Euleri de formis radicum aequationum cuicusque ordinis conjectatio; Comment. acad. scientiarum petropolitanae T. VI pag. 216.

trachtet aber das Wurzelzeichen als Operationszeichen; die Auffassung der Wurzelgrösse als Function führte zu der im Vorhergehenden entwickelten Normalform und so zu der soeben beleuchteten Auflösungsmethode der Gleichungen.

§ 5. In gleicher Weise, wie für die Gleichungen dritten und vierten Grades eine Normalform mit bestimmten wesentlichen Einheitswurzeln vorausgesetzt wurde, um durch Gleichsetzen der Coefficienten ihrer Begleiterin mit den Coefficienten der aufzulösenden Gleichung die Kenntniss der unwesentlichen Einheitswurzeln zu gewinnen und so zur vollständigen Bestimmung der Normalform zu gelangen, kann auch für die Gleichungen fünften, sechsten Grades u. s. w. die Normalform gefunden, die Bedingung der Auflösbarkeit angegeben und die Form der auflösbaren Gleichungen entwickelt werden.

Dabei ist zu beachten, dass für jede Normalform, deren wesentliche Einheitswurzeln beliebig bestimmt wurden, die zugehörige auflösbare Gleichung gebildet und die Bedingung ihrer Auflösbarkeit angegeben werden kann; denn die wesentlichen Einheitswurzeln müssen nicht nothwendig Primzahlen sein. Das zu einer solchen vollständigen Behandlung des Auflösungsproblems nothwendige Material liegt in den Entwicklungen des zweiten und dritten Capitels der Untersuchungen über die „Normalform“ bereit.

Indessen begnüge ich mich vorerst damit, auf dieses allgemeine Problem hinzuweisen, und gebe blos diejenigen Ausführungen des Auflösungsprocesses, die ohne Weiteres bei Zugrundelegen der allgemeinsten, mit wesentlichen Einheitswurzeln vom Primzahlgrade ausgestatteten Normalform gemacht werden können.

Die zur Auflösung der Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades

$$16)\qquad (x+a)^n - b(x+a)^{n-2} + c(x+a)^{n-3} - \ldots \pm d = 0$$
$$(\text{wo } n = p^\nu . q^\mu \ldots),$$

demgemäss vorauszusetzende Normalform enthält die Functionen:

$$17)\quad x_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu \lambda'_1 \ldots \lambda'_\mu \ldots} = \sum_{\alpha,\beta\ldots} \varepsilon_{p_1}^{\lambda_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{p_\nu}^{\lambda_\nu \alpha_\nu} . \varepsilon_{q_1}^{\lambda'_1 \beta_1} \ldots \varepsilon_{q\mu}^{\lambda'_\mu \beta_\mu} \ldots . a_{\alpha \ldots \alpha_\nu \beta_1 \ldots \beta_\mu \ldots},$$

wo $p = p_1 = \cdots = p_\nu$; $q = q_1 = \cdots q_\mu$; ... und $p, q \ldots$ Primzahlen sind.

Die Coefficienten ihrer Begleiterin sind Functionen der $a_{\alpha, \beta, \ldots}$, welche den Entwicklungen des ersten Capitels zufolge die

$$\varphi(p, \nu) . \varphi(q, \mu) \ldots$$

Substitutionen

$$18)\qquad (\alpha_k,\ \beta_\lambda, \ldots;\ i_{1k}\alpha_1 + \ldots i_{\nu k}\alpha_\nu,\ i'_{1\lambda}\beta_1 + \ldots i'_{\mu\lambda}\beta_\mu, \ldots)$$

*gestatten.* Durch Gleichsetzen dieser Coefficienten mit den Coefficienten *der Gleichung 16)*, welche als bestimmte, aber vorläufig noch unbekannte

Functionen unabhängiger Variablen vorausgesetzt werden, kann man direct die Darstellung der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu \beta_1 \ldots \beta_\mu \ldots}$ und damit die vollständige Kenntniss von der Normalform 17) gewinnen.

Vereinfacht wird diese Aufgabe, wenn nicht alle Einheitswurzeln aus der Normalform eliminirt werden, um so direct die Begleiterin vom Grade $n$ zu construiren, sondern wenn beispielsweise zunächst nur die Einheitswurzeln vom Grade $p$ von der Elimination getroffen werden. Ist $m = p^\nu$, so erhält man auf diese Weise $n/m$ Begleiterinnen vom Grade $m$, deren Coefficienten die Functionen von Normalformen mit den Einheitswurzeln $\varepsilon_{q_1} \ldots \varepsilon_{q_\mu} \ldots$ darstellen. Dieser Form der Begleiterin entspricht die Zerlegung der Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades in $n/m$ Gleichungen $m^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten durch die Wurzeln einer Gleichung $n/m^{\text{ten}}$ Grades bestimmbar sind. In dieser Bemerkung erhellt der bereits von **Abel*** gefundene Satz, dass eine Gleichung, deren Grad durch zwei Primzahlen theilbar ist, in $m$ Gleichungen $i^{\text{ten}}$ Grades zerfällt werden kann, deren Coefficienten durch Auflösen einer Gleichung $m^{\text{ten}}$ Grades gefunden werden.

Werden die Normalformen, welche die Coefficienten der Begleiterin $p^{\nu\,\text{ten}}$ Grades darstellen, und welche alle dieselben Einheitswurzeln enthalten, ihrerseits wieder behandelt wie die ursprüngliche Normalform, so zeigt sich, dass die Auflösung einer Gleichung vom Grade $p^\nu \,.\, q^\mu \ldots$ zurückgeführt werden kann auf die Auflösung von Gleichungen vom Grade $p^\nu,\ q^\mu, \ldots$

Es sei demgemäss der Grad der aufzulösenden Gleichung $n = p^\nu$. An Stelle der Normalform 17) tritt nun die einfachere:

$$19)\qquad x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu} = \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \varepsilon_{p_1}^{\mu_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{p_\nu}^{\mu_\nu \alpha_\nu} \,.\, a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu},$$

wo $p = p_1 = \ldots p_\nu$.

Die Coefficienten ihrer Begleiterin:

$$20)\qquad \begin{vmatrix} x + a_{0 \ldots 0} & \ldots & a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} & \ldots & a_{p_1 - 1 \ldots p_\nu - 1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p_1 - \alpha_1 \ldots p_\nu - \alpha_\nu} & \ldots & x + a_{0 \ldots 0} & \ldots & a_{p_1 - \alpha_1 - 1 \ldots p_\nu - \alpha_\nu - 1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1 \ldots 1} & \ldots & a_{\alpha_1 + 1 \ldots \alpha_\nu + 1} & \ldots & x + a_{0 \ldots 0} \end{vmatrix}$$

gestatten die $\varphi(p,\ \nu)$ Substitutionen:

$$21)\qquad (\alpha_k;\ i_{1k}\alpha_1 + \ldots i_{\nu k}\alpha_\nu),\quad k = 1,\ 2 \ldots \nu.$$

---

* *Abel, oeuvres complètes* Bd. II. S. 191.

Ihnen zufolge kann jedes $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ an Stelle jedes anderen treten, mit Ausnahme von $a_{0 \ldots 0}$. Denn es tritt beispielsweise an Stelle von $a_{10 \ldots 0}$ die Grösse $a_{i_{11} i_{21} \ldots i_{\nu 1}}$, durch welche jede der $(p^\nu - 1)$ Grössen $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ (excl. $a_{00 \ldots 0}$) dargestellt werden kann, da die Werthe $i_{11} i_{21} \ldots i_{\nu 1}$ unbeschadet der von dem Systeme der $i_{\lambda k}$ zu erfüllenden Bedingung jedes der $(p^\nu - 1)$ Werthensysteme $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\nu$ (mit Ausschluss des aus $\nu$ Nullen bestehenden Systems) bedeuten können, die aus den Zahlen $\alpha_k = 0, 1, \ldots (p-1)$ hergestellt werden können.

Setzt man nun die Coefficienten dieser Begleiterin gleich den Coefficienten der aufzulösenden Gleichung, die durch vorläufig noch unbekannte, aber bestimmte und eindeutige Functionen dargestellt werden, so folgt der Satz:

Die $p^\nu - 1$ Grössen $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ (excl. $a_{0 \ldots 0}$) müssen durch eine und dieselbe Normalform dargestellt werden und zwar der Art, dass Verbindungen der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$, welche die Substitutionen 21) gestatten, eindeutige, bestimmte Functionen sind.

Daraus folgt zwar, dass die $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ durch eine $(p^\nu - 1)$-deutige Normalform dargestellt werden müssen. Es ist aber nicht von vornherein bekannt, wie die wesentlichen Einheitswurzeln dieser Normalform anzunehmen sind, da schon die soeben angegebene Bedingung für die $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ besteht. So oft nämlich $(p^\nu - 1)$ nicht ein Product von lauter verschiedenen Primzahlen darstellt, müssen die wesentlichen Einheitswurzeln der neuen Normalform nicht nothwendig Primzahlgrad besitzen. Es ist alsdann Sache besonderer Untersuchung, die geeignete Darstellungsform der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ aufzusuchen, so dass die bereits angegebene Bedingung von den $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ erfüllt wird und es ist zu erwarten, dass ausser dieser Bedingung noch andere aus der Darstellung der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ durch die neue Normalform sich ergeben werden.

Für den Fall, dass $n = p$ (dass also $\nu = 1$), lässt sich indessen die Darstellung der $(p-1)$ Grösse $a_\alpha$ ohne Weiteres gewinnen. Die Coefficienten der Begleiterin sind nunmehr Functionen der $a_\alpha$, welche die $(p-1)$ Substitutionen

$$22) \qquad (\alpha;\, i\alpha);\; i = 1,\, 2 \ldots p-1$$

gestatten. Die Relationen zwischen den Coefficienten der Begleiterin und der aufzulösenden Gleichung führen ferner zur Erkenntniss, dass die $p^{\text{ten}}$ Potenzen der $a_\alpha$ Wurzeln einer Gleichung $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades sein müssen und zwar der Art, dass Verbindungen der $a_\alpha$, welche die Substitutionen 22) gestatten, eindeutig sein müssen. Diese Substitutionen können nun aber als cyklische Substitutionen aufgefasst werden, wenn man eine Zahl $c$ bestimmt, für welche erst die $(p-1)^{\text{te}}$ Potenz: $c^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, alsdann $\alpha \equiv c^{\alpha'}$; $i \equiv c^{i'} \pmod p$ setzt und schliesslich die Grössen $a_\alpha$ in

die Reihe: $a_{c^1} a_{c^2}, \ldots a_{c^{p-1}}$ ordnet. Dann werden die Substitutionen 22) zu den cyklischen Substitutionen:

$$22\text{a}) \qquad (\alpha';\ \alpha' + i') \qquad i' = 1,\ 2 \ldots p - 1.$$

Die Grössen $a_\alpha^p$ müssen somit die Wurzeln einer solchen Gleichung $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades sein, dass cyklische Verbindungen ihrer in passende Reihenfolge gebrachten Wurzeln bestimmte, eindeutige Functionen darstellen.

Aus der im I. Capitel angegebenen Eigenschaft einer blos mit wesentlichen Einheitswurzeln ausgestatteten Normalform folgt nun unmittelbar, dass die Normalform der $p-1$ Grössen $a_\alpha^p$ blos **eine** wesentliche Einheitswurzel vom $(p-1)^{\text{ten}}$ Grade aufweisen darf.

Es sei dementsprechend:

$$23) \qquad a_{c^\mu}^p = \xi_\mu = b_0 + \varepsilon_{p-1}^{\mu} b_1 + \varepsilon_{p-1}^{2\mu} b_2 + \ldots \varepsilon_{p-1}^{(p-2)\mu} . b_{p-2}.$$

Daraus folgt:

$$24) \qquad [(p-1) b_\lambda]^{p-1} = \{\varepsilon_{p-1}^{-\lambda} \xi_1 + \varepsilon_{p-1}^{-2\lambda} \xi_2 + \ldots \varepsilon_{p-1}^{-(p-2)\lambda} \xi_{p-2}\}^{p-1}.$$

Da aber cyklische Verbindungen der $\xi$ eindeutige Functionen sein müssen, so ergiebt sich, wenn solche Functionen durch $r_0,\ r_1 \ldots r_{p-2}$ bezeichnet werden, durch Entwicklung von 24):

$$25) \quad \begin{cases} b_\lambda^{p-1} = r_0 + \varepsilon_{p-1}^{\lambda} r_1 + \varepsilon_{p-1}^{2\lambda} r_2 + \ldots \varepsilon_{p-1}^{(p-2)\lambda} r_{p-2}, \\ a_{c^\mu}^p = \sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=p-2} \varepsilon_{p-1}^{\lambda\mu} . \sqrt[p-1]{r_0 + \varepsilon_{p-1}^{\lambda} r_1 + \ldots \varepsilon_{p-1}^{(p-2)\lambda} r_{p-2}}. \end{cases}$$

Durch Einsetzen dieser Darstellungen in die als Lösung der Gleichung $p^{\text{ten}}$ Grades vorauszusetzende Normalform

$$26) \qquad x_\mu = a_0 + \varepsilon_p^{\mu} a_1 + \ldots \varepsilon_p^{(p-1)\mu} a_{p-1}$$

erhält man die letztere in ihrer fertigen Form; die auftretenden Wurzelgrössen sind hier als symbolische Bezeichnungen von eindeutig bestimmten Functionen zu betrachten, welche für einen geeigneten Convergenzbereich der unabhängigen Variablen in Reihenform dargestellt werden können.

Die Begleiterin dieser vollständig hergestellten $p$deutigen Normalform stellt die auflösbare Gleichung $p^{\text{ten}}$ Grades dar. Werden $r_0,\ r_1 \ldots r_{p-2}$ als unabhängige Variable angenommen, so werden die Coefficienten der Gleichung nicht als rationale Functionen sich ergeben. Soll dies der Fall sein, so müssen an Stelle der $r_0,\ r_1 \ldots r_{p-2}$ geeignete Ausdrücke in anderen *unabhängigen* Variablen treten.

Insbesondere folgt für die Gleichung fünften Grades

$$27)\qquad (x+a)^5 - b(x+a)^3 + c(x+a)^2 - d(x+a) + e = 0$$

die Normalform:

$$28)\qquad \begin{cases} x_\mu = a_0 + \varepsilon^\mu a_1 + \varepsilon^{2\mu} a_2 + \varepsilon^{3\mu} a_3 + \varepsilon^{4\mu} a_4; \quad (\mu = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5); \\ \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i \sin\frac{2\pi}{5}, \end{cases}$$

wo

$$29)\qquad \begin{cases} a_1^5 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=3} \varepsilon_4^{\lambda} \cdot \sqrt[4]{r_0 + \varepsilon_4^{\lambda} r_1 + \varepsilon_4^{2\lambda} r_2 + \varepsilon_4^{3\lambda} r_3}; \\ a_2^5 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=3} \varepsilon_4^{2\lambda} \cdot \sqrt[4]{r_0 + \varepsilon_4^{\lambda} r_1 + \varepsilon_4^{2\lambda} r_2 + \varepsilon_4^{3\lambda} r_3}; \\ a_4^5 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=3} \varepsilon_4^{3\lambda} \cdot \sqrt{r_0 + \varepsilon_4^{\lambda} r_1 + \varepsilon_4^{2\lambda} r_2 + \varepsilon_4^{3\lambda} r_3}; \\ a_3^5 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=3} \varepsilon^{4\lambda} \cdot \sqrt{r_0 + \varepsilon_4^{\lambda} r_1 + \varepsilon_4^{2\lambda} r_2 + \varepsilon_4^{3\lambda} r_3}. \end{cases}$$

Die Grössen $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ sind hier in die Reihe $a_1$, $a_2$, $a_4$, $a_3$ geordnet worden.

Aus der Gleichsetzung der Begleiterin mit der Gleichung folgt:

$$30)\qquad \begin{cases} a_0 = a;\ 5(a_1 a_4 + a_2 a_3) = b;\ 5(a_1 a_2^2 + a_3^2 a_4 + a_1^2 a_3 + a_2 a_4^2) = c; \\ 5(a_1^3 a_2 + a_3 a_4^3 + a_1 a_3^3 + a_2^3 a_4 - a_1^2 a_4^2 - a_2^2 a_3^2 + a_1 a_2 a_3 a_4) = d; \\ a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + a_4^5 + 5(a_1 a_4 - a_2 a_3)(a_1 a_2^2 + a_3^2 a_4 - a_1^2 a_3 - a_2 a_4^2 = e. \end{cases}$$

Daraus erhält man die allgemeinste Form der auflösbaren Gleichung fünften Grades, wenn die entwickelten Ausdrücke 29) für die $a_1$, $a_2$, $a_4$, $a_3$ eingesetzt werden. Will man für die Coefficienten der auflösbaren Gleichung rationale Ausdrücke erhalten, so müssen für die $r_0$, $r_1$, $r_2$, $r_3$ geeignete Functionsformen substituirt werden. Die alsdann resultirende Gleichung stellt thatsächlich die auflösbare Gleichung dar, wenn von vornherein bestimmt wird, dass ihre Coefficienten rationale Functionen unabhängiger Variablen sein sollen.

Um nun zum Schlusse noch die Auflösbarkeitsbedingungen für die Gleichungen $p^{\nu \text{ten}}$ und $p^{\text{ten}}$ Grades, ähnlich wie die Auflösung selbst, insoweit anzugeben, als sie ohne Weiteres bestimmbar sind, stelle man die Coefficienten der Begleiterin 20) als Functionen der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ dar und setze sie den entsprechenden symmetrischen Functionen der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ gleich, als welche die Coefficienten der aufzulösenden Gleichung sich darbieten.

Den Eigenschaften der Begleiterin zufolge gestatten ihre mittelst der Relation

31) $$p^\nu . a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} = \sum_{\mu_1 \ldots \mu_\nu} \varepsilon_{n_1}^{-\mu_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{-\mu_\nu \alpha_\nu} . x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$$

als Functionen der $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ dargestellten Coefficienten die $p^\nu . \varphi(p, \nu)$ Substitutionen

32) $$(\mu_k;\ i_{1k}\mu_1 + i_{2k}\mu_2 + \ldots i_{\nu k}\mu_\nu + \lambda_\nu),$$

die sich für $\nu = 1$ auf die $p(p-1)$ Substitutionen

32a) $$(\mu;\ i\mu + \lambda)$$

reduciren.

Da diese Functionen nur für $p^\nu = 2$, 3 oder 4 symmetrisch sind, so ergeben sich in jedem anderen Falle Bedingungsgleichungen zwischen den $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$, die nothwendig erfüllt sein müssen, wenn die Wurzeln der Gleichung durch die Normalform darstellbar sein sollen.

Daraus folgt die Unmöglichkeit, die allgemeine Gleichung vom Grade $p^\nu > 4$ durch Wurzelfunctionen darzustellen. Diese Unmöglichkeit kann aber schon daraus gefolgert werden, dass bereits solche Functionen der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$, welche nur die $\varphi(p, \nu)$ Substitutionen 21) gestatten und nicht erst symmetrische Functionen der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ eindeutig bestimmt sein müssen. Ueberdies ergiebt sie sich auch daraus, dass in die Normalform der Gleichungen vom höheren Grade als den vierten nicht mehr die Coefficienten der Gleichung als unabhängige Variable eingeführt werden können.

Die erwähnten Bedingungsgleichungen müssen nothwendig erfüllt sein. Die dadurch erfüllten Bedingungen sind aber nur für die Gleichungen vom Grade $p$; $(\nu = 1)$ hinreichend, um die Auflösung der Gleichung zu ermöglichen. Darum war auch nur für diesen Fall die vollständige Ausführung des Aulfösungsprocesses ohne Weiteres möglich. Die Grössen $a_\alpha$ konnten nämlich, nachdem die Substitutionengruppe 22) als die cyklische Gruppe 22a) erkannt war, direct durch eine Normalform dargestellt werden, ohne dass die Erfüllung einer weiteren Bedingung nöthig wurde.

Für die Gleichungen vom Grade $p^\nu$; $(\nu > 1)$ müssen dagegen im Allgemeinen noch andere Bedingungen neben den aus den genannten Bedingungsgleichungen folgenden erfüllt werden.

Ist z. B. $p^\nu = 2^\nu$ und $p^\nu - 1 = q$, wo $q$ eine Primzahl bedeutet, so gelten für die $q$ Grössen $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ ausserdem noch die Bedingungen, die aus ihrer Darstellung durch eine Normalform mit der wesentlichen Einheitswurzel $\varepsilon_q$ sich ergeben. Diese Bedingungen bestehen darin, dass Functionen

der in passende Reihenfolge gebrachten $q$ Grössen $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$, die in der neuen Aufeinanderfolge durch $a_\beta (\beta = 1, 2 \ldots q)$ bezeichnet werden mögen, eindeutig sein müssen, falls sie die $q(q-1)$ Substitutionen

$$(\beta;\ i\beta + \lambda);\ i = 1, 2 \ldots q - 1;\ \lambda = 1, 2 \ldots q$$

gestatten.

Alsdann sind die aus der Darstellung der $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ durch eine Normalform sich ergebenden Bedingungen auf solche für die $x_{\mu_1 \ldots \mu_\nu}$ zu reduciren und den bereits bekannten, nothwendigen Bedingungen hinzuzufügen, um zu den für die Auflösung der Gleichungen hinreichenden zu gelangen.

---

Die vorstehenden Darlegungen genügen wohl, um die Brauchbarkeit der auf die functionentheoretische Normalform des allgemeinen Wurzelausdrucks gegründeten Methode zur Auflösung der Gleichungen nachzuweisen. Dies war das zunächst von mir verfolgte Ziel. Es sind so die Grundlagen zu einer Theorie der Auflösung der Gleichungen durch Wurzelgrössen vorbereitet, zu deren vollständigen Durchführung allerdings noch weitergehende Untersuchungen nöthig sind. Als ein Ergebniss der bisherigen Untersuchungen darf indessen die Einsicht bezeichnet werden, dass die Normalform des allgemeinen Wurzelausdrucks ein geeignetes Instrument darstellt, um die Auflösbarkeitsbedingungen der Gleichungen und ihre Auflösung selbst, insoweit hierfür Wurzelgrössen in Betracht gezogen werden, im Zusammenhange zu entwickeln. Dabei sollten die einzelnen Durchführungen nur als einfache Beispiele zur Illustrirung der Methode dienen. Diese Methode erhielt aber ihr charakteristisches Gepräge von vornherein dadurch, dass die Wurzelgrössen als Functionen und nicht als symbolische Bezeichnungen für eine besondere Art von Operationen aufgefasst wurden, wozu man auf Grund principieller Erwägungen über die Natur der Zahlen geführt wird.

# VI.

## Aequivalenz der Linientheilsysteme.

Dargestellt mittelst des geometrischen Kalküls.

Von

FERDINAND KRAFT,

Privatdocent an der Universität Zürich.

---

Hierzu Tafel III, Fig. 1—9.

---

### Einleitung.

Die Aequivalenz der Linientheilsysteme und deren Eigenschaften sind für die theoretische Mechanik von fundamentaler Bedeutung, worauf bereits Grassmann in seiner Ausdehnungslehre von 1862 ($A_2$, Nr. 346, 347) hingewiesen hat. Schell, der hervorragendste Vertreter der theoretischen Mechanik, stützt sich in seinem Lehrbuche über diesen Gegenstand, welches nach jeder Richtung hin dem Bedürfnisse des wissenschaftlich gebildeten oder sich bildenden Maschinenbauers angepasst ist, auf die Aequivalenz der Streckensysteme, konnte aber nur von dem Additionsgesetze der Strecken, nach der Auffassung unseres Möbius, Gebrauch machen.

Nachdem nunmehr der geometrische Kalkül weiteren Kreisen durch mich zugänglich geworden ist, wenn auch vorerst nur in roher Form, sind wir in der Lage, in exacterer Weise diesen Gegenstand zu behandeln, was der Hauptsache nach durch diese Publication gezeigt wird.

Unter einem Vereine oder einem Systeme von Linientheilen verstehen wir alle die Linientheile, welche wir als zusammengehörend, als mit einander zu einem Ganzen verbunden aufzufassen haben. Jeder Linientheil eines Vereines von Linientheilen heisst ein Element desselben. Befinden sich die Elemente eines solchen Vereines nicht in einer Ebene, dann nennen wir ihn einen räumlichen, im anderen Falle einen ebenen Verein.

### § 1. Aequivalenz von Linientheilvereinen im Strahlenbündel und Strahlenbüschel.

1. Die Summe aus zwei Linientheilen $AB$ und $CD$, deren Träger im Punkte $O$ sich schneiden, ist, wenn wir dieselbe mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen, $OB_1 = AB$, $OD_1 = CD$ nehmen:

$$\mathfrak{S} = AB + CD = OB_1 + OD_1 = O(B_1 + D_1),$$

und wenn wir $B_1 + D_1 = 2E_1$ setzen:

$$\mathfrak{S} = 2OE_1 = OF;$$

ferner haben wir:

$$\mathfrak{S} = AB + CD = A(B - A) + C(D - C)$$
$$= O\{(B_1 - O) + (D_1 - O)\} = O(F - O) = OF,$$

wobei:

$$(B - A) + (D - C) = (B_1 - O) + (C_1 - O) = (F - O).$$

„Die Summe aus zwei Linientheilen, deren Träger in einem Punkte sich schneiden, ist äquivalent einem dritten Linientheile, seine Strecke ist gleich der Summe der Strecken der gegebenen Linientheile und sein Träger geht durch den Schnittpunkt der Linien beider Posten."

Multipliciren wir die Gleichung

$$AB + CD = OF$$

mit einem beliebigen Punkte $M$, so ergiebt sich:

$$MAB + MCD = MOF,$$
$$M(A - M)(B - A) + M(C - M)(D - C) = M(O - M)(F - O).$$

„Die Summe der Flächentheile zweier Linientheile auf sich schneidenden Trägern in Bezug auf einen beliebigen Punkt des Raumes ist gleich dem Flächentheile der Summe dieser Linientheile bezüglich desselben Punktes."

Wir nennen das Feld, die Fläche des Parallelogrammes (nicht die Flächenzahl des Feldes) des Flächentheiles eines Linientheiles in Beziehung auf irgend einen Punkt des Raumes sein Moment bezüglich dieses Punktes.

Dadurch entsteht der Satz:

„Die Summe der Momente zweier Linientheile auf sich schneidenden Trägern ist gleich dem Momente der Summe dieser Linientheile bezüglich ein und desselben Punktes."

Setzen wir

$$(A - M)(B - A) = |\gamma_1, \quad (C - M)(D - C) = |\gamma_2, \quad (O - M)(F - O) = |\gamma,$$

dann ist:

$$M|\gamma_1 + M|\gamma_2 = M|\gamma, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma.$$

Weil wir die Strecke $\gamma$ die „Achsenmomentenstrecke" des Linientheiles $OF$ bezüglich des Punktes $M$ nennen, diese Strecke auch kurzweg „Achsenmoment" heissen, so folgt:

„Die Summe der Achsenmomente zweier Linientheile auf sich schneidenden Trägern ist gleich dem Achsenmomente ihrer Summe bezüglich ein und desselben Punktes."

Fällt der Punkt $M$ mit dem Träger eines der drei Linientheile *zusammen, so* verschwindet das Moment und damit auch das Achsenmoment *dieses Linientheiles.*

2. Zwei parallele Linientheile. Liegt der Schnittpunkt der Träger der beiden Linientheile $AB$ und $CD$ unendlich fern, dann sind die Linientheile parallel.

Die Summe zweier solcher Linientheile ist zunächst:

$$\mathfrak{S} = AB + CD = A(B-A) + C(D-C).$$

Aber es ist $(D-C) = m(B-A)$, mithin auch

$$\mathfrak{S} = A(B-A) + mC(B-A) = (A+mC)(B-A),$$

so dass mit

$$A + mC = (1+m)S,$$

in welcher Formel $S$ den Summenpunkt der Punktgrössen $A$ und $mC$ bedeutet,

$$\mathfrak{S} = (1+m)S(B-A) = S\{(B-A) + m(B-A)\},$$

$$\mathfrak{S} = S\{(B-A) + (D-C)\}, \tag{1}$$

und wenn wir

$$(B-A) + (D-C) = (R-S)$$

setzen, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{S} = S(R-S) = SR.$$

Das durch die Gleichung 1) ausgedrückte Ergebniss lässt sich auch schreiben:

$$\mathfrak{S} = S\{(B+D) - (A+C)\},$$

wodurch, wenn wir

$$B + D = 2F, \quad A + C = 2E$$

setzen,

$$\mathfrak{S} = S\{2(F-E)\} = 2S(F-E) = 2(SF - SE)$$

wird, wobei

$$2(F-E) = (B-A) + (D-C)$$

ist.

Sind die Posten der Summe gleichläufig parallel, so ist $m$ positiv, der resultirende Linientheil gleichen Sinnes mit beiden Posten; sind sie gegenläufig parallel, so ist $m$ eine negative Zahl.

Sind $AB$ und $CD$ Posten entgegengesetzten Sinnes (Fig. 1), so ergiebt sich der Summenpunkt $S$ dadurch, dass wir $(B'-C) = (A-B)$, $(D'-A) = (D-C)$ zeichnen und den Strahl $D'B'$ ziehen, welcher den Strahl $AC$ in $S$ schneidet, denn es ist, wegen

$$(1-m)S = A - mC, \quad (1-m)AS = -mAC, \quad (1-m)CS = -AC,$$

$$AS : CS = m = m(B-A) : (B-A) = (D-C) : (A-B) = (D'-A) : (B'-C).$$

Zeichnen wir weiter $(R-S) = (D-B') = (D-C) + (B-A) = 2(F-E)$, wo $E$ und $F$ die Halbirungspunkte der Strecken $(C-A)$ und $(D-B)$ sind, so ist $SR$ die Summe von $AB$ und $CD$, welcher Linientheil auf seinem Träger beliebig verschoben werden darf.

In ganz conformer Weise gestaltet sich die Construction, wenn die beiden Linientheile *gleichläufig* parallel sind.

Multipliciren wir die Gleichung

$$AB + CD = SR$$

mit dem beliebigen Punkte $M$, dann ist:

$$MAB + MCD = MSR,$$

$$M(A-M)(B-A) + M(C-M)(D-C) = M(S-M)(R-S).$$

„Die Summe aus zwei parallelen Linientheilen, deren Strecken nicht entgegengesetzt gleich sind, ist ein zu diesen Linientheilen paralleler Linientheil, welcher in der Ebene der Posten liegt und dessen Strecke gleich der Summe der Strecken der Posten ist. Der Schnittpunkt $S$ des Trägers der Summe und der durch die Anfangselemente der Linientheile $AB$ und $CD$ bestimmten Linie befindet sich zwischen $A$ und $C$, wenn die Posten gleichläufig parallel sind, und theilt die Strecke $(C-A)$ im umgekehrten Verhältnisse ihrer Längen, ausserhalb dieser Strecke, zunächst dem absolut grössten Posten, wenn sie gegenläufig sind. Im ersten Falle ist die Resultante (die Summe) mit den Componenten (Posten) gleichen Sinnes, im zweiten sind sie und die absolut grösste Componente gleichläufig. Die Summe der Momente der Componenten ist gleich dem Momente der Resultanten bezüglich eines jeden Punktes des Raumes.

Sind die Strecken der beiden Linientheile entgegengesetzt gleich, dann bilden sie ein „Linientheilpaar" und es ist $m = -1$, mit welchem Werthe wir erhalten:

$$\mathfrak{S} = AB + CD = 0S(B-A) = (A-C)(B-A),$$

$$MAB + MCD = M(A-C)(B-A),$$

und mit $(A-C)(B-A) = |\gamma$ ergiebt sich:

$$\mathfrak{S} = AB + CD = |\gamma,$$

$$MAB + MCD = M|\gamma.$$

„Sind die Strecken zweier Linientheile entgegengesetzt gleich, handelt es sich um ein Linientheilpaar, so ist ihre Summe ein in unendlicher Ferne verschwindender Linientheil, äquivalent dem durch die Posten bestimmten Spathecke, dessen Entstehungssinn dem Sinne der Posten entspricht, und mithin die Lage der Summe als Spatheck beliebig. Das Moment eines Linientheilpaares ist für jeden Punkt des Raumes dasselbe, gleich der Fläche des eben genannten Spatheckes."

Wir erkennen noch, dass das Moment des Linientheilpaares $(AB + CD)$ gleich dem Momente des Linientheiles $AB$ in Beziehung auf den Punkt $C$ ist.

3. Linientheilverein im Strahlenbündel und Strahlenbüschel. Sind nun $A_k B_k$, $k = 1, 2, \ldots n$ die Elemente eines Vereines von Linientheilen auf den Strahlen eines Strahlenbündels oder Strahlenbüschels mit dem Mittelpunkte $O$, so ist deren Summe, wenn wir $OB'_k = A_k B_k$ nehmen:

$$\mathfrak{S} = \sum_{k=1}^{k=n} A_k B_k = \sum_{k=1}^{k=n} O B'_k = O \sum_{k=1}^{k=n} (B'_k - O)$$

$$= O(R - O) = OR,$$

mit $\sum_{k=1}^{k=n} (B' - O) = (R - O)$,

und überdies ist

$$\mathfrak{S} = \sum_{k=1}^{k=n} A_k B_k = \sum_{k=1}^{k=n} O B'_k = O \sum_{k=1}^{k=n} B'_k = n O S = OR,$$

wenn wir den Summenpunkt der Summe des Punktvereines der Punkte $B'_k$ mit $S$ bezeichnen.

„Die Summe der Elemente eines Vereines von Linientheilen im Strahlenbündel und Strahlenbüschel ist wieder ein Linientheil, seine Strecke ist gleich der Summe der Strecken der Posten, sein Träger geht durch den Mittelpunkt des Strahlengebildes und durch den Mittelpunkt der Endelemente der auf ihren Trägern so verschobenen Posten, dass ihre Anfangselemente mit dem Centrum des Strahlengebildes coincidiren. Die Summe verschwindet, wenn das Summationspolygon der Strecken sich schliesst."

Multipliciren wir die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_k B_k = O \sum_{k=1}^{k=n} B'_k = OR$$

mit dem beliebigen Punkte $M$, so folgt:

$$M \sum_{k=1}^{k=n} A_k B_k = \sum_{k=1}^{k=n} M A_k B_k = \sum_{k=1}^{k=n} M O B'_k = MOR.$$

Ferner haben wir:

$$M \sum_{k=1}^{k=n} A_k B_k = \sum_{k=1}^{k=n} M(A_k - M)(B_k - A_k) = \sum_{k=1}^{k=n} M(O - M)(B'_k - O)$$

$$= M(O - M)(R - O).$$

„Die Summe der Momente der Posten eines Vereines von Linientheilen auf den Strahlen eines Strahlenbündels in Beziehung auf irgend einen Punkt des Raumes ist gleich dem Momente der Resultanten bezüglich desselben Punktes."

## § 2. Aequivalenz von Linientheilpaaren.

1. Sind $AB$ und $CD$ die Linientheile, die Seiten eines Linientheilpaares, dann ist:

$$AB + CD = (A - C)(B - A) = |\gamma,$$

$$MAB + MCD = M|\gamma.$$

Setzen wir $(A-C)=\lambda$, $(B-A)=\varkappa$, so erhalten wir:

$$AB+CD=\lambda\varkappa,$$

$$M(AB+CD)=M(\lambda\varkappa),$$

$$\gamma=|(\lambda\varkappa),\ \sqrt{\gamma^2}=lk\sin(\lambda,\varkappa).$$

Weil zwei Linientheile einander gleich sind, wenn sie auf derselben Linie liegen und gleiche Strecken besitzen, so besteht der Satz:

„Ein Linientheilpaar ändert seinen Werth nicht, wenn seine Seiten beliebig auf ihren Trägern verschoben werden."

Weil gleichläufig parallele Strecken von gleichen Längen, sowie Spathecke in parallelen Ebenen von gleichen Ausdehnungen und demselben Entstehungssinne für einander substituirt werden dürfen, so folgt:

„Ein Linientheilpaar ändert seinen Werth nicht, gleichviel wohin wir dasselbe, ohne die Stellung seiner Ebene zu ändern, im Raume verschieben."

Damit ein Linientheilpaar verschwinde, muss

$$\lambda\varkappa=0$$

sein, was entweder mit $\lambda=0$ oder mit $\varkappa=0$ eintritt, im ersten Falle liegen die Seiten auf demselben Träger, im zweiten verschwinden die Seiten.

„Ein Linientheilpaar verschwindet, wenn seine Seiten auf demselben Träger liegen, oder wenn diese gleich Null sind."

2. Sind $AB$, $CD$ die Seiten eines Paares, $A_1B_1$, $C_1D_1$ diejenigen eines anderen Paares, dann ist:

$$AB+CD=(A-C)(B-A)=|\,\gamma=\lambda\varkappa,$$

$$A_1B_1+C_1D_1=(A_1-C_1)(B_1-A_1)=|\,\gamma_1=\lambda_1\varkappa_1.$$

Für die Gleichheit der beiden Paare besteht die Relation

$$(A-C)(B-A)=(A_1-C_1)(B_1-A_1),$$

oder

$$\gamma=\gamma_1.$$

„Zwei Linientheilpaare sind einander äquivalent, wenn sie gleiche Spathecke oder gleiche Achsenmomentenstrecken besitzen."

Aus der Bedingung für die Gleichheit

$$\lambda\varkappa=\lambda_1\varkappa_1$$

folgt

$$1)\qquad lk\sin(\lambda,\varkappa)=l_1k_1\sin(\lambda_1,\varkappa_1),$$

$$g=g_1,$$

und mit $l\sin(\lambda,\varkappa)=p$, $l_1\sin(\lambda_1,\varkappa_1)=p_1$ erhalten wir

$$2)\qquad pk=p_1k_1,$$

*wobei $p$ und $p_1$* die numerischen Abstände der Träger der Seiten der Paare, *deren Breiten* bedeuten.

„Zwei Paare sind einander äquivalent, wenn die Producte aus je ihrer Breite und der Länge einer Seite einander gleich sind und sie den nämlichen Entstehungs- resp. Drehungssinn aufweisen.“

Mit $p = p_1$ ist $k = k_1$, daher:

„Paare von gleichen Breiten, gleichen Seitenlängen und demselben Entstehungssinne sind einander äquivalent.“

Infolge der Gleichungen 1) und 2) lässt sich jedes Paar in ein ihm äquivalentes von gegebener Breite oder Seitenlänge verwandeln, denn es ist:

$$k_1 = \frac{lk \sin(\lambda, \varkappa)}{l_1 \sin(\lambda_1, \varkappa_1)} = \frac{pk}{p_1},$$

$$l_1 = \frac{lk \sin(\lambda, \varkappa)}{k_1 \sin(\lambda_1, \varkappa_1)}, \quad p_1 = \frac{pk}{k_1}.$$

3. Sind $A_1 B_1$, $C_1 D_1$ und $A_2 B_2$, $C_2 D_2$ irgend zwei Paare, dann ist:

$$(A_1 B_1 + C_1 D_1) + (A_2 B_2 + C_2 D_2) = (A_1 - C_1)(B_1 - A_1) + (A_2 - C_2)(B_2 - A_2)$$
$$= |\gamma_1 + |\gamma_2 = |(\gamma_1 + \gamma_2) = |\gamma = (A - C)(B - A).$$

„Die Summe zweier Paare ist einem dritten Paare äquivalent. Die Ebene dieses Paares ist senkrecht zu der Summe der Achsenmomentenstrecken der gegebenen Paare, die Flächenzahl seiner Momentenfläche gleich der Längenzahl des resultirenden Achsenmomentes.“

Sind insbesondere die zu addirenden Paare in einer Ebene gelegen oder einer Ebene parallel, so sind auch ihre Achsen parallel, die resultirende Achsenstrecke ist deshalb parallel den gegebenen Achsenstrecken und die Ebene des resultirenden Paares parallel zu den Ebenen der gegebenen Paare.

Mit $\gamma_2 = -\gamma_1$ verschwindet die Summe, die Paare sind entgegengesetzt gleich.

„Die Summe zweier Paare mit entgegengesetzt gleichen Achsenstrecken oder Momentenflächen ist stets gleich Null.“

Wir erkennen unmittelbar, dass, wenn zwei Paare von gleichen Seitenlängen und gelegen in parallelen Ebenen zu addiren sind, ein Paar entsteht, dessen Breite gleich der Summe der Breiten der gegebenen Paare ist, wenn das neue Paar dieselbe Seitenlänge erhält. — Denn es ist:

$$\lambda_1 \varkappa + \lambda_2 \varkappa = (\lambda_1 + \lambda_2)\varkappa.$$

Wir sehen sofort, dass zwei Paare gleichen Sinnes, welche von den beiden Gegenseitenpaaren eines Flächentheiles gebildet werden, einander äquivalent sind. — Denn ihre Momentenflächen sind einander gleich.

Ist die Figur $A'B'C'D'$ (Fig. 2) ein Parallelogramm, dann ist

$$A'B' + C'D' = (A' - C')(B' - A'),$$
$$B'C' + D'A' = (B' - D')(C' - B'),$$

und weil die rechten Seiten dieser Gleichungen einander gleich sind,

$$A'B' + C'D' = B'C' + D'A'.$$

Die Multiplication dieser Gleichung mit der beliebigen reellen Zahl $m$ giebt:

$$m(A'B'+C'D')=m(B'C'+D'A'),$$

und wenn wir $mA'B'=A_1B_1$, $mC'D'=C_1D_1$, $mB'C'=A_2B_2$, $mD'A'=C_2D_2$ setzen, so resultirt: $A_1B_1+C_1D_1=A_2B_2+C_2D_2$.

„Zwei Paare gleichen Sinnes, deren Streifen sich in irgend einem Spathecke durchschneiden, und deren Seiten den Seiten des Parallelogrammes proportional sind, sind einander gleich."

3. Besteht ein Verein von Paaren aus $n$ Paaren $(A_lB_l+C_lD_l)$ in beliebigen Ebenen, dann ist deren Summe:

$$\sum_{l=1}^{l=n}(A_lB_l+C_lD_l)=\sum_{l=1}^{l=n}(A_l-C_l)(B_l-A_l)=|\sum_{l=1}^{l=n}\gamma_l$$
$$=|\gamma=(A-C)(B-A)=AB+CD.$$

„Ein Verein von Linientheilpaaren ist entweder einem einzigen Paare äquivalent oder äquivalent Null, je nachdem das Polygon der Achsenstrecken der gegebenen Paare sich nicht schliesst oder sich schliesst. Das im ersten Falle durch die Summation resultirende Paar hat bestimmten Sinn, bestimmte Grösse, bestimmte Stellung, aber beliebige Lage im Raume."

Sind die Streifen sämmtlicher gegebenen Paare einer Ebene parallel, dann sind sämmtliche Achsenstrecken parallel zu einander, die resultirende Achsenstrecke besitzt dieselbe Richtung, wie die gegebenen Achsenstrecken, das resultirende Paar mithin dieselbe Stellung, wie die gegebenen Paare.

Sind $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ und $\varepsilon_3$ die Einheitsstrecken der Achsen eines Normal-Coordinatensystems der $x$, $y$ und $z$, dann haben wir:

$$\gamma_l=\gamma_{l,x}+\gamma_{l,y}+\gamma_{l,z}=(\gamma_l|\varepsilon_1)\varepsilon_1+(\gamma_l|\varepsilon_2)\varepsilon_2+(\gamma_l|\varepsilon_3)\varepsilon_3,$$
$$\gamma_l=g_l\cos\mathfrak{l}_l\,\varepsilon_1+g_l\cos\mathfrak{m}_l\,\varepsilon_2+g_l\cos\mathfrak{n}_l\,\varepsilon_3.$$
$$\gamma_l=|[(A_l-C_l)(B_l-A_l)]=|(\varrho_l\varkappa_l),$$
$$\gamma_l=|[(r_{l,x}\varepsilon_1+r_{l,y}\varepsilon_2+r_{l,z}\varepsilon_3)(k_{l,x}\varepsilon_1+k_{l,y}\varepsilon_2+k_{l,z}\varepsilon_3)],$$
$$\gamma_l=(r_{l,x}k_{l,y}-r_{l,y}k_{l,x})\varepsilon_3+(r_{l,y}k_{l,z}-r_{l,z}k_{l,y})\varepsilon_1+(r_{l,z}k_{l,x}-r_{l,x}k_{l,z})\varepsilon_2.$$

Dadurch erhalten wir:

$$\gamma=\sum_1^n\gamma_l=\sum_1^n(\gamma_{l,x}+\gamma_{l,y}+\gamma_{l,z})$$
$$=\sum_1^n g_l\cos\mathfrak{l}_l\,\varepsilon_1+\sum_1^n g_l\cos\mathfrak{m}_l\,\varepsilon_2+\sum_1^n g_l\cos\mathfrak{n}_l\,\varepsilon_3,$$
$$\gamma=\gamma_x+\gamma_y+\gamma_z=g_x\varepsilon_1+g_y\varepsilon_2+g_z\varepsilon_3,$$
$$\gamma|\varepsilon_1=g\cos\mathfrak{l}=g_x,\quad \gamma|\varepsilon_2=g\cos\mathfrak{m}=g_y,\quad \gamma|\varepsilon_3=g\cos\mathfrak{n}=g_z,$$
$$\gamma=g\cos\mathfrak{l}\,\varepsilon_1+g\cos\mathfrak{m}\,\varepsilon_2+g\cos\mathfrak{n}\,\varepsilon_3,$$
$$\frac{\cos\mathfrak{l}}{g_x}=\frac{\cos\mathfrak{m}}{g_y}=\frac{\cos\mathfrak{n}}{g_z}=\frac{1}{g};\quad \gamma^2=g^2=\gamma_x^2+\gamma_y^2+\gamma_z^2.$$

*Das* resultirende Achsenmoment kann nur dann verschwinden, wenn *gleichzeitig* $\gamma_x=0$, $\gamma_y=0$, $\gamma_z=0$ ist.

## § 3. Aequivalenz eines Linientheiles.

1. Sei $AB$ irgend ein Linientheil, $O$ ein beliebiger Punkt des Raumes; dann ist

$$AB = A(B-A) = [O+(A-O)](B-A),$$

$$1)\qquad AB = O(B-A)+(A-O)(B-A),$$

oder, wenn wir $(B-A)=\varkappa$, $(A-O)=\varrho$, $\varrho\varkappa = |\gamma$ setzen,

$$AB = O\varkappa + \varrho\varkappa = O\varkappa + |\gamma.$$

„Ein Linientheil ist bezüglich eines beliebigen Punktes des Raumes äquivalent der Summe aus einem in diesem Punkte entspringenden Linientheile mit einer der Strecke des gegebenen Linientheiles gleichen Strecke und dem Momente des gegebenen Linientheiles bezüglich des Reductionspunktes oder einem diesen Momente gleichen Paare."

Sind $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ und $\varepsilon_3$ die Einheitsstrecken der Richtachsen eines normalen Coordinatensystemes mit $O$ als Ursprung, dann ist

$$A = O + \sum_{r=1}^{r=3} a_r\varepsilon_r,\quad B = \sum_{r=1}^{r=3} b_r\varepsilon_r,$$

welche Werthe in Gleichung 1) eingesetzt geben

$$AB = O\{(b_1-a_1)\varepsilon_1 + (b_2-a_2)\varepsilon_2 + (b_3-a_3)\varepsilon_3\}$$
$$+\left\{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\varepsilon_2\varepsilon_3 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\varepsilon_3\varepsilon_1\right\}.$$

Diese Relation giebt offenbar die Componenten des resultirenden Linientheiles parallel zu den Coordinatenachsen und die Componenten des resultirenden Momentes parallel zu den Coordinatenebenen.

Gehen wir von der Reductionsformel

$$AB = O\varkappa + \varrho\varkappa$$

aus, setzen wir in ihr

$$\varkappa = k_x\varepsilon_1 + k_y\varepsilon_2 + k_z\varepsilon_3,\quad \varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3,$$

so ergiebt sich

$$AB = O(k_x\varepsilon_1 + k_y\varepsilon_2 + k_z\varepsilon_3) + \begin{vmatrix} y & z \\ k_y & k_z \end{vmatrix}\varepsilon_2\varepsilon_3 + \begin{vmatrix} z & x \\ k_z & k_x \end{vmatrix}\varepsilon_3\varepsilon_1 + \begin{vmatrix} x & y \\ k_x & k_y \end{vmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

und es ist, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Winkel sind, welche $\varkappa$ mit den Coordinatenachsen einschliesst,

$$k^2 = \varkappa^2 = k^2_x + k^2_y + k^2_z,\quad \frac{\cos\mathfrak{a}}{k_x} = \frac{\cos\mathfrak{b}}{k_y} = \frac{\cos\mathfrak{c}}{x_z} = \frac{1}{k}.$$

Ferner haben wir:

$$\gamma = g_x\varepsilon_1 + g_y\varepsilon_2 + g_z\varepsilon_3$$

und es sind die Zahlenwerthe der Componenten der Achsenstrecke:

$$g_x = \begin{vmatrix} y & z \\ k_y & k_z \end{vmatrix},\quad g_y = \begin{vmatrix} z & x \\ k_z & k_x \end{vmatrix},\quad g_z = \begin{vmatrix} x & y \\ k_x & k_y \end{vmatrix}.$$

Sind noch $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ die Neigungswinkel von $\gamma$ gegen die Achsen, dann ist:

$$\gamma^{\underline{2}} = g^2 = g^2{}_x + g^2{}_y + g^2{}_z, \quad \frac{\cos \mathfrak{l}}{g_x} = \frac{\cos \mathfrak{m}}{g_y} = \frac{\cos \mathfrak{n}}{g_z} = \frac{1}{g}.$$

2. Ist die Reduction eines Linientheiles für irgend einen Punkt des Raumes bekannt, dann lässt sich von da aus die Reduction für jeden anderen Punkt des Raumes bestimmen, für die Punkte einer Fläche oder einer Curve angeben.

Ist, wenn $U$ irgend einen Punkt einer Fläche bedeutet,

$$U - O = \tau = F(u, v)$$

die Gleichung der Fläche, also

$$O = U - \tau = U - F(u, v),$$

so ergiebt sich aus

$$AB = (O + \varrho)\varkappa,$$

dass auch

$$AB = (U - \tau + \varrho)\varkappa = [U - F(u, v) + \varrho]\varkappa,$$

$$AB = U\varkappa + [\varrho - F(u, v)]\varkappa$$

ist, woraus der Satz hervorgeht:

„Für die Punkte des Raumes als Reductionspunkte ist die Reductionsresultante nach Grösse, Richtung und Richtungssinn constant, das Reductionsmoment im Allgemeinen variabel."

Ist insbesondere das Gebilde, für dessen Punkte die Reduction zu ermitteln, eine durch den Punkt $O_1 = O + \lambda$ gehende zu der Einheitsstrecke $\varepsilon$ parallele Gerade, so ist die Fahrstrahlgleichung dieser Linie

$$U - O = \lambda + u\varepsilon, \quad O = U - (\lambda + u\varepsilon),$$

womit sich ergiebt:

$$AB = U\varkappa + \varrho\varkappa - (\lambda + u\varepsilon)\varkappa$$
$$= U\varkappa + |\gamma - |\gamma' = U\varkappa + |\gamma_u,$$

wenn $(\lambda + u\varepsilon)\varkappa = |\gamma'$, $\gamma - \gamma' = \gamma_u$ gesetzt wird.

Ist die Gerade parallel zu dem gegebenen Linientheile, dann ist $\varepsilon\varkappa = 0$, also:

$$AB = U\varkappa + (\varrho - \lambda)\varkappa = U\varkappa + |\gamma_{01}.$$

„Für die Punkte eines jeden Strahles, welcher parallel zu dem gegebenen Linientheile läuft, ist die Reduction constant."

Die Gleichung des Kreiscylinders vom Radius $r$, mit der Geraden $AB$ als Achse und dem beliebigen Punkte $O$ auf ihr als Coordinatenursprung, lautet:

$$U - O = \tau = r(\cos t\,\varepsilon_1 + \sin t\,\varepsilon_2) + u\,\varepsilon_3,$$

daher ist die Reduction für seine Punkte

$$AB = Uk\,\varepsilon_3 + [(n - u)\,\varepsilon_3 - r(\cos t\,\varepsilon_1 + \sin t\,\varepsilon_2)]k\,\varepsilon_3,$$

indem $A - O = n\,\varepsilon_3$, $\lambda = r(\cos t\,\varepsilon_1 + \sin t\,\varepsilon_2)$ ist,

$$AB = Uk\,\varepsilon_3 - kr(\sin t\,\varepsilon_2\varepsilon_3 - \cos t\,\varepsilon_3\varepsilon_1) = Uk\,\varepsilon_3 - |\gamma_u^{\neg}$$

und weil

$$\gamma_u = kr(\sin t\,\varepsilon_1 - \cos t\,\varepsilon_2)$$

*ist, so folgt:*

$$\gamma_u^{\underline{2}} = k^2 r^2, \quad g_u = kr.$$

„Für alle Punkte eines Kreiscylinders um die Gerade $AB$ als Achse ist die Reductionsresultante nach Grösse und Richtung, das Reductionsmoment der Grösse nach constant und senkrecht zu der Achse."

Für den Punkt $O_1$ als weiteren Reductionspunkt haben wir:

$$AB = O_1 \varkappa + \varrho \varkappa - \lambda \varkappa = O_1 \varkappa + |\gamma - |\gamma',$$
$$= O_1 \varkappa + |\gamma_1, \quad (\gamma_1 = \gamma - \gamma').$$

Setzen wir noch $\lambda = x_1 \varepsilon_1 + y_1 \varepsilon_2 + z_1 \varepsilon_3$, dann folgt aus der vorstehenden Gleichung:

$$AB = O_1 (k_x \varepsilon_1 + k_y \varepsilon_2 + k_z \varepsilon_3) + \{(x - x_1)\varepsilon_1 + (y - y_1)\varepsilon_2 + (z - z_1)\varepsilon_3\}(k_x \varepsilon_1 + k_y \varepsilon_2 + k_z \varepsilon_3),$$

$$AB = O_1 (k_x \varepsilon_1 + k_y \varepsilon_2 + k_z \varepsilon_3) + \begin{vmatrix} y - y_1 & z - z_1 \\ k_y & k_z \end{vmatrix} \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \begin{vmatrix} z - z_1 & x - x_1 \\ k_z & k_x \end{vmatrix} \varepsilon_3 \varepsilon_1 + \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ k_x & k_y \end{vmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2,$$

$$AB = O_1 (k_x \varepsilon_1 + k_y \varepsilon_2 + k_z \varepsilon_3) + \left\{ \begin{vmatrix} y & z \\ k_y & k_z \end{vmatrix} \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \begin{vmatrix} z & x \\ k_z & k_x \end{vmatrix} \varepsilon_3 \varepsilon_1 + \begin{vmatrix} x & y \\ k_x & k_y \end{vmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right\}$$
$$- \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ k_y & k_z \end{vmatrix} \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ k_z & k_x \end{vmatrix} \varepsilon_3 \varepsilon_1 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ k_x & k_y \end{vmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right\}.$$

Die letzte Formel giebt die Componenten der Momentenfläche bezüglich des Punktes $O$ und die Componenten der Momentenfläche, welche durch den Uebergang von $O$ nach $O_1$ hinzutritt, parallel den Coordinatenebenen.

Mit
$$\gamma = g_x \varepsilon_1 + g_y \varepsilon_2 + g_z \varepsilon_3, \quad \gamma' = g'_x \varepsilon_1 + g'_y \varepsilon_2 + g'_z \varepsilon_3$$
erhalten wir
$$\gamma_1 = (g_x - g'_x)\varepsilon_1 + (g_y - g'_y)\varepsilon_2 + (g_z - g'_z)\varepsilon_3,$$
welche Gleichung die Componenten des Achsenmomentes des Punktes $O_1$ giebt, und es können die Werthe der $g$ Grössen unmittelbar aus den vorhergehenden Gleichungen entnommen werden.

## § 4. Aequivalenz eines Vereines von Linientheilen einer Resultanten und einem Momente.

1. Sind $A_l B_l$, $l = 1, 2, \ldots n$ die Elemente eines Vereines von Linientheilen, so ist die Summe $\mathfrak{S}$ dieser Linientheile bezüglich irgend eines Punktes $O$ des Raumes:

$$\mathfrak{S} = \sum_1^n {}_l A_l B_l = \sum_1^n {}_l A_l (B_l - A_l) = \sum_1^n {}_l [O + (A_l - O)](B_l - A_l),$$

$$\mathfrak{S} = O \sum_1^n {}_l (B_l - A_l) + \sum_1^n {}_l (A_l - O)(B_l - A_l)$$
$$= O \sum_1^n {}_l \varkappa_l + \sum_1^n {}_l \varrho_l \varkappa_l = O \sum_1^n {}_l \varkappa_l + |\sum_1^n {}_l \gamma_l,$$

und wenn

$$\sum_1^n {}_l \varkappa_l = \varkappa, \quad \sum_1^n {}_l \varrho_l \varkappa_l = \varrho \nu, \quad \sum_1^n {}_l \gamma_l = \gamma$$

gesetzt wird:

$$\mathfrak{S} = O\varkappa + \varrho\nu = O\varkappa + | \gamma.$$

„Die Summe der Elemente eines Vereines von Linientheilen für irgend einen Punkt $O$ des Raumes als Reductionspunkt ist im Allgemeinen äquivalent einem Linientheile und einem Momente resp. Paare. Die Strecke des resultirenden Linientheiles ist gleich der Summe der Strecken der Posten und er ist auf dem zu dieser Strecke parallelen Strahle durch den Reductionspunkt beliebig gelegen. Das resultirende Moment ist gleich der Summe der Momentenfelder der Posten bezüglich des Reductionspunktes, das resultirende Paar gleich der Summe der Paare der Posten bezüglich des Reductionspunktes."

Nehmen wir den Punkt $O$ als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes und die Bezeichnung entsprechend der in § 3, so ist:

$$\mathfrak{S} = O \sum_1^n {}_l (k_{l,x}\varepsilon_1 + k_{l,y}\varepsilon_2 + k_{l,z}\varepsilon_3)$$

$$+ \sum_1^n {}_l \left\{ \begin{vmatrix} y_l & z_l \\ k_{l,y} & k_{l,z} \end{vmatrix} \varepsilon_2\varepsilon_3 + \begin{vmatrix} z_l & x_l \\ k_{l,z} & k_{l,x} \end{vmatrix} \varepsilon_3\varepsilon_1 + \begin{vmatrix} x_l & y_l \\ k_{l,x} & k_{l,y} \end{vmatrix} \varepsilon_1\varepsilon_2 \right\};$$

$$\varkappa = \sum_1^n {}_l k_{l,x}\varepsilon_1 + \sum_1^n {}_l k_{l,y}\varepsilon_2 + \sum_1^n {}_l k_{l,z}\varepsilon_3 = k_x\varepsilon_1 + k_y\varepsilon_2 + k_z\varepsilon_3,$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad \frac{\cos\mathfrak{a}}{k_x} = \frac{\cos\mathfrak{b}}{k_y} = \frac{\cos\mathfrak{c}}{k_z} = \frac{1}{k};$$

$$\gamma = g_x\varepsilon_1 + g_y\varepsilon_2 + g_z\varepsilon_3,$$

$$g_x = \sum_1^n {}_l \begin{vmatrix} y_l & z_l \\ k_{l,y} & k_{l,z} \end{vmatrix}, \quad g_y = \sum_1^n {}_l \begin{vmatrix} z_l & x_l \\ k_{l,z} & k_{l,x} \end{vmatrix}, \quad g_z = \sum_1^n {}_l \begin{vmatrix} x_l & y_l \\ k_{l,x} & k_{l,y} \end{vmatrix},$$

$$g^2 = g_x^2 + g_y^2 + g_z^2, \quad \frac{\cos\mathfrak{l}}{g_x} = \frac{\cos\mathfrak{m}}{g_y} = \frac{\cos\mathfrak{n}}{g_z} = \frac{1}{g}.$$

2. Ist die Reduction $\mathfrak{S} = O\varkappa + |\gamma$ für den Punkt $O$ bekannt, dann ist diejenige für die Punkte $U$ des zu der Reductionsresultanten parallelen Strahles $\mu_1$ durch $O_1$, mit $O_1 = O + \lambda$, $U = O_1 + u\varkappa$,

$$\mathfrak{S} = (U + \varrho - \lambda - u\varkappa)\varkappa = U\varkappa + (\varrho - \lambda)\varkappa = U\varkappa + \varrho\varkappa - \lambda\varkappa,$$

$$\mathfrak{S} = U\varkappa + |\gamma - |\gamma' = U\varkappa + |\gamma_1, \quad (\gamma_1 = \gamma - \gamma').$$

„Für die Punkte eines Strahles $\mu$ parallel zur Reductionsresultanten $O\varkappa$ ist die Reduction constant, für sämmtliche Strahlen $\mu$ ist der Resultantenlinientheil nach Grösse, Richtung und Sinn derselbe, hingegen ändert sich das Reductionspaar im Allgemeinen von Strahl zu Strahl."

Das Moment des Reductionspaares für den Strahl $\mu_1$ ist:

$$|\gamma_1 = |\gamma - \lambda\varkappa.$$

Multipliciren wir die beiden Seiten dieser Gleichung mit $\varkappa$, so folgt:

$$\varkappa\,|\gamma_1 = \varkappa\,|\gamma, \quad (\varkappa\,|\gamma_1)\,\varepsilon_\mu = (\varkappa\,|\gamma)\,\varepsilon_\mu,$$

$$g_1 \cos(\varkappa, \gamma_1) = g \cos(\varkappa, \gamma), \quad g_1 : g = \cos(\varkappa, \gamma) : \cos(\varkappa, \gamma_1).$$

„Die Projectionen der Achsenmomente der verschiedenen Punkte des Raumes auf die Richtung der Strahlen $\mu$ sind einander gleich. Die Achsenmomente der verschiedenen Punkte des Raumes schliessen im Allgemeinen mit der Richtung der Strahlen $\mu$ verschiedene Winkel ein, ihre Längen verhalten sich umgekehrt wie die Cosinuse dieser Winkel."

Setzen wir wieder $\lambda = x_1\varepsilon_1 + y_1\varepsilon_2 + z_1\varepsilon_3$ und beachten wir die Ergebnisse des vorigen Paragraphen, so haben wir unmittelbar:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} = O_1(k_x\varepsilon_1 + k_y\varepsilon_2 + k_z\varepsilon_3) &+ \sum_1^n{}_l \left\{ \begin{vmatrix} y_l & z_l \\ k_{l,y} & k_{l,z} \end{vmatrix} \varepsilon_2\varepsilon_3 + \begin{vmatrix} z_l & x_l \\ k_{l,z} & k_{l,x} \end{vmatrix} \varepsilon_3\varepsilon_1 + \begin{vmatrix} x_l & y_l \\ k_{l,x} & k_{l,y} \end{vmatrix} \varepsilon_1\varepsilon_2 \right\} \\ &- \sum_1^n{}_l \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ k_{l,y} & k_{l,z} \end{vmatrix} \varepsilon_2\varepsilon_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ k_{l,z} & k_{l,x} \end{vmatrix} \varepsilon_3\varepsilon_1 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ k_{l,x} & k_{l,y} \end{vmatrix} \varepsilon_1\varepsilon_2 \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} = O_1(k_x\varepsilon_1 + k_y\varepsilon_2 + k_z\varepsilon_3) &+ \sum_1^n{}_l \left\{ \begin{vmatrix} y_l & z_l \\ k_{l,y} & k_{l,z} \end{vmatrix} \varepsilon_2\varepsilon_3 + \begin{vmatrix} z_l & x_l \\ k_{l,z} & k_{l,x} \end{vmatrix} \varepsilon_3\varepsilon_1 + \begin{vmatrix} x_l & y_l \\ k_{l,x} & k_{l,y} \end{vmatrix} \varepsilon_1\varepsilon_2 \right\} \\ &- \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ k_y & k_z \end{vmatrix} \varepsilon_2\varepsilon_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ k_z & k_x \end{vmatrix} \varepsilon_3\varepsilon_1 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ k_x & k_y \end{vmatrix} \varepsilon_1\varepsilon_2 \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} = O_1(k_x\varepsilon_1 + k_y\varepsilon_2 + k_z\varepsilon_3) &+ \left\{ \sum_1^n{}_l \begin{vmatrix} y_l & z_l \\ k_{l,y} & k_{l,z} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ k_y & k_z \end{vmatrix} \right\} \varepsilon_2\varepsilon_3 \\ &+ \left\{ \sum_1^n{}_l \begin{vmatrix} z_l & x_l \\ k_{l,z} & k_{l,x} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ k_z & k_x \end{vmatrix} \right\} \varepsilon_3\varepsilon_1 \\ &+ \left\{ \sum_1^n{}_l \begin{vmatrix} x_l & y_l \\ k_{l,x} & k_{l,y} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ k_x & k_y \end{vmatrix} \right\} \varepsilon_1\varepsilon_2.\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung giebt $|\gamma$ und dessen Zuwachs $-|\gamma'$ durch deren Componenten parallel den Coordinatenebenen, die letzte das resultirende Moment durch seine Componenten parallel diesen Ebenen.

Setzen wir

$$\gamma' = g'_x\varepsilon_1 + g'_y\varepsilon_2 + g'_z\varepsilon_3,$$

so ist

$$g'_x = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ k_x & k_y \end{vmatrix}, \quad g'_y = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ k_z & k_x \end{vmatrix}, \quad g'_z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ k_x & k_y \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{S} = O_1(k_x\varepsilon_1 + k_y\varepsilon_2 + k_z\varepsilon_3) + (g_x - g'_x)\varepsilon_2\varepsilon_3 + (g_y - g'_y)\varepsilon_3\varepsilon_1 + (g_z - g'_z)\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

$$\gamma_1 = (g_x - g'_x)\varepsilon_1 + (g_y - g'_y)\varepsilon_2 + (g_z - g'_z)\varepsilon_3,$$

$$g_1^2 = (g_x - g'_x)^2 + (g_y - g'_y)^2 + (g_z - g'_z)^2,$$

und wenn $\gamma_1$ mit $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ die Winkel $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}_1$ einschliesst, so haben wir noch:

$$\frac{\cos \mathfrak{l}_1}{g_x - g'_x} = \frac{\cos \mathfrak{m}_1}{g_y - g'_y} = \frac{\cos \mathfrak{n}_1}{g_z - g'_z} = \frac{1}{g_1}.$$

3. Die Centralachse. Wir fanden

$$|\gamma_1 = |\gamma - \lambda \varkappa.$$

Hiernach ändert sich das resultirende Moment im Allgemeinen mit $\lambda$. Unter den Strahlen $\mu$ wird es mithin möglicherweise einen solchen geben, für den die Ebene der resultirenden Momentenfläche senkrecht, das resultirende Achsenmoment parallel zu ihm ist.

Für einen solchen Strahl $\mu_0$, dessen Achsenmoment $\gamma_0$ ist, haben wir, wenn $O_0 = O + \lambda_0$ gesetzt wird, wobei $O_0$ einen beliebigen Punkt von $\mu_0$ bedeutet, zunächst:

$$\gamma_0 = \gamma - |(\lambda_0 \varkappa).$$

Weil $\gamma_0$ und $\varkappa$ zu einander parallel sind, so giebt die Multiplication der vorstehenden Gleichung mit $\varkappa$, indem $\varkappa\gamma_0 = 0$ sein muss, die Bedingung:

$$\gamma\varkappa - |(\lambda_0 \varkappa)\varkappa = 0,$$

oder:

$$|(\gamma\varkappa) - (\lambda_0 \varkappa)|\varkappa = 0.$$

Aber es ist $(\lambda_0 \varkappa)|\varkappa = (\lambda_0|\varkappa)\varkappa - \varkappa^2\lambda_0$, mithin

$$|(\gamma\varkappa) + \varkappa^2\lambda_0 - (\lambda_0|\varkappa)\varkappa = 0,$$

und wenn wir $\lambda_0$ senkrecht zu $\varkappa$ nehmen, was $\lambda_0|\varkappa = 0$ macht, so folgt:

$$\varkappa^2\lambda_0 = |(\varkappa\gamma),$$

$$\lambda_0 = \frac{|(\varkappa\gamma)}{\varkappa^2} = \frac{|(\varkappa\gamma)}{k^2}, \quad l_0 = \frac{g}{k}\sin(\varkappa, \gamma).$$

Ist nun $U_0 = O + \varrho_0$ ein beliebiger Punkt des Strahles $\mu_0$, so ist seine Gleichung:

$$U_0 - O = \varrho_0 = \frac{|(\varkappa\gamma)}{k^2} + v\varkappa,$$

oder:

$$\left(\varrho_0 - \frac{|(\varkappa\gamma)}{k^2}\right)\varkappa = 0.$$

Mit dem für $\lambda_0$ gefundenen Werthe ergiebt sich für das Achsenmoment $\gamma_0$ die Relation:

$$\gamma_0 = \gamma - \frac{(\varkappa\gamma)|\varkappa}{k^2} = \gamma - \frac{1}{k^2}[k^2\gamma - (\varkappa|\gamma)\varkappa],$$

$$\gamma_0 = \frac{\varkappa|\gamma}{k^2}\varkappa, \quad g_0 = g\cos(\varkappa, \gamma).$$

Wir erkennen, dass $\gamma_0$ das kleinste Achsenmoment des Linientheilsystemes ist. Wir nennen den Strahl $\mu_0$ die Centralachse des Vereines von Linientheilen.

„Ein Linientheilsystem besitzt im Allgemeinen eine Centralachse, sie *ist derjenige* Reductionsstrahl, welchem das kleinste Achsenmoment des *Systemes zukommt.*“

Zu demselben Resultate gelangen wir aber auch noch auf etwas anderem Wege.

Für den Strahl $\mu_0$ muss $\gamma_0$ ein gewisses Vielfache von $\varkappa$ sein, so dass mit $U_0 = O + \varrho_0$, wo $U_0$ auf $\mu_0$ gelegen sein soll,

$$\gamma_0 = q\varkappa = \gamma - |(\varrho_0 \varkappa).$$

Die Multiplication der zweiten dieser Gleichungen mit $|\varkappa$ giebt

$$q\varkappa^2 = \varkappa|\gamma, \quad q = \frac{\varkappa|\gamma}{k^2},$$

so dass:

$$\gamma_0 = \frac{\varkappa|\gamma}{k^2}\varkappa, \quad g_0 = g\cos(\varkappa, \gamma).$$

Mit diesem Werthe von $\gamma_0$ erhalten wir

$$\frac{\varkappa|\gamma}{k^2}\varkappa = \gamma - |(\varrho_0\varkappa),$$

und hieraus folgt:

$$\varrho_0\varkappa = |\gamma - \frac{\varkappa|\gamma}{k^2}|\varkappa.$$

Die Multiplication dieser Gleichung mit $|\varkappa$ giebt

$$(\varrho_0\varkappa)|\varkappa = |(\gamma\varkappa),$$

nun ist

$$\varkappa^2\varrho_0 - (\varkappa|\varrho_0)\varkappa = |(\varkappa\gamma),$$

und weil $(\varkappa|\varrho_0)\varkappa = u\varkappa$ ist, so haben wir

$$k^2\varrho_0 = |(\varkappa\gamma) + u\varkappa$$

als Fahrstrahlgleichung der Centralachse, und aus dieser Gleichung geht die weitere:

$$\{k^2\varrho_0 - |(\varkappa\gamma)\}\varkappa = 0$$

hervor.

Das Achsenmoment bezüglich der Centralachse ist:

$$\gamma_0 = \frac{\varkappa|\gamma}{k_2}\varkappa,$$

$$\gamma_0 = g_{0,x}\varepsilon_1 + g_{0,y}\varepsilon_2 + g_{0,z}\varepsilon_3.$$

Durch die erste dieser Gleichungen erhalten wir, indem wir von ihr aus zu den Coordinaten übergehen,

$$\gamma_0 = \frac{1}{k^2}\{(k_x\varepsilon_1 + k_y\varepsilon_2 + k_z\varepsilon_3)|(g_x\varepsilon_1 + g_y\varepsilon_2 + g_z\varepsilon_3)\}(k_x\varepsilon_1 + k_y\varepsilon_2 + k_z\varepsilon_3),$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{k^2}\{k_x g_x + k_y g_y + k_z g_z\}(k_x\varepsilon_1 + k_y\varepsilon_2 + k_z\varepsilon_3)$$

und es ist:

$$g_{0,x} = \frac{k_x}{k^2}(k_x g_x + k_y g_y + k_z g_z), \quad g_{0,y} = \frac{k_y}{k^2}(k_x g_x + k_y g_y + k_z g_z)$$

$$g_{0,z} = \frac{k_z}{k^2}(k_x g_x + k_y g_y + k_z g_z).$$

Weil auch

$$\gamma_0 = \gamma - |(\varrho_0\varkappa)$$

ist, so ergiebt sich noch:

$$\gamma_0 = g_x \varepsilon_1 + g_y \varepsilon_2 + g_z \varepsilon_3 - |[(x_0 \varepsilon_1 + y_0 \varepsilon_2 + z_0 \varepsilon_3)(k_x \varepsilon_1 + k_y \varepsilon_2 + k_z \varepsilon_3)],$$

$$\gamma_0 = \{g_x - (y_0 k_z - z_0 k_y)\}\varepsilon_1 + \{g_y - (z_0 k_x - x_0 k_z)\}\varepsilon_2 + \{g_z - (x_0 k_y - y_0 k_x)\}\varepsilon_3,$$

$$g_{0,x} = g_x - \begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ k_y & k_z \end{vmatrix}, \quad g_{0,y} = g_y - \begin{vmatrix} z_0 & x_0 \\ k_z & k_x \end{vmatrix}, \quad g_{0,z} = g_z - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ k_x & k_y \end{vmatrix}.$$

Sind $l_0$, $m_0$, $n_0$ die Richtungscosinusse der Centralachse, dann ist:

$$g_0^2 = g_{0,x}^2 + g_{0,y}^2 + g_{0,z}^2, \quad \frac{l_0}{g_{0,x}} = \frac{m_0}{g_{0,y}} = \frac{n_0}{g_{0,z}} = \frac{1}{g_0}.$$

Weil, wenn $a$, $b$, $c$ die Richtungscosinusse der Resultanten bedeuten,

$$\frac{a}{k_x} = \frac{b}{k_y} = \frac{c}{k_z} = \frac{1}{k}$$

ist, so erhalten wir durch Verknüpfung der beiden letzten Formeln:

$$\frac{g_{0,x}}{k_x} = \frac{g_{0,y}}{k_y} = \frac{g_{0,z}}{k_z} = \frac{g_0}{k}.$$

Weil $\varkappa\gamma_0 = 0$ ist, so ist auch

$$(g_{0,x}\varepsilon_1 + g_{0,y}\varepsilon_2 + g_{0,z}\varepsilon_3)(k_x \varepsilon_1 + k_y \varepsilon_2 + k_z \varepsilon_3) = 0,$$

welche Gleichung, wenn wir die Multiplication ausführen, in die drei Gleichungen $\begin{vmatrix} g_{0,y} & g_{0,z} \\ k_y & k_z \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} g_{0,z} & g_{0,x} \\ k_z & k_x \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} g_{0,x} & g_{0,y} \\ k_x & k_y \end{vmatrix} = 0$

sich spaltet.

Weil die Gleichung

$$\varkappa | \gamma = \varkappa | \gamma_0$$

besteht, so haben wir

$$k g \cos(\varkappa, \gamma) = k g_0$$

und wenn wir in der vorhergehenden Gleichung die Strecken durch ihre Componenten parallel zu den Coordinatenachsen ausdrücken, sehen wir, dass

$$k_x g_x + k_y g_y + k_z g_z = k_x g_{0,x} + k_y g_{0,y} + k_z g_{0,z}.$$

Noch haben wir

$$\varkappa\gamma = (k_x g_y - k_y g_x)\varepsilon_1\varepsilon_2 + (k_y g_z - k_z g_y)\varepsilon_2\varepsilon_3 + (k_z g_x - k_x g_z)\varepsilon_3\varepsilon_1,$$

mithin ist, indem wir auf diese Gleichung innere Quadratur anwenden,

$$k g \sin(\varkappa, \gamma) = \left\{ \begin{vmatrix} k_x & k_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} k_y & k_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} k_z & k_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Nunmehr ermitteln wir die Gleichungen der Centralachse in rechtwinkligen Coordinaten.

Die erste Fahrstrahlgleichung der Centralachse lautet:

$$k^2 \varrho_0 = |(\varkappa\gamma) + u\varkappa.$$

Zunächst ist mit $u = 0$ die Strecke $\varrho_0 = \lambda_0$,

$$\lambda_0 = \frac{|(\varkappa\gamma)}{k^2},$$

und durch den obigen Werth von $(\varkappa\gamma)$ erhalten wir:

$$\lambda_0 = (x'_0 \varepsilon_1 + y'_0 \varepsilon_2 + z'_0 \varepsilon_3) = \frac{1}{k^2}\left\{\begin{vmatrix} k_y & k_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix} \varepsilon_1 + \begin{vmatrix} k_z & k_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix} \varepsilon_2 + \begin{vmatrix} k_x & k_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} \varepsilon_3\right\},$$

so dass die Coordinaten des Punktes $O_0$ durch

$$k^2 x'_0 = \begin{vmatrix} k_y & k_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}, \quad k^2 y'_0 = \begin{vmatrix} k_z & k_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix}, \quad k^2 z'_0 = \begin{vmatrix} k_x & k_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$$

gegeben sind.

Multipliciren wir die Gleichung der Centralachse mit $|\varkappa$, so ergiebt sich

$$u = \varrho_0 | \varkappa,$$

womit sie übergeht in:

$$k^2 \varrho_0 = |(\varkappa \gamma) + (\varrho_0 | \varkappa) \varkappa.$$

Nun erhalten wir, wenn wir in dieser Gleichung die Strecken mittelst ihrer Coordinaten ausdrücken,

$$k^2(x_0 \varepsilon_1 + y_0 \varepsilon_2 + z_0 \varepsilon_3) = (k_y g_z - k_z g_x)\varepsilon_1 + (k_z g_x - k_x g_z)\varepsilon_2 + (k_x g_y - k_y g_x)\varepsilon_3$$
$$+ (k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0)(k_x \varepsilon_1 + k_y \varepsilon_2 + k_z \varepsilon_3),$$

mithin sind die Coordinatengleichungen des Strahles $\mu_0$:

$$k^2 x_0 - k_x(k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0) = \begin{vmatrix} k_y & k_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix},$$

$$k^2 y_0 - k_y(k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0) = \begin{vmatrix} k_z & k_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix},$$

$$k^2 z_0 - k_z(k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0) = \begin{vmatrix} k_x & k_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix},$$

zu deren Bestimmung je zwei derselben genügen.

Es ist

$$k^2(\varrho_0 - \lambda_0) = u\varkappa = (\varrho_0 | \varkappa)\varkappa,$$

woraus durch innere Quadratur folgt:

$$k^2(\varrho_0 - \lambda_0)^2 = (\varrho_0 | \varkappa)^2,$$

mithin:

$$\sqrt{(\varrho_0 - \lambda_0)^2} = \frac{\varrho_0 | \varkappa}{k} = \frac{1}{k}(k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0) = s,$$

die durch die Länge der Reductionsresultanten getheilte symmetrische Function giebt die Länge des Abstandes des Punktes $U_0$ der Centralachse vom Endelemente $L_0$ der Strecke $\lambda_0$.

Beachten wir die obigen Werthe der Determinanten auf den rechten Seiten der Gleichungen der Centralachse und die letzte Relation, dann nehmen ihre Gleichungen die einfachste Form an, es ist:

$$\frac{x_0 - x'_0}{k_x} = \frac{y_0 - y'_0}{k_y} = \frac{z_0 - z'_0}{k_z} = \frac{s}{k}.$$

Die zweite Form der Gleichung der Centralachse lautet:

$$\{k^2 \varrho_0 - |(\varkappa \gamma)\}\varkappa = 0.$$

Setzen wir in diese die durch die Coordinaten ausgedrückten Werthe der Strecken ein, multipliciren wir sodann aus und ziehen wir die Grössen,

welche gleiche Einheiten zweiter Stufe aufweisen, zusammen, dann zerfällt die resultirende Gleichung in die drei Gleichungen

$$k^2(k_y x_0 - k_x y_0) = (k_y g_z - k_z g_y)k_y - (k_z g_x - k_x g_z)k_x,$$
$$k^2(k_x z_0 - k_z x_0) = (k_x g_y - k_y g_x)k_x - (k_y g_z - k_z g_y)k_z,$$
$$k^2(k_z y_0 - k_y z_0) = (k_z g_x - k_x g_z)k_z - (k_x g_y - k_y g_x)k_y,$$

womit drei weitere Coordinatengleichungen der Centralachse gegeben sind.

Sind $\varkappa$ und $\gamma$ für irgend einen Strahl $\mu$ gegeben, dann liegt der Strahl $\mu_0$ für einen vom Endpunkte des Achsenmomentes $\gamma$ nach dem Endpunkte von $O\varkappa$ sehenden Punkt links von diesem Punkte (Fig. 3).

Bereits die Gleichung der Centralachse zeigt, dass es nur eine solche geben kann. Bezüglich der Centralachse ist

$$\mathfrak{S} = O_0\varkappa + |\gamma_0.$$

Gäbe es noch eine zweite Centralachse, dann müsste sein:

$$\mathfrak{S} = O'_0\varkappa + |\gamma'_0,$$

es müsste also sein: $(O_0 - O'_0)\varkappa + |(\gamma_0 - \gamma'_0) = 0,$

welche Gleichung aber nur mit $O'_0 = O_0$ und $\gamma'_0 = \gamma_0$ befriedigt werden kann, so dass beide Centralachsen zusammenfallen müssen.

4. Ein Verein von Linientheilen ist im Allgemeinen äquivalent einer Resultanten und einem Paare, es ist

$$\mathfrak{S} = O\varkappa + |\gamma$$

für den durch $O$ gehenden zu $\varkappa$ parallelen Strahl $\mu$.

Die verschiedenen Fälle, welche eintreten können, sind:

a) $O\varkappa = 0, \quad \gamma \gtrless 0,$
b) $O\varkappa \gtrless 0, \quad \gamma = 0,$
c) $O\varkappa = 0, \quad \gamma = 0,$
d) $O\varkappa \gtrless 0, \quad \gamma \lessgtr 0.$

a) $O\varkappa = 0$, $\gamma \gtrless 0$. In diesem Falle haben wir:

$$\mathfrak{S} = |\gamma.$$

Das System ist einem Paare äquivalent, das Summationspolygon der Strecken der Linientheile schliesst sich für alle Reductionen, das resultirende Paar ist für jede Reduction dasselbe, es ist

$$\gamma = \gamma_0, \quad \lambda_0 = \frac{|(\varkappa\gamma)}{k^2} = \frac{0}{0},$$

jede zu $\gamma$ parallele Gerade kann als Centralachse angesehen werden, es ist

$$k_x = k_y = k_z = 0, \quad \gamma = g_x\varepsilon_1 + g_y\varepsilon_2 + g_z\varepsilon_3,$$

und es ist wenigstens eine der Componenten von $\gamma$ ungleich Null.

*b)* $O\varkappa \gtrless 0$, $\gamma = 0$. Das Polygon der Achsenmomente schliesst sich *für den Strahl* $\mu$ des Punktes O, für alle übrigen Strahlen $\mu$ nicht, weil

$\varkappa \gtrless 0$ ist; ferner haben wir $l_0 = 0$, der Strahl $\mu$ des Punktes $O$ ist Centralachse, das System äquivalent einer Einzelresultante längs dieser, die Achsenmomente sind normal zu den Strahlen $\mu$. Damit das System auf eine Einzelresultante sich reducire, muss sein:

$$\varkappa | \gamma = 0, \text{ das ist } \gamma \perp \varkappa, \quad k_x g_x + k_y g_y + k_z g_z = 0,$$

und es sind die Coordinatengleichungen der Centralachse:

$$g_x - \begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ k_y & k_z \end{vmatrix} = 0, \quad g_y - \begin{vmatrix} z_0 & x_0 \\ k_z & k_x \end{vmatrix} = 0, \quad g_z - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ k_x & k_y \end{vmatrix} = 0.$$

c) $O\varkappa = 0$, $\gamma = 0$. Das System ist äquivalent Null, $\lambda_0 = \frac{0}{0}$, die Fahrstrahlen der Centralachse sind unbestimmt, jeder Strahl des Raumes kann als Centralachse angesehen werden.

Damit das System äquivalent Null sei, müssen wir haben:

$$\varkappa = 0, \qquad \gamma = 0,$$
$$k_x = 0, \; k_y = 0, \; k_z = 0, \quad g_x = 0, \; g_y = 0, \; g_z = 0,$$

für irgend eine Reduction.

d) $O\varkappa \gtrless 0$, $\gamma \gtrless 0$. Dann ist im Allgemeinen das System äquivalent einer Resultanten längs der Centralachse und einem Paare, dessen Ebene auf diesem Strahle senkrecht steht.

Damit das System einer Einzelstrecke äquivalent sei, muss

$$\gamma_0 = 0, \text{ das ist } \varkappa | \gamma = 0, \quad \gamma \perp \varkappa$$

sein.

5. Die Lagerung der Achsenmomente eines Vereines von Linientheilen. Ist die Reduction des Systemes für die Centralachse $\mu_0$ bekannt,

$$\mathfrak{S} = O_0 \varkappa + |\gamma_0,$$

dann ist die Reduction für den Strahl $\mu$ durch $O = O_0 + \lambda$:

$$\mathfrak{S} = O\varkappa + |\gamma_0 - \lambda\varkappa = O\varkappa + |\gamma_0 - |\gamma',$$
$$\mathfrak{S} = O\varkappa + |\gamma, \quad \gamma = \gamma_0 - \gamma'.$$

Das Achsenmoment ändert sich im Allgemeinen von Punkt zu Punkt und es kommt nun darauf an, zu untersuchen, wie diese Aenderung beschaffen ist.

a) Die Achsenmomente einer geraden Punktreihe. Die Gleichung der durch den Punkt $O = O_0 + \lambda$ gehenden, zu $\varepsilon$ parallelen Geraden lautet:

$$U - O_0 = \varrho = \lambda + u\varepsilon,$$

daher ist die Reduction für die Punkte dieses Strahles:

$$\mathfrak{S} = U\varkappa + |\gamma_0 - (\lambda + u\varepsilon)\varkappa,$$

mithin besteht für deren Achsenmomente die Gleichung:

$$\gamma = \gamma_0 - |[(\lambda + u\varepsilon)\varkappa] = [\gamma_0 - |(\lambda\varkappa)] - u|(\varepsilon\varkappa),$$

welche diejenige einer geraden Linie ist, wenn wir $\gamma_0$ und $\gamma$ in irgend einem Punkte des Raumes entspringen lassen, dieselbe geht durch den End-

punkt von $[\gamma_0 - |(\lambda\varkappa)]$ und ist parallel zu $|(\varepsilon\varkappa)$, sie heisst der Hodograph der Achsenmomente der gegebenen Geraden.

Lassen wir die Strecken $\gamma$ in den Punkten der Geraden entspringen, setzen $\varrho + \gamma = \tau$, dann ist

$$\tau = \lambda + \gamma_0 - |(\lambda\varkappa) + u[\varepsilon - |(\varepsilon\varkappa)]$$

die Fahrstrahlgleichung der Geraden, welche durch $O_0 + [\lambda + \gamma_0 - |(\lambda\varkappa)]$ geht und parallel zu $[\varepsilon - |(\varepsilon\varkappa)]$ ist.

„Der Hodograph der Achsenmomente einer geraden Punktreihe ist eine gerade Linie, die Achsenmomente sind einer Ebene parallel. Der Ort der Endpunkte der Achsenmomente einer geraden Punktreihe ist eine gerade Linie."

Sei die Gleichung der durch die Punkte $A_1 = O_0 + \varrho_1$, $A_2 = O_0 + \varrho_2$ gehenden geraden Linie

$$U - O_0 = \varrho = m\varrho_1 + n\varrho_2, \quad m + n = 1.$$

Das Achsenmoment im Punkte $U = O_0 + \varrho$ ist:

$$G - O_0 = \gamma = \gamma_0 - |(\varrho\varkappa),$$

$$\gamma = m[\gamma_0 - |(\varrho_1\varkappa)] + n[\gamma_0 - |(\varrho_2\varkappa)], \quad m + n = 1,$$

daher der Hodograph der Achsenmomente eine durch $O_0 + \gamma_0$ gehende gerade Linie, welche senkrecht zu $\gamma_0$ ist.

Mit $O_0 + \tau = O_0 + \varrho + \gamma$ erhalten wir

$$\tau = m[\gamma_0 + \varrho_1 - |(\varrho_1\varkappa)] + n[\gamma_0 + \varrho_2 - |(\varrho_2\varkappa)], \quad m + n = 1,$$

die Fahrstrahlgleichung des geradlinigen Ortes der Endelemente der Achsenmomente der geraden Punktreihe.

Ist die gerade Linie parallel zur Centralachse, so ist ihre Gleichung:

$$U - O_0 = \varrho = \lambda + u\varkappa,$$

daher:

$$\gamma = \gamma_0 - |(\lambda\varkappa),$$

$$\tau = [\gamma_0 + \lambda - |(\lambda\varkappa)] + u\varkappa.$$

„Die Achsenmomente einer zur Centralachse parallelen geraden Punktreihe sind einander gleich, ihre Endelemente liegen auf einer zur Centralachse parallelen geraden Linie. Der Hodograph der Achsenmomente ist ein Punkt."

Ist noch $\lambda = 0$, dann ist $\gamma = \gamma_0$; die Achsenmomente der mit der Centralachse zusammenfallenden Punktreihe sind, wie bereits bekannt, constant und parallel zur Centralachse.

Mit $\lambda = \infty\varepsilon'$ ergiebt sich:

$$\gamma = \gamma_0 - |[\infty\varepsilon'\varkappa] = -\infty|(\varepsilon'\varkappa),$$

so dass im Allgemeinen den unendlich fernen Strahlen $\mu$ unendlich grosse Achsenmomente zukommen.

b) Die Achsenmomente eines Punktfeldes. Die Ebene schneide die Centralachse in $O$ und gehe durch die Punkte $A = O + \alpha$, $B = O + \beta$, alsdann ist ihre Gleichung:

$$U - O = \varrho = u\alpha + v\beta,$$

in welcher $u$ und $v$ von einander unabhängige Variablen sind.

Das Achsenmoment im Punkte $u$ ist

$$\gamma = \gamma_0 - |(\varrho\varkappa) = \gamma_0 - u|(\alpha\varkappa) - v|(\beta\varkappa).$$

Mit $\gamma = G - O$ ist diese Gleichung diejenige einer Ebene, welche durch $O + \gamma_0$ geht und parallel zu den Strecken $|(\alpha\varkappa)$, $|(\beta\varkappa)$ ist.

„Der Hodograph der Achsenmomente eines Punktfeldes ist eine Ebene."

Mit $u = v = 0$ ist $\gamma = \gamma_0$, resultirt das Achsenmoment der Centralachse. Mit $u = \infty$, oder $v = \infty$, oder $u = v = \infty$ wird $\gamma$ unendlich gross, die Achsenmomente der Punkte der unendlich fernen Geraden einer Ebene sind im Allgemeinen unendlich gross.

Die Gleichung des Hodographen kann geschrieben werden:

$$\gamma_0 - \gamma = u|(\alpha\varkappa) + v|(\beta\varkappa),$$

multipliciren wir diese Relation mit $|\gamma_0$, so folgt, indem $\varkappa\gamma_0 = 0$ ist,

$$(\gamma_0 - \gamma)|\gamma_0 = 0,$$

und es ist $(\gamma_0 - \gamma)$ eine in der Hodographenebene gelegene Strecke.

„Der Hodograph der Achsenmomente eines Punktfeldes ist eine zu der Richtung der Strahlen $\mu$ senkrechte Ebene, welche vom Coordinatenpole den Normalabstand $\gamma_0$ besitzt. Alle Punktfelder haben ein und denselben Hodographen".

Dadurch lässt sich die Centralachse construiren, wenn die Achsenmomente $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ der Punkte $M$, $M'$, $M''$, die nicht in einer Geraden liegen, bekannt sind. Mit $G = A + \gamma$, $G' = A + \gamma'$, $G'' = A + \gamma''$, wobei $A$ irgend ein Punkt des Raumes ist, liegen $G$, $G'$ und $G''$ in einer Ebene; die zu dieser Ebene senkrechte Strecke $(G_0 - A)$ ist gleich $\gamma_0$, womit die Richtung der Strahlen $\mu$ gegeben ist. Legen wir nun durch $\mu$ von $M'$ die zu $[\mu\gamma]$ senkrechte Ebene, durch $\mu'$ von $M'$ die zu $[\mu'\gamma']$ senkrechte Ebene, so ist die Schnittlinie dieser beiden Ebenen die Centralachse $\mu_0$.

Ferner erhalten wir, mit $O + \tau = O + \varrho + \gamma$,

$$\tau = \gamma_0 + u[\alpha - |(\alpha\varkappa)] + v[\beta - |(\beta\varkappa)],$$

die Fahrstrahlgleichung des Ortes der Endelemente der Achsenmomente eines Punktfeldes.

„Der Ort der Endelemente der Achsenmomente eines Punktfeldes ist eine Ebene, welche die Centralachse im Punkte $O + \gamma_0$ schneidet."

Die Achsenmomente eines Punktfeldes bilden mit seiner Ebene im Allgemeinen verschiedene Winkel, so dass es Punkte geben kann, deren Achsenmomente senkrecht zu der Ebene sind, Punkte vorhanden sein können, deren Achsenmomente in das Feld hineinfallen.

Die zum Felde senkrechten Achsenmomente sind Vielfache von $|(\alpha\beta)$, für diese Momente haben wir daher die Bedingung:

$$\gamma = \gamma_0 - |[(u\alpha + v\beta)\varkappa] = q|(\alpha\beta).$$

Die Multiplication der zweiten dieser Gleichungen mit $|\gamma_0$ giebt, indem $\varkappa\gamma_0 = 0$ ist,

$$\gamma_0^2 = q(\alpha\beta\gamma_0), \quad q = \frac{\gamma_0^2}{\alpha\beta\gamma_0}.$$

Bezeichnet $\gamma_s$ die zum Punktfelde senkrechten Achsenmomente, so ist

$$\gamma_s = \frac{\gamma_0^2}{\alpha\beta\gamma_0}|(\alpha\beta).$$

Nun haben wir:

$$\gamma_0 - u|(\alpha\varkappa) - v|(\beta\varkappa) = \frac{\gamma_0^2}{\alpha\beta\gamma_0}|(\alpha\beta),$$

aus welcher Gleichung die Werthe von $u$ und $v$ für die ausgezeichneten Punkte folgen. Multipliciren wir sie zuerst mit $|\beta$, sodann mit $|\alpha$, so ergiebt sich:

$$u = \frac{\gamma_0|\beta}{\alpha\varkappa\beta}, \quad v = \frac{\gamma_0|\alpha}{\beta\varkappa\alpha}.$$

Diese Werthe von $u$ und $v$ in die Gleichung der Ebene substituirt, erhalten wir, wenn $\varrho_s$ den Fahrstrahl nach den ausgezeichneten Punkten bezeichnet,

$$\varrho_s = \frac{\gamma_0|\beta}{\alpha\varkappa\beta}\alpha + \frac{\gamma_0|\alpha}{\beta\varkappa\alpha}\beta,$$

und diese Gleichung liefert nur einen Punkt $P = O + \varrho_s$, welcher der Pol des Punktfeldes genannt wird.

Ferner haben wir den Ort der Punkte des Feldes zu ermitteln, deren Achsenmomente in dasselbe hineinfallen.

Diese Achsenmomente sind Vielfachensummen der Strecken $\alpha$ und $\beta$, daher haben wir für sie die Bedingung:

$$\gamma_0 - u|(\alpha\varkappa) - v|(\beta\varkappa) = q\alpha + r\beta.$$

Die Multiplication dieser Gleichung mit $(\alpha\beta)$ giebt:

$$\alpha\beta\gamma_0 - u(\alpha\beta)|(\alpha\varkappa) - v(\alpha\beta)|(\beta\varkappa) = 0,$$

woraus

$$v = \frac{\alpha\beta\gamma_0 - u(\alpha\beta)|(\alpha\varkappa)}{(\alpha\beta)|(\beta\varkappa)}$$

folgt. Setzen wir diesen Werth von $v$ in die Gleichung der Ebene ein, so ergiebt sich:

$$\varrho = \frac{\alpha\beta\gamma_0}{(\alpha\beta)|(\beta\varkappa)}\beta + u\left\{\alpha - \frac{(\alpha\beta)|(\alpha\varkappa)}{(\alpha\beta)|(\beta\varkappa)}\beta\right\},$$

die Fahrstrahlgleichung einer geraden Linie, welche parallel zu der Strecke in der Hakenklammer ist und die Charakteristik der Ebene genannt wird.

Substituiren wir den Werth von $v$ in die Gleichung des Achsenmomentes, so resultirt:

$$\gamma = \gamma_0 - \frac{\alpha\beta\gamma_0}{(\alpha\beta)|(\beta\varkappa)}|(\beta\varkappa) - u\frac{[(\alpha\beta)|(\beta\varkappa)]|(\alpha\varkappa) - [(\alpha\beta)|(\alpha\varkappa)]|(\beta\varkappa)}{(\alpha\beta)|(\beta\varkappa)}.$$

„Jede Ebene besitzt im Allgemeinen einen Punkt (Pol), in dem das Achsen*moment* senkrecht zu ihr ist, und eine gerade Punktreihe (Charakteristik), *deren Achsen*momente in dieselbe hineinfallen."

Bilden wir das Product aus der Richtstrecke der Charakteristik, $\varkappa$ und der zu dem Punktfelde senkrechten Strecke $|(\alpha\beta)$, so erhalten wir:

$$\left\{\alpha - \frac{(\alpha\beta)|(\alpha\varkappa)}{(\alpha\beta)|(\beta\varkappa)}\beta\right\}\varkappa|(\alpha\beta) = \frac{[(\alpha\varkappa)|(\alpha\beta)][(\alpha\beta)|(\beta\varkappa)] - [(\alpha\beta)|(\alpha\varkappa)][(\beta\varkappa)|(\alpha\beta)]}{(\alpha\beta)|(\beta\varkappa)} = 0.$$

„Die Centralachse, die Charakteristik und die Normale eines Feldes sind einer Ebene parallel."

Ist das Punktfeld senkrecht zur Centralachse, dann ist, wenn $\varepsilon$ die Einheitsstrecke dieser Linie bedeutet, $\alpha|\varepsilon = 0$, $\beta|\varepsilon = 0$,

$$\gamma_s = \frac{\gamma_0^2}{\alpha\beta\gamma_0} ab \sin(\alpha, \beta)\varepsilon = g_0\varepsilon = \gamma_0, \quad \varrho_s = 0,$$

für die Charakteristik erhalten wir, da dann $v = \infty$ ist,

$$\varrho = u\alpha + \infty\beta,$$

und die Achsenmomente dieser Punktreihe sind:

$$\gamma = \gamma_0 - u\,|\,(\alpha\varkappa) - \infty\,|\,(\beta\varkappa) = \infty\,|\,(\varkappa\beta).$$

„Ist die Ebene senkrecht zur Centralachse, dann ist ihr Schnittpunkt mit der Centralachse ihr Pol, das Achsenmoment des Poles gleich dem der Centralachse, die unendlich ferne Gerade derselben ihre Charakteristik."

Geht das Punktfeld durch die Centralachse, dann ist $\alpha = m\gamma_0$, mithin

$$\varrho = u\gamma_0 + v\beta$$

seine Gleichung. Wir haben in diesem Falle:

$$\gamma_s = \infty\,|\,(\gamma_0\beta), \quad \varrho_s = \infty(\gamma_0 + \beta),$$

die Gleichung der Charakteristik und die Achsenmomente ihrer Punkte sind:

$$\varrho = u\gamma_0, \quad \gamma = \gamma_0.$$

„Enthält ein Punktfeld die Centralachse, dann liegt sein Pol unendlich fern, seine Charakteristik coincidirt mit der Centralachse."

c) Die Reduction für alle Strahlen $\mu$, welche auf einer Kreiscylinderfläche mit $\mu$ als Achse liegen.

Bedeutet $\lambda$ die Halbmesserstrecke des Cylinders, dann ist:

$$\mathfrak{S} = U\varkappa + |\gamma_0 - \lambda\varkappa, \quad \gamma = \gamma_0 - |(\lambda\varkappa).$$

Das Rechteck aus $\gamma_0$ und $-|(\lambda\varkappa)$ ist für alle Cylinderstrahlen von constanter Grösse und Gestalt, es ist

$$\gamma^2 = \gamma_0^2 + (\lambda\varkappa)^2, \quad \varkappa\,|\,\gamma = kg_0,$$

für sämmtliche Cylinderstrahlen das Achsenmoment von constanter Grösse und gleich geneigt gegen dieselben.

Legen wir durch die Endelemente der Strecken $\lambda$ zu den Achsenmomenten daselbst parallele Strahlen, dann entsteht eine geradlinige Fläche, deren Erzeugenden den Cylinder berühren, denn diese sind senkrecht zu $\lambda$. Ist $U = O + \varrho$ ein beliebiger Punkt einer Erzeugenden, dann ist

$$\varrho = \lambda + v[\gamma_0 - |(\lambda\varkappa)]$$

ihre Fahrstrahlgleichung, bei variablem $\lambda$ diejenige der geradlinigen Fläche.

Mit $O$ als Ursprung rechtwinkliger Coordinaten, wobei die $z$ Achse mit der Centralachse zusammenfällt, ist

$$\lambda = u\varepsilon_1 + \sqrt{l^2 - u^2}\,\varepsilon_2, \quad \gamma = g_0\varepsilon_3 + k(u\varepsilon_2 - \sqrt{l^2 - u^2}\,\varepsilon_1),$$

und damit ergiebt sich als Fahrstrahlgleichung der geradlinigen Fläche

$$\varrho = (u - vk\sqrt{l^2 - u^2})\,\varepsilon_1 + (\sqrt{l^2 - u^2} + vku)\,\varepsilon_2 + vg_0\varepsilon_3,$$

welche einem Rotations-Hyperboloide angehört.

Mit $u = l\cos t$ ist $\sqrt{l^2 - u^2} = l\sin t$. wodurch wir die Gleichung der Fläche schreiben dürfen:

$$\varrho = l(\cos t - kv\sin t)\,\varepsilon_1 + l(\sin t + kv\cos t)\,\varepsilon_2 + g_0 v\varepsilon_3.$$

Nun ist, mit $\varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3$, wo jetzt $x$, $y$ und $z$ die laufenden Coordinaten der Fläche bedeuten,

$$x = l(\cos t - kv\sin t), \quad y = l(\sin t + kv\cos t), \quad z = g_0 v,$$

und es giebt die Elimination der Variablen $t$ und $v$ aus diesen Gleichungen:

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{l^2} - \frac{k^2}{g_0^2}z^2 = 1,$$

womit die gewöhnliche Gleichung eines geradlinigen Hyperboloides vor uns steht. Je weiter sich die Strahlen $\mu$ des Cylinders von der Centralachse entfernen, um so grösser wird $|(\lambda\varkappa)$, um so grösser der Winkel $\sphericalangle(\varkappa, \gamma)$.

Mit $l = \infty$ wird $\sphericalangle(\varkappa, \gamma) = \frac{1}{2}\pi$,

$$\gamma = \infty(\cos t\,\varepsilon_2 - \sin t\,\varepsilon_1),$$
$$\varrho = \infty\{(\cos t - \sin t)\,\varepsilon_1 + (\sin t + \cos t)\,\varepsilon_2\},$$
$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = \infty,$$

die Achsenmomente liegen senkrecht zu $\mu_0$, das Hyperboloid degenerirt in die unendlich ferne Gerade der $xy$ Ebene.

Mit $l = 0$ wird: $\quad \gamma = \gamma_0, \quad \varrho = u\varepsilon_3,$

das Hyperboloid degenerirt in die Centralachse.

d) Die Lagerung der Achsenmomente eines durch die Centralachse gehenden Punktfeldes.

Die Achsenmomente der Strahlen $\mu$ einer solchen Ebene in den Abständen $\lambda$ von $\mu_0$ sind:

$$\gamma = \gamma_0 - |(\lambda\varkappa).$$

Weil

$$\gamma\{\gamma_0 | (\lambda\varkappa)\} = 0$$

ist, so sind die Achsenmomente parallel zu der durch $\gamma_0$ und $|(\lambda\varkappa)$ bestimmten Ebene.

...urch die Schnittpunkte der Strahlen $\mu$ und der zu ihnen ...rch $O$ in dem Felde parallele Strahlen zu den ...len $\mu$, so entsteht eine geradlinige Fläche, deren

$$\varrho = f(t) + v\varphi(t)$$

lautet. Nehmen wir $O$ als Ursprung rechtwinkliger Coordinaten, die vorhin genannte Gerade als Achse der $x$, die Centralachse als Achse der $z$, dann ist die Gleichung der Leitlinie der Fläche:

$$f(t) = \lambda = t\varepsilon_1,$$

ihre Erzeugenden sind parallel zu

$$\varphi(t) = \gamma_0 - |(\lambda\varkappa) = g_0\varepsilon_3 + tk\varepsilon_2,$$

mithin ist die Fahrstrahlgleichung der Fläche:

$$\varrho = t\varepsilon_1 + v(tk\varepsilon_2 + g_0\varepsilon_3),$$

und aus dieser folgt mit $v = 1$:

$$\varrho = t(\varepsilon_1 + k\varepsilon_2) + g_0\varepsilon_3,$$

die Gleichung des Ortes der Endelemente der Achsenmomente der Punktreihe auf der Geraden $\varepsilon_1$.

Nun ist: $\quad x = t, \quad y = vtk, \quad z = vg_0,$

die Elimination von $t$ und $v$ aus diesen Gleichungen giebt:

$$g_0 y - kxz = 0,$$

so dass die Coordinatengleichung der Fläche gewonnen ist, welche ein hyperbolisches Paraboloid ist.

## § 5. Aequivalenz eines Vereines von Linientheilen, die einer gegebenen Richtung parallel sind.

1. Besteht ein Linientheilsystem aus parallelen Elementen, dann sind die Strecken derselben Vielfache einer zu ihnen parallelen Strecke $\varepsilon$, es ist:

$$A_l B_l = A_l(B_l - A_l) = A_l m_l \varepsilon = m_l A_l \varepsilon,$$

wobei wir uns $\varepsilon$ als Einheitsstrecke denken wollen.

Dadurch wird die Reduction des Systemes für den beliebigen Punkt $O$ des Raumes:

$$\mathfrak{S} = O\sum_1^n {}_l m_l \varepsilon + \sum_1^n {}_l \varrho_l m_l \varepsilon,$$

$$\mathfrak{S} = \sum_1^n {}_l m_l (O\varepsilon) + \sum_1^n {}_l m_l \varrho_l \varepsilon,$$

und wenn wir $\sum_1^n {}_l m_l = m, \quad \sum_1^n {}_l m_l \varrho_l \varepsilon = |\gamma$ setzen:

$$\mathfrak{S} = m(O\varepsilon) + |\gamma.$$

„Die Reductionsresultante ist parallel zu den Linientheilen des Systemes, das Summationspolygon der Strecken der Linientheile fällt in eine zu $\varepsilon$ parallele Gerade hinein. Das Achsenmoment $\gamma_l = m_l|(\varrho_l \varepsilon)$ ist senkrecht zu $\varepsilon$, daher ist das Summationspolygon der Achsenmomente ein ebenes Polygon, seine Ebene senkrecht zur Richtung der Strahlen $\mu$."

Wählen wir den Punkt $O$ als Ursprung rechtwinkliger Coordinaten, setzen:

$$\varepsilon = \sum_1^3{}_l\, a_l \varepsilon_l, \quad (\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1),$$

so dass

$$k_l = m_l \sum_1^3{}_l\, a_l \varepsilon_l$$

ist,

$$\varrho_l = x_l \varepsilon_1 + y_l \varepsilon_2 + z_l \varepsilon_3,$$

so ergiebt sich:

$$\mathfrak{S} = m\,O(a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3) + \sum_1^n{}_l\, m_l (x_l \varepsilon_1 + y_l \varepsilon_2 + z_l \varepsilon_3)(a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3),$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} = m\,O(a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3) &+ \Big(a_3 \sum_1^n{}_l\, m_l y_l - a_2 \sum_1^n{}_l\, m_l z_l\Big) \varepsilon_2 \varepsilon_3, \\ &+ \Big(a_1 \sum_1^n{}_l\, m_l z_l - a_3 \sum_1^n{}_l\, m_l x_l\Big) \varepsilon_3 \varepsilon_1, \\ &+ \Big(a_2 \sum_1^n{}_l\, m_l x_l - a_1 \sum_1^n{}_l\, m_l y_l\Big) \varepsilon_1 \varepsilon_2.\end{aligned}$$

Damit sind die Componenten der Resultanten parallel den Coordinatenachsen und diejenigen des resultirenden Momentes parallel den Coordinatenebenen gegeben, dieselben sind:

$$\varkappa_x = m a_1 O \varepsilon_1, \quad \varkappa_y = m a_2 O \varepsilon_2, \quad \varkappa_z = m a_3 O \varepsilon_3,$$

$$k_x = m a_1, \qquad k_y = m a_2, \qquad k_z = m a_3;$$

$$|\gamma_x = \Big(a_3 \sum_1^n{}_l\, m_l y_l - a_2 \sum_1^n{}_l\, m_l z_l\Big) \varepsilon_2 \varepsilon_3,$$

$$|\gamma_y = \Big(a_1 \sum_1^n{}_l\, m_l z_l - a_3 \sum_1^n{}_l\, m_l x_l\Big) \varepsilon_3 \varepsilon_1,$$

$$|\gamma_z = \Big(a_2 \sum_1^n{}_l\, m_l x_l - a_1 \sum_1^n{}_l\, m_l y_l\Big) \varepsilon_1 \varepsilon_2,$$

und es ist:

$$\gamma = \gamma_x + \gamma_y + \gamma_z, \quad g_x \varepsilon_1 + g_y \varepsilon_2 + g_z \varepsilon_3, \quad g^2 = g_x^2 + g_y^2 + g_z^2.$$

2. Für einen anderen Reductionsstrahl $\mu_1$ ist, wenn die Reduction für den Strahl $\mu$ bekannt ist, $O_1 = O + \lambda$ gesetzt wird:

$$\mathfrak{S} = m\,O_1 \varepsilon + |\gamma - \lambda \sum_1^n{}_l\, m_l \varepsilon,$$

$$\mathfrak{S} = m\,O_1 \varepsilon + \sum_1^n{}_l\, m_l \varrho_l \varepsilon - \sum_1^n{}_l\, m_l (\lambda \varepsilon).$$

Nehmen wir $\lambda = x' \varepsilon_1 + y' \varepsilon_2 + z' \varepsilon_3$, so ergiebt sich durch den Uebergang zu den Coordinaten:

$$\mathfrak{S} = O_1(k_x\varepsilon_1 + k_y\varepsilon_2 + k_z\varepsilon_3) + \{g_x - m(a_3y' - a_2z')\}\,\varepsilon_2\varepsilon_3$$
$$+ \{g_y - m(a_1z' - a_3x')\}\,\varepsilon_3\varepsilon_1 + \{g_z - m(a_2x' - a_1y')\}\,\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

welche Formel sagt, dass

$$g'_x = m(a_3y' - a_2z'),\quad g'_y = m(a_1z' - a_3x'),\quad g'_z = m(a_2x' - a_1y')$$

ist.

3. Die allgemeine Fahrstrahlgleichung der Centralachse lautet:

$$k^2\varrho_0 = |(\varkappa\gamma) + v\varkappa.$$

Im vorliegenden Falle ist $\varkappa = m\varepsilon$, $\gamma_l = m_l|(\varrho_l\varepsilon)$, mithin:

$$m^2\varrho_0 = \Big|\Big[m\varepsilon\Big|\sum_1^n{}_l\, m_l\varrho_l\varepsilon\Big] + v\varepsilon,$$

$$m\varrho_0 = \Big|\Big[\varepsilon\Big|\sum_1^n{}_l\, m_l\varrho_l\varepsilon\Big] + u\varepsilon.$$

Setzen wir für den Augenblick $\sum_1^n{}_l\, m_l\varrho_l = \varrho'$, so wird

$$m\varrho_0 = |[\varepsilon|(\varrho'\varepsilon)] + u\varepsilon = \varrho' - (\varrho'|\varepsilon)\,\varepsilon + u\varepsilon,$$

mithin ist:

$$m\varrho_0 = \sum_1^n{}_l\, m_l\varrho_l - \Big(\varepsilon\Big|\sum_1^n{}_l\, m_l\varrho_l\Big)\,\varepsilon + u\varepsilon,$$

oder:

$$\varrho_0 = \frac{\sum_1^n{}_l\, m_l\varrho_l}{m} - \frac{\varepsilon\Big|\sum_1^n{}_l\, m_l\varrho_l}{m}\,\varepsilon + u\varepsilon$$

die Fahrstrahlgleichung der Centralachse, aus der als weitere Gleichung derselben hervorgeht:

$$\Big(m\varrho_0 - \sum_1^n{}_l\, m_l\varrho_l\Big)\,\varepsilon = 0.$$

Drücken wir in dieser Gleichung $\varrho_0$, $\varrho_l$ und $\varepsilon$ mittelst ihrer Coordinaten aus, so folgt:

$$\Big[\Big(m x_0 - \sum_1^n{}_l\, m_l x_l\Big)\,\varepsilon_1 + \Big(m y_l - \sum_1^n{}_l\, m_l y_l\Big)\,\varepsilon_2$$
$$+ \Big(m z_0 - \sum_1^n{}_l\, m_l z_l\Big)\,\varepsilon_3\Big](a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3) = 0.$$

Diese Gleichung spaltet sich, wenn wir die Multiplication auf ihrer linken Seite ausführen, in:

$$m a_2 x_0 - m a_1 y_0 - a_2\sum_1^n{}_l\, m_l x_l + a_1\sum_1^n{}_l\, m_l y_l = 0,$$

$$m a_1 z_0 - m a_3 x_0 - a_1\sum_1^n{}_l\, m_l z_l + a_3\sum_1^n{}_l\, m_l x_l = 0,$$

$$m a_3 y_0 - m a_2 z_0 - a_3\sum_1^n{}_l\, m_l y_l + a_2\sum_1^n{}_l\, m_l z_l = 0,$$

womit die *Coordinatengleichungen* der Centralachse bekannt geworden sind.

4. Ist $U_0$ ein beliebiger Punkt der Centralachse, dann haben wir:

$$U_0 = O + \varrho_0 = O + \frac{\varrho'}{m} + \frac{\varepsilon \mid \varrho'}{m} \varepsilon + u\varepsilon.$$

Geht $\varepsilon$ in $\varepsilon'$ über, während die Anfangspunkte und Grössen der Linientheile dieselben wie vorher bleiben, dann ist die Gleichung der Centralachse des neuen Systemes:

$$U'_0 = O + \varrho'_0 = O + \frac{\varrho'}{m} + \frac{\varepsilon' \mid \varrho'}{m} \varepsilon' + u'\varepsilon'.$$

Für den etwaigen Schnittpunkt $S$ der beiden Centralachsen muss $U_0 = U'_0 = S$ sein, also:

$$\frac{\varepsilon \mid \varrho'}{m} \varepsilon + u\varepsilon = \frac{\varepsilon' \mid \varrho'}{m} \varepsilon' + u'\varepsilon',$$

woraus durch Multiplication mit $\varepsilon'$ folgt:

$$\frac{\varepsilon \mid \varrho'}{m} + u = 0,$$

so dass

$$S = O + \frac{\varrho'}{m} = O + \frac{\sum_1^n {}_\iota m_\iota \varrho_\iota}{m}$$

ist. Der Punkt $S$ ist von der Richtung der Linientheile des Systemes unabhängig, weshalb er der Mittelpunkt des Vereines genannt wird; für seine Coordinaten $x_s$, $y_s$, $z_s$ bestehen die Gleichungen:

$$m x_s = \sum_1^n {}_\iota m_\iota x_\iota, \quad m y_s = \sum_1^n {}_\iota m_\iota y_\iota, \quad m z_s = \sum_1^n {}_\iota m_\iota z_\iota.$$

5. Weil das resultirende Achsenmoment stets normal zu der Richtung der Strahlen $\mu$ ist, so ist der Verein äquivalent einer Einzelresultante längs der Centralachse, wenn das Polygon der Strecken der Linientheile sich nicht schliesst, was stets statt hat, wenn sämmtliche Elemente des Vereines gleichen Sinnes sind, im anderen Falle ist der Verein äquivalent Null.

## § 6. Aequivalenz ebener Vereine von Linientheilen.

1. Befinden sich die Elemente eines Vereines von Linientheilen in einer Ebene, dann sind die allgemeinen Betrachtungen ganz dieselben; es ist nur jetzt jedes Element aus einem Punkte und zwei ungleichartigen Strecken dieser Ebene numerisch ableitbar. Weil die Träger der Elemente sich schneiden, so ist deren Summe ein Linientheil oder Null. Die Achsenmomente der Elemente und dadurch das resultirende Achsenmoment sind senkrecht zu der Ebene des Systemes, weshalb stets $\gamma_0 = 0$ ist.

Nehmen wir die ursprünglichen Einheiten $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ als in der Ebene des Systems gelegen an, dann ist:

$$k_z = 0, \quad g_x = 0, \quad g_y = 0, \quad g_z = g, \quad \varkappa = k_x \varepsilon_1 + k_y \varepsilon_2, \quad \gamma = g\varepsilon_3,$$

*wodurch wir* aus den Formeln für einen räumlichen Verein unmittelbar *die entsprechenden* für einen ebenen Verein numerisch ableiten können.

Die Reduction für den Punkt $O$ ist:

$$\mathfrak{S} = O\varkappa + |\gamma,$$

$$\mathfrak{S} = O\sum_{1}^{n}{}_{l}(k_{l,x}\varepsilon_1 + k_{l,y}\varepsilon_2) + \sum_{1}^{n}{}_{l}\begin{vmatrix} x_l & y_l \\ k_{l,x} & k_{l,y} \end{vmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

die Momentenflächen sind zu der Ebene des Vereines parallel.

Für das kleinste Achsenmoment erhalten wir:

$$\gamma_0 = \frac{\varkappa\ \gamma}{k^2}\varkappa = \frac{(k_x\varepsilon_1 + k_y\varepsilon_2)g\varepsilon_1\varepsilon_2}{k^2}\varkappa = 0.$$

Daher ist, wenn $\varkappa$ nicht verschwindet, der Verein äquivalent einer Einzelresultanten längs der Centralachse, sonst gleich Null.

Die Streckengleichung der Centralachse lautet wie früher:

$$k^2\varrho_0 = |(\varkappa\gamma) + u\varkappa, \quad \text{oder} \quad [k^2\varrho_0 - |(\varkappa\gamma)]\varkappa = 0,$$

ihr Normalabstand vom Reductionspunkte $O$ ist:

$$\lambda_0 = \frac{|(\varkappa\gamma)}{k^2}, \quad l_0 = \frac{g}{k},$$

und ihre Coordinatengleichung ist:

$$k_y x_0 - k_x y_0 = g.$$

2. Bezüglich der speciellen Fälle gilt dasselbe wie für das räumliche System, nur mit der Modification, dass das kleinste Moment stets verschwindet.

3. Sind die Elemente des Vereines zu einander parallel, dann ist:

$$\mathfrak{S} = mO(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2) + \left(a_2\sum_{1}^{n}{}_{l}m_l x_l - a_1\sum_{1}^{n}{}_{l}m_l y_l\right)\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

die Coordinatengleichung der Centralachse:

$$m a_2 x_0 - m a_1 y_0 - a_2\sum_{1}^{n}{}_{l}m_l x_l + a_1\sum_{1}^{n}{}_{l}m_l y_l = 0,$$

und für den Mittelpunkt des Vereines haben wir:

$$\varrho_s = \frac{\sum_{1}^{n}{}_{l}m_l\varrho_l}{m}, \quad x_s = \frac{\sum_{1}^{n}{}_{l}m_l x_l}{m}, \quad y_s = \frac{\sum_{1}^{n}{}_{l}m_l y_l}{m}.$$

(Schluss folgt.)

# Kleinere Mittheilungen.

### V. Projective Form eines metrischen Satzes.

Der in meiner Note „Zur hyperboloidischen Lage von Tetraederpaaren" in dieser Zeitschrift (38. Jahrg. S. 315) gegebene Satz II gilt seiner Herleitung nach zunächst nur für nicht ausgeartete räumliche Polarsysteme; dass er bei geeigneter Fassung auch für ausgeartete Polarsysteme gilt, ist zwar analytisch unschwer einzusehen, doch dürfte ein rein geometrischer Beweis auch in diesem Falle erwünscht sein.

Wir fassen jenen Satz für ausgeartete Systeme wie folgt:

> *„Liegen die Geraden, welche die Ecken $ABCD$ eines Tetraeders mit den Polen $a'b'c'd'$ der Seitenebenen $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$, $A'B'C'$ eines zweiten Tetraeders $A'B'C'D'$ in Bezug auf einen Kegelschnitt bez. verbinden, in einem Hyperboloid, so gilt das Gleiche von den Geraden, welche die Ecken $A'B'C'D'$ des zweiten Tetraeders mit den Polen $abcd$ der Seitenebenen $BCD$, $CDA$, $DAB$, $ABC$ des ersten Tetraeders in Bezug auf denselben Kegelschnitt bez. verbinden."*

Beweis. Wir bezeichnen die Geraden, in welcher die Ebene des Kegelschnittes von den Seitenebenen des ersten und zweiten Tetraeders in der aufgeführten Reihenfolge geschnitten wird, mit $\alpha\beta\gamma\delta$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$. Nach Voraussetzung gehören die Ebenen $DAa'$ $DBb'$ $DCc'$ einem Büschel an, mithin liegen die Dreiecke $a'b'c'$ und $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ perspectiv. Analog erkennt man, dass die Dreiecke $a'b'd'$ und $\beta\delta$, $\delta\alpha$, $\alpha\beta$ perspectiv liegen u. s. w. *Die Figuren $a'b'c'd'$ und $\alpha\beta\gamma\delta$ sind polarreciprok*; ihnen entsprechen in dem durch den Kegelschnitt gegebenen ebenen Polarsystem die Figuren $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ und $abcd$, welche gleichfalls polarreciprok sind. Die Dreiecke $abc$ und $\beta'\gamma'$ $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$ sind perspectiv, die Ebenen $D'A'a$, $D'B'b$, $D'C'c$ gehören einem Büschel an, das heisst, es giebt eine Gerade durch $D'$, welche $A'a$, $B'b$, $C'c$ schneidet. Analog weist man eine Gerade durch $A'$ nach, welche $B'b$, $C'c$, $D'd$ schneidet u. s. w. *Die Geraden $A'a$, $B'b$, $C'c$, $D'd$ liegen in einem Hyperboloid*; denn keine zwei derselben treffen sich, wie *fort gezeigt* wird.

Angenommen, $A'a$ und $B'b$ träfen sich, also auch $A'B'$ und $ab$, so läge $\gamma'\delta'$ auf $ab$, also ging $c'd'$ durch $\alpha\beta$, $CD$ träfe $c'd'$, $Cc'$ also $Dd'$ gegen die Voraussetzung.

Lässt man den Kegelschnitt in den unendlich fernen imaginären Kugelkreis übergehen, so erhält man aus obigem Satze den a. a. O. unter III aufgeführten metrischen Satz. Letzterer gilt sonach in jeder der drei möglichen Geometrien.

Der Chasles'sche Satz über polare Tetraeder, sowie die Umkehrung desselben, gelten, wie aus obigem Beweise hervorgeht, bei geeigneter Fassung auch für ausgeartete Polarsysteme.

Es möge an dieser Stelle noch nachgetragen werden, dass der Satz I meiner citirten Note analytisch zuerst von Hermes, Crelles Journ. 1859 Bd. 56 S. 222, bewiesen wurde. Man kann ihn auch aus dem Chasles'schen Satze folgern. Vergl. noch Schur, Mathem. Ann. 1882 Bd. 19 S. 429.

Osthofen (Rheinhessen). Dr. P. Muth.

---

## VI. Ueber die Construction von Kegelschnitten aus fünf Punkten oder fünf Tangenten.

Wie es scheint, ist bisher unbemerkt geblieben, dass die obengenannten Aufgaben durch die einfachsten Hilfsmittel der gewöhnlichen Perspective gelöst werden können. Bezeichnet nämlich in Fig. 1 $pq$ den Horizont, $PQ \| pq$ die Grundlinie, $O$ das Projectionscentrum (aufgeklappt in die erweiterte Bildebene), endlich $Pp$ eine gegebene Gerade, welcher in der Grundebene die Gerade $PP_\infty$ entsprechen möge, so ergiebt sich letztere dadurch, dass $Op$ und hierzu parallel $PP_\infty$ gezogen wird.

Fig. 1.

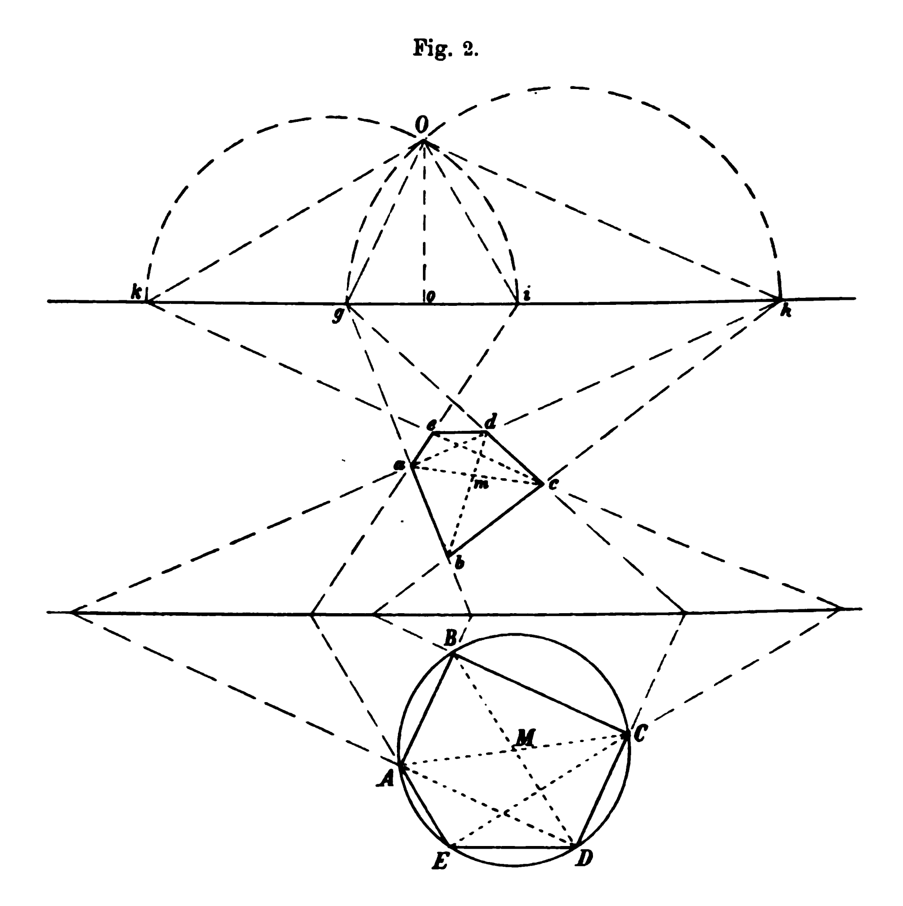


Für eine zweite Gerade $Qq$ ist analog $QQ_\infty \| Oq$, und wenn $PP_\infty$ und $QQ_\infty$ sich rechtwinklig schneiden sollen, muss $O$ auf dem über $pq$ construirten Halbkreise liegen.

I. Die Punkte $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ (Fig. 2), durch welche ein Kegelschnitt gehen soll, denke man sich als Punkte der Bildebene und gruppire sie zu dem Vierecke $abcd$ und dem Dreieke $ace$. Die Gegenseiten des Vierecks mögen sich in $g$ und $h$ schneiden; nimmt man $gh$ zum Horizont und wählt das Projectionscentrum willkürlich auf dem Halbkreise über $gh$, so entspricht dem

Vierecke *abcd* ein Rechteck. Wenn ferner *ae* und *ce* den Horizont in *i* und *k* schneiden, und das Projectionscentrum auf den Halbkreis über *ik* gelegt wird, so entspricht dem Dreiecke *ace* ein rechtwinkliges Dreieck. Als Projectionscentrum wähle man nun den Durchschnitt *O* der Halbkreise über *gh* und *ik*; dem Fünfecke *abcde* entspricht dann das Fünfeck *ABCDE*, welches aus dem Rechtecke *ABCD* und dem bei *E* recht-

Fig. 2.



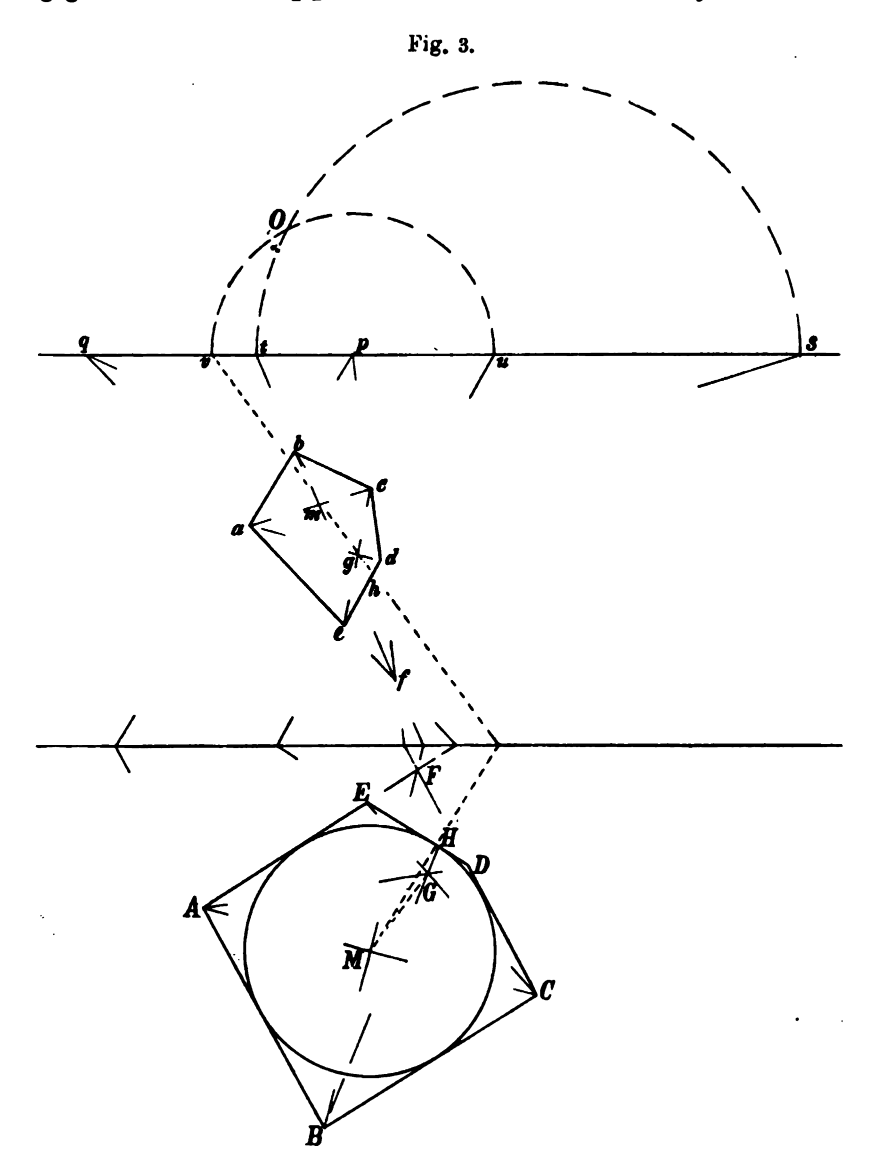

winkligen Dreiecke *AEC* besteht. Um dieses Fünfeck lässt sich ein Kreis beschreiben, und das Perspectivbild des letzteren ist der gesuchte Kegelschnitt.

Diese Construction liefert zugleich einen elementaren synthetischen Beweis dafür, dass ein Kegelschnitt durch fünf Punkte eindeutig bestimmt ist, was sonst auf weniger einfache Weise dargethan wird.

II. Soll ein Kegelschnitt von fünf Geraden berührt werden, deren Durchschnitte das Fünfeck *abcde* geben (Fig. 3), so nehme man dessen *Ebene zur Bildebene* und construire durch Verlängerung von *ae* und *cd*

das Viereck $abcf$; die Gegenseiten desselben mögen sich in $p$ und $q$ schneiden, die Diagonalen $ac$ und $bf$ mögen der Geraden $pq$ in $s$ und $t$ begegnen. Nimmt man $pq$ zum Horizont und wählt das Projectionscentrum

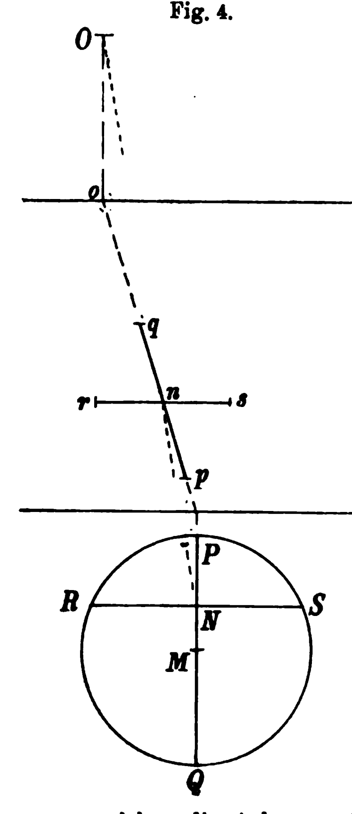
Fig. 3.




willkürlich auf dem Halbkreise über $st$, so entspricht dem Vierecke $abcf$ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich rechtwinklig schneiden, also ein Rhombus $ABCF$; in diesen lässt sich ein Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt $M$ der Durchschnitt der Diagonalen $AC$ und $BF$ ist. Um

noch den Punkt $H$ zu finden, in welchem dieser Kreis die Gerade $DE$ (entsprechend $de$) berührt, erinnere man sich an den Satz: Ist $G$ der Durchschnitt der Fünfecksdiagonalen $AD$ und $CE$, so geht die Gerade $BG$ durch den gesuchten Berührungspunkt $H$, und dann stehen $DE$ und $HM$ senkrecht auf einander.* Ist nun $u$ der Durchschnitt von $de$ mit dem Horizonte, so construirt man der Reihe nach $ad$, $ce$, $g$, $bg$, $h$ und zieht die Verbindungslinie $hm$, welche den Horizont in $v$ trifft; der Durchschnitt $O$ der Halbkreise über $st$ und $uv$ ist nun das gesuchte Projectionscentrum.

Fig. 4.




Hierin liegt zugleich ein elementarsynthetischer Beweis dafür, dass ein Kegelschnitt durch fünf Tangenten eindeutig bestimmt ist.

III. Nur der Vollständigkeit wegen erwähnen wir noch die Construction der Kegelschnittsachsen (Fig. 4). Es sei $O$ das Projectionscentrum, $o$ der Augenpunkt, $PQ$ der verticale Durchmesser des abzubildenden Kreises, $pq$ die Projection von $PQ$, ferner $n$ die Mitte von $pq$, welcher $N$ entspricht, endlich $RS$ die durch $N$ gehende horizontale Kreissehne und $rs$ deren Projection; dann sind $pq$ und $rs$ zwei conjugirte Durchmesser, aus welchen die Achsen auf bekannte Weise hergeleitet werden können.

O. Schlömilch.

---

### VII. Nachtrag zu dem Aufsatz „Einige Methoden etc."

im 5. Hefte des 38. Jahrganges S. 283 ff.

Durch die Gleichungen 16) a. a. O. ist man in den Stand gesetzt, die Grössen der Halbachsen eines Centralkegelschnittes zu finden; denn die Wurzeln der daraus hergeleiteten Gleichung

$$z^2+\frac{M^2\Delta e}{A^2}z+\frac{M^4\Delta^2}{A^3}=0$$

sind die Quadrate der Achsen. Es bleibt nur noch übrig, für den Fall, wo $A=0$, der Kegelschnitt also eine Parabel ist, deren Parameter zu bestimmen. Wenn man bei dieser Untersuchung die allgemeine Kegel-

* Dieser sehr specielle Fall des Brianchon'schen Satzes lässt sich leicht *elementargeometrisch* beweisen.

schnittsgleichung 1) verbunden mit der Bedingung $A=0$, zu Grunde legte, so würden sehr umfangreiche und unerquickliche Rechnungen nothwendig werden; wir ziehen es daher vor, die Parabel auf ein Polardreieck zu beziehen, wodurch ihre Gleichung die einfachere Gestalt

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$$

annimmt, mit der Bedingung:

$$a_2 a_3 \sin^2\alpha + a_3 a_1 \sin^2\beta + a_1 a_2 \sin^2\gamma = 0.$$

Hier ist

$$A_{11} = a_2 a_3, \quad A_{22} = a_3 a_1, \quad A_{33} = a_1 a_2, \quad A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0,$$

also ergiebt sich aus Gleichung 19):

$$P = a_1(a_2 + a_3), \quad Q = a_2(a_3 + a_1), \quad R = a_3(a_1 + a_2);$$

ferner ist:

$$\Delta = a_1 a_2 a_3, \quad e = a_1 + a_2 + a_3.$$

Daraus folgen nach Gleichung 20) die Coordinaten des Brennpunktes:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{M a_1 a_2 a_3}{2\Delta e \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}(a_2 + a_3)\sin\beta\sin\gamma \\ &= \frac{M}{2e\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}(a_2 + a_3)\sin\beta\sin\gamma \text{ etc.}, \end{aligned}\right.$$

und nach Gleichung 21) die Gleichung der Directrix:

$$a_1(a_2 + a_3)x_1 \sin\beta\sin\gamma + a_2(a_3 + a_1)x_2 \sin\gamma\sin\alpha + a_3(a_1 + a_2)x_3 \sin\alpha\sin\beta = 0.$$

Nun ist aber der Parameter $p$ gleich der Entfernung des Brennpunkts von der Directrix, und diese wird ausgedrückt durch einen Bruch, dessen Zähler gleich der linken Seite der Gleichung der Directrix ist, wenn man darin die absoluten Werthe der Coordinaten des Brennpunktes einsetzt, der Nenner aber gleich dem Ausdruck:

$$\left\{\begin{aligned} & a_1^2(a_2 + a_3)^2 \sin^2\beta\sin^2\gamma + a_2^2(a_3 + a_1)^2\sin^2\gamma\sin^2\alpha + a_3^2(a_1 + a_2)^2\sin^2\alpha\sin^2\beta \\ & \qquad - 2a_2 a_3(a_3 + a_1)(a_1 + a_2)\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha \\ & \qquad - 2a_3 a_1(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)\sin\alpha\sin^2\beta\sin\gamma\cos\beta \\ & \qquad - 2a_1 a_2(a_2 + a_3)(a_3 + a_1)\sin\alpha\sin\beta\sin^2\gamma\cos\gamma. \end{aligned}\right.$$

Zieht man von den drei ersten Posten dieses Ausdruckes das Quadrat der linken Seite der Bedingungsgleichung ab, wodurch ihr Werth nicht verändert wird, so erhält man unter Berücksichtigung der Relationen $\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha = 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$ etc.:

$$\left\{\begin{aligned} & 2a_2^2 a_3^2 \sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + 2a_3^2 a_1^2 \sin\alpha\sin^2\beta\sin\gamma\cos\beta \\ & \qquad + 2a_1^2 a_2^2 \sin\alpha\sin\beta\sin^2\gamma\cos\gamma, \end{aligned}\right.$$

und, wenn man jetzt die drei letzten Posten hinzufügt, als vollständiges des Nenners:

$$\text{[illegible]} a_2 + a_3)(\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma)\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$\sin^2\gamma.$

Der Zähler aber erhält, wenn man, wie oben angegeben worden ist, verfährt, den Werth:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{M}{2e\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\\ \{a_1(a_2+a_3)^2\sin^2\beta\sin^2\gamma+a_2(a_3+a_1)^2\sin^2\gamma\sin^2\alpha+a_3(a_1+a_2)^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\}.\end{array}\right.$$

Der Klammerausdruck lässt sich auf folgende Form bringen:

$$\left\{\begin{array}{l}(a_2a_3\sin^2\alpha+a_3a_1\sin^2\beta+a_1a_2\sin^2\gamma)(a_1\sin^2\alpha+a_2\sin^2\beta+a_3\sin^2\gamma)\\ \quad+a_1a_2a_3(2\sin^2\beta\sin^2\gamma+2\sin^2\gamma\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha\sin^2\beta\\ \quad-\sin^4\alpha-\sin^4\beta-\sin^4\gamma),\end{array}\right.$$

und, da der erste Posten dieses Resultats vermöge der Bedingungsgleichung verschwindet, der zweite aber gleich $4a_1a_2a_3\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$ ist, so ist der Zähler gleich

$$\frac{M}{2e\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\cdot4\Delta\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma=\frac{2M\Delta\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{e}.$$

So erhalten wir denn als Werth des Parameters:

$$p=\frac{2M\Delta\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{e\sqrt{-4\Delta e\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}}=\frac{M\sqrt{-\Delta}}{e\sqrt{e}}.$$

Hier wirft sich aber die Frage auf, ob dieser Werth reell sei, was nur stattfinden kann, wenn entweder zugleich $\Delta$ negativ und $e$ positiv oder zugleich $\Delta$ positiv und $e$ negativ ist; es lässt sich beweisen, dass immer das erstere der Fall ist.

Die Parabelgleichung, von der wir ausgingen,

$$a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2=0,$$

kann nur dann eine reelle Curve bezeichnen, wenn eines der $a$, z. B. $a_1$, negativ ist, während die anderen, $a_2$ und $a_3$, positiv bleiben; denn der Fall, wo zwei $a$ negative Zeichen haben, lässt sich auf diesen zurückführen, indem man die Seiten der Gleichung vertauscht. Dann ist aber $\Delta=-a_1a_2a_3$, also negativ; der Werth von $e$, nämlich $-a_1+a_2+a_3$ erhält vermittelst der Bedingungsgleichung

$$a_2a_3\sin^2\alpha-a_1(a_3\sin^2\beta+a_2\sin^2\gamma)=0$$

durch Elimination von $a_1$ die Gestalt:

$$e=\frac{(a_2+a_3)(a_3\sin^2\beta+a_2\sin^2\gamma)-a_2a_3\sin^2\alpha}{a_3\sin^2\beta+a_2\sin^2\gamma}.$$

Der Nenner ist nach der gemachten Voraussetzung positiv, die Entwickelung des Zählers aber liefert:

$$\left\{\begin{array}{l}a_2^2\sin^2\gamma+a_3^2\sin^2\beta+a_2a_3(\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\sin^2\alpha)=(a_2\sin\gamma-a_3\sin\beta)^2\\ \qquad+4a_2a_3\sin\beta\sin\gamma\cos^2\frac{1}{2}\alpha,\end{array}\right.$$

ein Werth, der immer positiv ist.

Ich füge für diesen nicht umkehrbaren Satz, dass bei jeder Gleichung zweiten Grades, die eine Parabel darstellt, die Determinante **negativ** und die Function $e$ **positiv** sei, noch einen zweiten Beweis bei, der auf einem anderen Princip beruht. Da nämlich eine Parabel mit dem aus einer ihrer Tangenten und der unendlich fernen Geraden gebildeten System eine doppelte Berührung hat, so kann man ihre Gleichung in unendlich vielfacher Weise auf die Form

$$(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+2(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)(x_1\sin\alpha+x_2\sin\beta+x_3\sin\gamma)=0$$

bringen. Die Determinante dieser Gleichung aber lässt sich schreiben:

$$\begin{vmatrix} a_1^2+b_1\sin\alpha+b_1\sin\alpha & a_1a_2+b_2\sin\alpha+b_1\sin\beta & a_1a_3+b_3\sin\alpha+b_1\sin\gamma \\ a_2a_1+b_1\sin\beta+b_2\sin\alpha & a_2^2+b_2\sin\beta+b_2\sin\beta & a_2a_3+b_3\sin\beta+b_2\sin\gamma \\ a_3a_1+b_1\sin\gamma+b_3\sin\alpha & a_3a_2+b_2\sin\gamma+b_3\sin\beta & a_3^2+b_3\sin\gamma+b_3\sin\gamma \end{vmatrix};$$

ihre Bildungsweise lehrt sofort, dass sie das Product von zwei Determinanten, nämlich:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \sin\alpha \\ a_2 & b_2 & \sin\beta \\ a_3 & b_3 & \sin\gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & \sin\alpha & b_1 \\ a_2 & \sin\beta & b_2 \\ a_3 & \sin\gamma & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \sin\alpha \\ a_2 & b_2 & \sin\beta \\ a_3 & b_3 & \sin\gamma \end{vmatrix}^2,$$

das heisst, ein **negatives** Quadrat ist.

Die Function $e$ ferner ist hier:

$$\begin{cases} a_1^2+2b_1\sin\alpha+a_2^2+2b_2\sin\beta+a_3^2+2b_3\sin\gamma-2(a_2a_3+b_2\sin\gamma+b_3\sin\beta)\cos\alpha \\ \qquad -2(a_3a_1+b_3\sin\alpha+b_1\sin\gamma)\cos\beta \\ \qquad -2(a_1a_2+b_1\sin\beta+b_2\sin\alpha)\cos\gamma \\ =a_1^2+a_2^2+a_3^2-2a_2a_3\cos\alpha-2a_3a_1\cos\beta-2a_1a_2\cos\gamma. \end{cases}$$

Ersetzt man $\cos\alpha$ durch $-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma$, so wird:

$$\begin{cases} e=a_1^2+a_2^2(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)+a_3^2(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+2a_2a_3\cos\beta\cos\gamma \\ \qquad -2a_2a_3\sin\beta\sin\gamma-2a_3a_1\cos\beta-2a_1a_2\cos\gamma \\ =a_1^2+(a_2\cos\gamma+a_3\cos\beta)^2+(a_2\sin\gamma-a_3\sin\beta)^2-2a_1(a_2\cos\gamma+a_3\cos\beta) \\ =(a_2\cos\gamma+a_3\cos\beta-a_1)^2+(a_2\sin\gamma-a_3\sin\beta)^2, \end{cases}$$

also immer **positiv**.

**Beispiel.** Die Parabel, deren Brennpunkt wir a. a. O. S. 292 und 308 bestimmten, hatte die Gleichung:

$$\begin{cases} x_1^2\sin^2\alpha+x_2^2(\sin^2\gamma-\sin^2\alpha\sin^2\beta)+x_3^2(\sin^2\beta-\sin^2\gamma\sin^2\alpha) \\ \qquad +2x_2x_3\sin\beta\sin\gamma\cos^2\alpha-2x_3x_1\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha \\ \qquad -2x_1x_2\sin\gamma\sin\alpha\cos\alpha=0; \end{cases}$$

$\Delta$ fanden wir gleich

$$-\sin^8\alpha\sin^2(\beta-\gamma)$$

und

$$e=\sin^2\alpha(\sin^2\alpha+4\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha),$$

also ist:

$$p = \frac{M.\sin^4\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\sin^3\alpha(\sin^2\alpha + 4\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2r\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)}{(\sin^2\alpha + 4\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

oder, wenn man den Flächeninhalt des Fundamentaldreiecks mit $F$ und die Mitteltransversale von $A$ aus mit $t_1$ bezeichnet,

$$p = \frac{F(b^2-c^2)}{4t_1^3}.$$

Bensheim, im October 1893. Dr. Stoll.

---

### VIII. Die thermischen Capacitäten der festen und tropfbar flüssigen Körper, insbesondere des Wassers.

§ 1. Ueber die beiden thermischen Capacitäten der Gase habe ich, ausser früheren Mittheilungen über den in vielen Lehrbüchern enthaltenen Versuch von Clement und Desormes im Repertorium der Physik (das mit dem 27. Bande im Jahre 1891 zu erscheinen aufgehört hat), auch in der letzten Naturforscherversammlung zu Nürnberg einen Vortrag gehalten.*

Dieselben thermischen Capacitäten der luft- und wasserförmigen Körper habe ich seither wieder nachgesehen, das heisst im Abschnitte VIII des in der Anmerkung citirten Buches von Clausius fand ich die Formel:

$$c_p = c_v - \frac{T}{E}\left(\frac{d_p v}{dT}\right)^2 : \frac{d_\tau v}{dp},$$

wobei sich der Suffix $p$ auf constanten Druck und $v$ auf constantes Volum beziehen, sowie $T$ die absolute Temperatur und $E$ das mechanische Wärmeäquivalent bedeuten.

Zum Beweise dieser Formel muss man ausser dem ersten auch den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie herbeiziehen (siehe V. Abschnitt bei Clausius). Aber die Specialisirung für gasförmige Körper, die ich nur im Vorbeigehen kurz erwähnen will, giebt die bekannte, auch elementar ableitbare und zur Berechnung von $E$ benutzte Formel:

$$c_p = c_v + \frac{K}{E},$$

wo $K$ die Constante des (allgemeinen) „Gasgesetzes" ist:

$$pv = KT.$$

§ 2. Noch eine Vergleichung: Bei den Gasen ist unmittelbar einzusehen, dass die (kleine) Wärmezufuhr $dQ$ theils zur Erwärmung $dT$, theils zur (äusseren) Arbeitsleistung $pdv$ verwendet wird, dass also:

---

* Im elften Capitel der „Theorie der Wärme" von Maxwell ist jener Versuch kritisch erwähnt, aber theilweise unrichtig beurtheilt. Clausius erwähnt denselben in seiner „Mechanischen Wärmetheorie" (2. Aufl. 1876) gar nicht und benutzt statt dessen zur Bestimmung des Verhältnisses der beiden thermischen *Capacitäten* die Newton-Laplace'sche Formel für die Schallgeschwindigkeit. *Den genannten* Vortrag siehe im gedruckten Bericht der Versammlung.

$$dQ = c_v dT + \frac{p dv}{E};$$

aus den beiden letzten Gleichungen entsteht also, wenn man $p$ constant denkt,

$$d_p Q = c_v . dT + \frac{K}{E} dT,$$

und der Quotient $\frac{d_p Q}{dT}$ stellt $c_p$ vor, so dass wir hiermit wiederum zur zweiten Gleichung vom Eingange des Gegenwärtigen gelangt sind.

Bei den festen und tropfbar flüssigen Körpern kommt auf die im dritten Absatze des § 1 blos angedeutete Weise statt der vorletzten Gleichung zu Stande:

$$dQ = c_v . dT + \frac{T}{E} \frac{d_v p}{dT} dv$$

und analog zur jetzigen vorletzten Gleichung:

$$d_p Q = c_v . dT + \frac{T}{E} \cdot \frac{d_v p}{dT} \cdot \frac{d_p v}{dT} dT,$$

so dass jetzt

$$c_p = c_v + \frac{T}{E} \cdot \frac{d_p v}{dT} \cdot \frac{d_v p}{dT}$$

und hieraus die erste Gleichung oben entsteht. Aus dieser Vergleichung der Theorie der Gase mit der Theorie der Wärme, wenn der vermittelnde Körper einem der beiden anderen Aggregatzustande angehört, mag nur hervorgehen, dass im ersteren Falle der erste Hauptsatz der Theorie hinreicht, im zweiten nicht.

§ 3. In der obersten Gleichung ist der erste vorkommende Differentialquotient augenscheinlich $\alpha v$ und der zweite $\beta v$, wenn mit $\alpha$ der thermische und mit $\beta$ der mechanische Ausdehnungs-Coefficient bezeichnet werden, und der letztere Quotient ist negativ, so dass die Gleichung wird:

$$c_p = c_v + \frac{T}{E} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta} \cdot v.$$

Es fällt mir auf, dass Clausius diese vereinfachende Ueberführung nicht wählt, sondern in dem gleich darauffolgenden Zahlenbeispiele für Wasser von 0°, 25° und 50° bei jedem der beiden Differentialquotienten das $v$ einbezieht. Dabei begegnet ihm noch das Versehen, dass er im selben Falle von 25° bei $\alpha$ das $v = 0{,}001$ und bei $\beta$ das $v = 0{,}001003$ annimmt, was allerdings im rechnerischen Resultate nicht sehr viel verdirbt.

Im Falle von 0° besteht kein Unterschied. Ich fand durch logarithmische Rechnung

$$c_p - c_v = 0{,}0004951,$$

was Clausius mit Recht auf

$$0{,}0005$$

abkürzt.

Im Falle von 25° finde ich

$$0{,}009897,$$

wo Clausius 0,0098 schreibt, ich also

$$0{,}0099$$

schreiben muss. Aber im Falle von 50° finde ich

$$0{,}03666,$$

wo Clausius nur 0,0358 hat, also statt

$$0{,}0367;$$

das ist um $2^1/_2$ Procent bleibt das unrichtige Resultat zu klein. Es ist nämlich

$$v_{50} = 0{,}001012 \frac{\text{Cubikmeter}}{\text{Kilogramm}},$$

also verhalten sich das richtige und unrichtige Resultat wie $1{,}012^2$ zu 1.

Mit Regnault's Werthen von $c_p$ für diese drei Temperaturen wird alsdann bei:

| | 0° | 25° | 50° |
|---|---|---|---|
| | $c_v = 0{,}9995$ | 0,9917 | 0,9675, |
| statt bei Clausius. | $c_v = 0{,}9995$ | 0,9918 | 0,9684 |

§ 4. Dasselbe Versehen vom § 5 des VIII. Abschnittes kommt auch im § 6 wieder vor, wo Clausius eine andere thermische Capacität berechnet als die beiden bisher genannten, und zwar für Wasser von 100° in Berührung mit gesättigtem Dampfe. Clausius leitet hierfür die Gleichung ab:

$$c = c_p - \frac{T}{E} \frac{d_p v}{dT} \cdot \frac{dp}{dT},$$

worin $c_p$ die frühere Bedeutung und für $\frac{d_p v}{dT}$ wieder $\beta v$ gesetzt werden kann. Bei Wasser von 100° ist $\beta = 0{,}00080$; aber $v$ ist nicht 1, beziehungsweise 0,001 Meter³ : Kilogramm, sondern 1,043 oder 0,001043.

Als Minuend benutzt Clausius den Werth von Regnault, $c_p = 1{,}013$, als Subtrahend findet er 0,00026; das ist nach voriger Angabe um 4,3 Procent zu wenig, so dass es 0,00027 lauten sollte. Aber da $c_p$ nur auf drei Decimalen angegeben ist, so ist ohnehin $c$ nahe gleich $c_p$.

Hiernach wendet Clausius vorige Gleichung auf Wasser und Eis bei 0° an, wo wirklich das vorige $v = 0{,}001$ ist und $c_p = 1$, also

$$c = 1 - 0{,}055 = 0{,}945.$$

Endlich für das Eis: Da setzt Clausius das richtige $v = 0{,}001087$, so dass

$$c = 0{,}48 + 0{,}151 = 0{,}631.$$

In den beiden letzten Fällen ist nämlich $\frac{dp}{dT}$ negativ und zwar gleich $-\frac{10333}{0{,}00733}$, weil sich der Gefrierpunkt um 0,00733 bei einer Atmosphäre *Mehrdruck* erniedrigt.

§ 5. Ich gehe noch zu § 7 über, welcher von der Adiabase handelt oder den „isentropischen Aenderungen eines Körpers". Da Clausius die Entropie mit $S$ bezeichnet, so verstehen wir seine Gleichung 12:

$$\frac{d_{\mathfrak{S}} v}{dp} = \frac{c_v}{c_p} \cdot \frac{d_\tau v}{dp};$$

im obigen § 3 habe ich den letzteren Differentialquotienten gleich $-\beta v$ gesetzt und jetzt werde ich statt dieses $\beta$ setzen $\beta_\tau$, um die dabei zu machende Voraussetzung der constanten Temperatur anzudeuten. Dann ist sofort einzusehen die Identität:

$$\frac{d_{\mathfrak{S}} v}{dp} = -\beta_{\mathfrak{S}} . v$$

und die vorige Gleichung wird zu

$$\text{I)} \qquad \beta_{\mathfrak{S}} = \frac{c_v}{c_p} \cdot \beta_\tau .$$

Man überzeugt sich sofort, dass diese beiden Compressibilitäts-Coefficienten, der adiabatische (oder isentropische) $\beta_{\mathfrak{S}}$ und der isothermische $\beta_\tau$ die reciproken Elasticitätsmoduli des Körpers vorstellen, so dass, diese mit $E_{\mathfrak{S}}$ und $E_\tau$ bezeichnet,*

$$\text{I}') \qquad E_{\mathfrak{S}} = \frac{c_p}{c_v} \cdot E_\tau ,$$

wodurch man wiederum an die im Jahre 1819 von Laplace der Newton'schen Formel für die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft zugefügte Correctur erinnert wird.

Setzt man in I für $c_v$ den aus der ersten Gleichung des obigen § 3 sich ergebenden Werth, wobei das dort ohne Suffix geschriebene $\beta$ jetzt zur Unterscheidung von $\beta_{\mathfrak{S}}$ als $\beta_\tau$ zu schreiben ist (bei $\alpha$ ist der Suffix $p$ unnöthig, da kein anderer thermischer Ausdehnungs-Coefficient hier vorkommt), so erhält man:

$$\text{II)} \qquad \beta_\tau - \beta_{\mathfrak{S}} = \frac{T}{E c_p} \cdot \alpha^2 v.$$

So hat man also hier in I und II die nöthigen Gleichungen zur Bestimmung der beiden $\beta$, wenn die beiden $c$ und das $\alpha$ bekannt sind. Umgekehrt sind I und die erste Gleichung im § 3 zur Bestimmung der beiden $c$ brauchbar, wenn die beiden $\beta$ und das $\alpha$ bekannt sind. Beide Male ist der Quotient und die Differenz der beiden Unbekannten gegeben.

§ 6. Es erinnert dies an die weiter verbreitete Aufgabe, für Gase $c_v$ und $c_p$ zu bestimmen, wozu I′ und die erste Gleichung des § 3 in der Form:

$$c_p - c_v = \frac{1}{E} p_0 v_0 \alpha$$

erscheint; $p_0 v_0 \alpha$ (für 0°) ist das $K$ am Schlusse des obigen § 1 und für 0° ist $T . \alpha = 1$.

* Eine Verwechslung mit dem nichtindicirten $E$, welches ich von Clausius als das mechanische *Wärmeäquivalent* herübernehme, ist wohl nicht zu besorgen.

II ist, was Clausius mit den Differentialquotienten statt des $\alpha$ und der beiden $\beta$ als Gleichung 13 schreibt; 14 ist von I fast nicht verschieden und wegen 15 sage ich:

Analog II entsteht auch noch, wenn man statt $c_v$ das $c_p$ eliminirt (oder durch Einsetzen aus I für $c_p$ in II und Division mit dem Producte der beiden $\beta$):

$$\frac{1}{\beta_\sigma} - \frac{1}{\beta_\tau} = \frac{T}{E.c_v} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta_\tau}\right)^2 \cdot v;$$

diese Form bietet auch den Vortheil vor derjenigen des Clausius, dass sie ihre wesentliche Uebereinstimmung sofort darthut und deshalb neben I und II ganz wegbleiben kann. Nur als Zusatz mag bemerkt werden, dass wir hiermit auch noch einen weiteren Differentialquotienten wegschaffen können, indem

$$\frac{d_v p}{d T} = \frac{\alpha}{\beta_\tau}$$

sich ergiebt. Dieser Differentialquotient ist aber mit demjenigen $\frac{dp}{dT}$ im obigen § 4 nicht zu verwechseln, sowenig wie das dortige $c$ mit dem $c_v$.

§ 7. Zum Schlusse will ich noch die Dimensionen der in II vorkommenden Grössen aufstellen und dabei neben dem Meter und Kilogramm als den bekannten Einheiten die Beschleunigung (darin steckt also die Zeiteinheit) und den Wärmegrad als Hilfseinheiten bestehen lassen; diese beiden letzteren entfernen sich bei der Verification von II am schnellsten.

Es sind die beiden $\beta$ Meter$^2$ : Kilogramm mal Beschleunigung,
$T$ Grad,
$\alpha$ Grad hoch minus 1,
$v$ Meter$^3$ : Kilogramm,
$(E.c_p)$ Meter mal Beschleunigung durch Grad;

zur Erklärung der letzten Zeile diene, dass $(Ec_p)$ die mechanisch (nicht thermisch) gemessene Wärmemenge für ein Kilogramm und ein Grad darstellt; die entsprechende Arbeit ist aber Kilogramm mal Beschleunigung mal Meter.

Augsburg. Prof. Dr. Kurz.

# VII.

# Aequivalenz der Linientheilsysteme.

## Dargestellt mittelst des geometrischen Kalküls.

Von

FERDINAND KRAFT,
Privatdocent an der Universität Zürich.

Schluss.

### § 7. Das Moment eines Vereines von Linientheilen bezüglich einer Achse.

1. Sind $EO$ und $AB$ irgend zwei Linientheile, dann ist

$$(EO)(AB) = EOAB = E(O-E)(A-O)(B-A),$$

oder, wenn wir $\quad O-E=\varepsilon, \quad A-O=\varrho, \quad B-A=\varkappa$ setzen,

$$(EO)(AB) = E(\varepsilon\varrho\varkappa).$$

Der Spath $(\varepsilon\varrho\varkappa)$ wird das Moment des Linientheiles $AB$ bezüglich der mit $EO$ zusammenfallenden Geraden als Achse genannt, wobei $\varepsilon$ eine Strecke von ganz beliebiger Länge sein kann, der gewöhnlich die Länge Eins beigelegt wird.

Die Momente eines Linientheiles bezüglich eines Punktes und bezüglich einer Achse unterscheiden sich wesentlich dadurch, dass das erstere stets eine ebene Fläche, das letztere stets ein Körperraum resp. eine Zahl ist, wodurch im Allgemeinen die Momente bezüglich eines Punktes ungleichartige Grössen, die Momente bezüglich Achsen aber stets gleichartige Grössen sind.

Weil $\varrho\varkappa$ das Moment von $AB$ bezüglich des Punktes $O$ ist, so ist sein Moment bezüglich einer durch den Punkt $O$ gehenden Achse gleich dem Producte aus einer Strecke auf dieser Achse und seinem Polarmomente für irgend einen Punkt dieser Achse, so dass mit $\varrho\varkappa = \mathfrak{M}$:

$$(EO)(AB) = E(\varepsilon\mathfrak{M}) = E(\mathfrak{M}\varepsilon).$$

Weil die Linientheile $(EO)$ und $(AB)$ auf ihren Trägern sich beliebig verschieben lassen, ohne ihre Werthe zu ändern, so entsteht der Satz:

„Das Moment eines Linientheiles bezüglich einer Achse ist gleich dem Spathe über irgend einer Strecke der Achse und einer der Strecke des Linientheiles gleichen Strecke auf dem Träger dieses Linientheiles als gegenüberliegende Kanten. Der Entstehungssinn des Spathes giebt den Sinn des Momentes bezüglich der Achse an. Das Moment eines Linientheiles bezüglich einer Achse ist gleich dem Producte aus einer Strecke auf der Achse und seinem Polarmomente bezüglich eines Punktes der Achse."

Weil $(\varrho\varkappa) = |\gamma$ ist, so haben wir noch:

$$(EO)(AB) = E(\varepsilon\,|\,\gamma).$$

„Das Moment eines Linientheiles bezüglich einer Achse ist gleich dem inneren Producte aus einer Strecke auf dieser Achse und der Achsenstrecke seines Momentes bezüglich irgend eines Punktes dieser Achse, gleich der Länge der Projection der Achsenstrecke auf die Achse, wenn $\varepsilon$ Einheitsstrecke ist."

Bezeichnen wir das Moment des Linientheiles bezüglich der Achse $\varepsilon$ mit $M$, $\sphericalangle(\varepsilon, \gamma)$ mit $\mathfrak{v}$, setzen $g = pk$, dann ist:

$$M = eg\cos\mathfrak{v} = epk\cos\mathfrak{v}.$$

Dabei bedeutet $p$ den Längenabstand des Trägers des Linientheiles $AB$ von dem Punkte $O$ der Achse, $pk$ die Flächenzahl der durch die Punkte $O$, $A$ und $B$ bestimmten Fläche des Spathes, dessen Höhe mit dieser Fläche als Grundfläche $e\cos\mathfrak{v}$ ist.

Ferner haben wir mit $(\varkappa\varepsilon) = |\mu$:

$$M = \varrho(\varkappa\varepsilon) = \varrho\,|\,\mu = rm\cos(\varrho, \mu) = rke\sin(\varkappa, \varepsilon)\cos(\varrho, \mu).$$

Hier bedeutet $r\cos(\varrho, \mu)$ die zu der Grundfläche $(\varkappa\varepsilon)$ gehörende Höhe des Spathes, welche gleich dem kürzesten Abstande der Träger von $(EO)$ und $(AB)$ ist. Setzen wir die Höhenstrecke gleich $\delta$, so ist

$$M = \delta\varkappa\varepsilon = \varkappa\varepsilon\delta.$$

Nun lässt sich noch setzen $\varkappa = l\varepsilon + \varkappa'$, wo $\varkappa'$ die Projection von $\varkappa$ auf eine zu $\varepsilon$ senkrechte Ebene bedeuten soll, was führt zu

$$M = \delta\varkappa'\varepsilon = \varepsilon\delta\varkappa'.$$

„Das Moment eines Linientheiles bezüglich einer Achse ist gleich dem Producte aus der Achsenstrecke, der kürzesten Abstandsstrecke der Träger der Linientheile $(EO)$ und $(AB)$, sowie der Projection des Linientheiles auf eine zur Achse senkrechte Ebene".

Es ist:

$$M = \varepsilon\varrho\varkappa.$$

Setzen wir $\varkappa = \varkappa_\varepsilon + \varkappa_\sigma$, wobei $\varkappa_\varepsilon = p\varepsilon$, $\varkappa_\sigma$ parallel zu einer zu $\varepsilon$ senkrechten Ebene ist,

$$\varrho = \varrho_\varepsilon + \varrho_\sigma = \varrho_\varepsilon + \varrho_{\varkappa_\sigma} + \varrho_{\sigma'},$$

wobei $\varrho_\varepsilon \,||\, \varepsilon$, $\varrho_{\varkappa_\sigma} \,||\, \varkappa_\sigma$, $\varrho_{\sigma'} \perp \varkappa_\sigma$ ist, so erhalten wir:

$$M = \varepsilon(\varrho_s + \varrho_{\varkappa_\sigma} + \varrho_{\sigma'})(\varkappa_s + \varkappa_\sigma),$$
$$M = \varepsilon\varrho_{\sigma'}\varkappa_\sigma.$$

„Das Moment eines Linientheiles in Bezug auf eine Achse ist gleich dem äusseren Producte aus der Achsenstrecke, dem kürzesten Abstande der Achse und des Trägers der Projection des Linientheiles auf eine zur Achse senkrechte Ebene, sowie der Projectionsstrecke des Linientheiles."

Diese Definition des Zahlmomentes eines Linientheiles stellte man bisher an die Spitze.

2. Sind $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ und $\varepsilon_3$ die Strecken dreier, im Punkte $O$ sich schneidendor Achsen, $M_1$, $M_2$ und $M_3$ die auf sie bezogenen Momente des Linientheiles $AB$, ist

$$\varepsilon = \sum_1^3{}_l\, a_l\varepsilon_l$$

die Strecke einer vierten durch $O$ gehenden Achse, welcher das Moment $M$ zukommt, das Moment des Linientheiles bezüglich des Punktes $O$ gleich $\mathfrak{M}_0$, dann ist:

$$M_l = \varepsilon_l\mathfrak{M}_0, \quad l = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

$$M = \sum_1^3{}_l\, a_l\varepsilon_l\mathfrak{M}_0,$$

mithin:

$$M = \sum_1^3{}_l\, a_l M_l = a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3.$$

„Aus den Momenten bezüglich dreier durch einen Punkt gehender Achsen, die nicht einer Ebene parallel sind, lässt sich das Moment des Linientheiles für jede andere, durch denselben Punkt laufende Achse numerisch ableiten, und es besteht dabei zwischen den Momenten dieselbe Vielfachengleichung wie zwischen den Achsen."

Nehmen wir

$$\varepsilon = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3, \quad \varrho' = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3, \quad \varkappa = k_x\varepsilon_1 + k_y\varepsilon_2 + k_z\varepsilon_3,$$

dann ist auch

$$M = (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3)(x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3)(k_x\varepsilon_1 + k_y\varepsilon_2 + k_z\varepsilon_3),$$

das heisst, $(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3) = 1$ gedacht:

$$M = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \\ k_x & k_y & k_z \end{vmatrix},$$

und wenn wir diese Determinante entwickeln:

$$M = a_1(yk_z - zk_y) + a_2(zk_x - xk_z) + a_3(xk_y - yk_x),$$
$$M = a_1 g_x + a_2 g_y + a_3 g_z,$$

so dass die Momente bezüglich der Achsen $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ und $\varepsilon_3$ sind:

$$M_1 = yk_z - zk_y = g_x = lg, \quad M_2 = zk_x - xk_z = g_y = mg,$$
$$M_3 = xk_y - yk_x = g_z = ng.$$

3. Geht die Achse $\varepsilon$ nicht durch den Punkt $O$, sondern durch den Punkt $O_1 = O + \delta$, nehmen wir $A = O_1 + \varrho_1 = O + \varrho$, dann erhalten wir zunächst

$$M = \varepsilon \varrho_1 \varkappa,$$

und weil $\varrho_1 = \varrho - \delta$ ist, so ergiebt sich:

$$M = \varepsilon(\varrho - \delta)\varkappa = \varepsilon \varrho \varkappa - \varepsilon \delta \varkappa.$$

„Das Moment des Linientheiles $AB$ bezüglich der Achse $O_1 \varepsilon$ ist gleich dem Unterschiede der Momente der Linientheile $A\varkappa$ und $O_1\varkappa$ bezüglich der Achse $O\varepsilon$."

Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar, wenn wir noch

$$\delta = d_1 \varepsilon_1 + d_2 \varepsilon_2 + d_3 \varepsilon_3$$

setzen,

$$M = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ x - d_1 & y - d_2 & z - d_3 \\ k_x & k_y & k_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \\ k_x & k_y & k_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ k_x & k_y & k_z \end{vmatrix}.$$

Aus der Streckengleichung des Momentes, oder durch Auswerthung der vorstehenden Determinante ergiebt sich:

$$1)\quad M = (a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3) + k_x \begin{vmatrix} d_2 & d_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} + k_y \begin{vmatrix} d_3 & d_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} + k_z \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

4. Nunmehr sei ein Verein von Linientheilen gegeben.

Sein Moment bezüglich irgend einer Achse $O\varepsilon$ des Raumes ist, wenn $O$ Coordinatenpol ist:

$$M = \sum_1^n{}_l\, \varepsilon \varrho_l \varkappa_l = \varepsilon \sum_1^n{}_l\, \varrho_l \varkappa_l = \varepsilon \,|\, \sum_1^n{}_l\, \gamma_l$$

$$= e \sum_1^n{}_l\, g_l \cos \mathfrak{v}_l = e \sum_1^n{}_l\, p_l k_l \cos \mathfrak{v}_l,$$

$$M = \sum_1^n{}_l \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ x_l & y_l & z_l \\ k_{l,x} & k_{l,y} & k_{l,z} \end{vmatrix}.$$

Befindet sich der Coordinatenpol ausserhalb der Achse $\varepsilon$, dann haben wir:

$$M = \sum_1^n{}_l\, \varepsilon(\varrho_l - \delta)\varkappa_l = \varepsilon \sum_1^n{}_l\, (\varrho_l - \delta)\varkappa_l,$$

mithin auch:

$$M = \sum_1^n{}_l \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ x_l - d_1 & y_l - d_2 & z_l - d_3 \\ k_{l,x} & k_{l,y} & k_{l,z} \end{vmatrix},$$

$$M = \sum_1^n{}_l \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ x_l & y_l & z_l \\ k_{l,x} & k_{l,y} & k_{l,z} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_3 & d_3 \\ k_x & k_y & k_z \end{vmatrix}.$$

Setzen wir noch
$$\sum_1^n {}_l \begin{vmatrix} y_l & z_l \\ k_{l,y} & k_{l,z} \end{vmatrix} = M_1, \ldots,$$
dann erscheint die Gleichung 1) wieder, wenn wir die Determinanten lösen.

5. Wenn
$$M = \varepsilon \sum_1^n {}_l (\varrho_l - \delta) \varkappa_l = 0$$
ist, dann ist:
$$k_x = 0, \ k_y = 0, \ k_z = 0, \ M_1 = 0, \ M_2 = 0, \ M_3 = 0,$$
und das ist der Fall, wenn $\mathfrak{S} = 0$ ist.

„Ist $\mathfrak{S} = 0$, dann verschwindet die Summe der Momente der sämmtlichen Elemente des Vereines bezüglich jeder Achse des Raumes, die Summe der Spathe, welche eine beliebige Strecke des Raumes zur gemeinsamen Kante und die Strecken der Linientheile des Vereines zu Gegenkanten haben."

„Damit $\mathfrak{S} = 0$ sei, müssen die Summen der Momente der Linientheile des Vereines bezüglich dreier ungleichartiger Achsen des Raumes verschwinden; ist solches nicht der Fall, dann verschwindet wenigstens eine dieser Summen nicht."

## § 8. Aequivalenz eines räumlichen Vereines von Linientheilen mit zwei sich kreuzenden Linientheilen.

1. Jeder Linientheil $AB$ lässt sich aus vier in keiner Zahlbeziehung stehenden Punkten des Raumes numerisch ableiten.

Sei
$$A = \sum_1^4 {}_l a_l E_l, \quad B = \sum_1^4 {}_l b_l E_l,$$
dann ist:
$$AB = \sum_1^4 {}_l a_l E_l \sum_1^4 {}_l b_l E_l,$$
$$AB = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} E_1 E_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} E_1 E_3 + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} E_1 E_4 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} E_2 E_3$$
$$+ \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} E_2 E_4 + \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} E_3 E_4,$$
$$AB = m_{12} E_1 E_2 + m_{13} E_1 E_3 + m_{14} E_1 E_4 + m_{23} E_2 E_3 + m_{24} E_2 E_4 + m_{34} E_3 E_4.$$

Nun dürfen wir setzen:
$$AB = E_1 (m_{12} E_2 + m_{13} E_3 + m_{14} E_4) + (m_{23} E_2 E_3 + m_{24} E_2 E_4 + m_{34} E_3 E_4),$$
wodurch der Linientheil $AB$ als die Summe zweier Linientheile erscheint, von denen der Träger des ersten durch den Punkt $E_1$ geht, welcher die ihm gegenüberliegende Ebene des Grund-Tetraeders in dem Punkte $F$ schneidet, der durch die Gleichung gegeben ist:

$$(m_{12} + m_{13} + m_{14})F = m_{12}E_2 + m_{13}E_3 + m_{14}E_4,$$

der zweite in der eben genannten Ebene sich befindet. Die Träger dieser beiden Linientheile schneiden sich in $F$, denn es ist das äussere Product aus ihnen gleich Null. Wir erhalten nämlich:

$$(m_{12}E_1E_2 + m_{13}E_1E_3 + m_{14}E_1E_4)(m_{23}E_2E_3 + m_{24}E_2E_4 + m_{34}E_3E_4)$$
$$= (m_{12}m_{34} - m_{13}m_{24} + m_{14}m_{23})E_1E_2E_3E_4 = 0,$$

wenn wir die Werthe der $m$-Grössen substituiren.

Sind nun

$$A_lB_l = E_1(a_lE_2 + b_lE_3 + c_lE_4) + (d_lE_2E_3 + e_lE_2E_4 + f_lE_3E_4),$$

$l = 1, 2, \ldots n$ die $n$ Elemente eines Vereines von Linientheilen, so ist ihre Summe:

$$\mathfrak{S} = \sum_1^n{}_l A_lB_l = E_1\sum_1^n{}_l(a_lE_2 + b_lE_3 + c_lE_4)$$
$$+ \sum_1^n{}_l(d_lE_2E_3 + e_lE_2E_4 + f_lE_3E_4).$$

Hiernach besteht die Summe aus zwei Linientheilen, von denen der Träger des einen durch einen bestimmten Punkt geht, der andere in einer diesen Punkt nicht enthaltenden Ebene liegt, so dass diese Linientheile im Allgemeinen sich kreuzen. — Weil die Fundamentalpunkte des Raumes unter der Beschränkung willkürlich wählbar sind, dass sie in keiner Zahlbeziehung stehen, lehrt diese Betrachtung:

„Ein räumlicher Verein von Linientheilen ist auf unendlich viele Arten zwei sich kreuzenden Linientheilen äquivalent, von denen der Träger des einen durch einen beliebig angenommenen Punkt geht, der andere in einer diesen Punkt nicht enthaltenden willkürlich angenommenen Ebene liegt."

Wenn der Verein einem Linientheile äquivalent ist, wenn

$$\mathfrak{S} = \sum_1^n{}_l A_lB_l = AB$$

ist, dann ist:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{S} = (AB)(AB) = 0.$$

Ist dagegen der Verein zwei sich kreuzenden Linientheilen äquivalent

$$\mathfrak{S} = \sum_1^n{}_l A_lB_l = AB + CD,$$

dann ist:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{S} = (AB + CD)(AB + CD) = 2(ABCD).$$

Der letzte Ausdruck verschwindet nur dann, wenn seine vier Punkte in einer Ebene liegen, und dann ist $(AB + CD)$ einem Linientheile in dieser Ebene gleich.

Die Bedingung dafür, dass ein Verein von Linientheilen einem Linien*theile äqui*valent sei, ist mithin:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{S} = 0.$$

„Eine Summe von Linientheilen ist nur dann einem Linientheile äquivalent, wenn das äussere Product aus ihr und ihr selbst verschwindet.“

Diesen und den vorhergehenden Satz, welcher in allgemeinster Weise die Aequivalenz eines Systemes von Linientheilen zwei sich kreuzenden Linientheilen giebt, hat bereits Grassmann ($A_2$, Nr. 285) bewiesen.

3. Mit dem beliebigen Punkte $O$ als Reductionspunkt ist:

$$\mathfrak{S} = O\varkappa + \sum_1^n {}_l \varrho_l \varkappa_l = O\varkappa + |\gamma.$$

Hierbei ist $|\gamma$ ein Feld, dessen Fläche und Stellung bestimmte Geltung hat, welches aber jedwede Lage im Raume haben kann. Wir dürfen deshalb setzen:

$$|\gamma = (O - C)\varkappa' = O\varkappa' - C\varkappa',$$

womit das Feld zu einem Spathecke wird, dessen einer Eckpunkt $O$, das äquivalent den beiden Linientheilen $O\varkappa'$ und $-C\varkappa'$ ist. Dadurch erhalten wir:

$$\mathfrak{S} = O\varkappa + O\varkappa' - C\varkappa',$$

den Linientheilverein äquivalent drei Linientheilen, von denen zwei auf sich schneidenden Trägern liegen, und es ist:

$$\mathfrak{S} = O(\varkappa + \varkappa') - C\varkappa',$$

$$\mathfrak{S} = O\varkappa'' - C\varkappa', \quad \varkappa'' = \varkappa + \varkappa'.$$

Aber $O\varkappa''$ und $-C\varkappa'$ sind zwei Linientheile, deren Träger sich kreuzen, und es giebt unendlich viele Paare in Ebenen senkrecht zu $\gamma$, welche gleich $|\gamma$ sind, auch ist $O$ ein beliebiger, willkürlicher Punkt des Raumes, so dass im Allgemeinen ein Verein von Linientheilen auf unendlich viele Arten zwei sich kreuzenden Linientheilen äquivalent ist.

Setzen wir (siehe Heft 2, Taf. III, Fig. 4):

$$O\varkappa'' = \bar{\varkappa}'' = OS, \quad -C\varkappa' = \bar{\varkappa}' = CD,$$

dann erhalten wir:

$$\mathfrak{S} = \bar{\varkappa}'' + \bar{\varkappa}' = OS + CD,$$

$$\bar{\varkappa}''\bar{\varkappa}' = (OS)(CD) = OSCD = O(S-O)(C-O)(D-C),$$

$$\bar{\varkappa}''\bar{\varkappa}' = O\varkappa''|\gamma = O(\varkappa + \varkappa')|\gamma,$$

$$\bar{\varkappa}''\bar{\varkappa}' \equiv \varkappa|\gamma = \varkappa|\gamma_0 = kg\cos(\varkappa,\gamma) = kg_0,$$

$$\bar{\varkappa}''\bar{\varkappa}' \equiv k_x g_x + k_y g_y + k_z g_z = k_x g_{0,x} + k_y g_{0,y} + k_z g_{0,z}.$$

„Ein Verein von Linientheilen, dessen Resultante nicht verschwindet, ist auf unendlich viele Arten zwei sich kreuzenden Linientheilen äquivalent, der Spath über jedem solchen Paare als Gegenkanten ist von derselben Grösse, seine Volumenzahl gleich dem Produkte aus den Längenzahlen der Resultanten und dem Achsenmoment für die Centralachse, gleich der Invarianten des Vereines.“

## § 9. Reduction eines Vereines von Linientheilen auf zwei sich senkrecht kreuzende Linientheile, wenn die Reduction für die Centralachse $\mu_0$ bekannt ist, der eine Linientheil in einer gegebenen Ebene liegen soll.

1. Diese Ebene schneide die Centralachse $\mu_0$ in $O$, $\varepsilon$ sei ihre Stellungsstrecke, $\varepsilon_\varkappa$ die Einheitsstrecke der Strahlen $\mu$, $\sphericalangle(\varepsilon, \varkappa) = \alpha$.

Mit $O$ als Coordinatenpol ist die Gleichung der Ebene $\mathfrak{P}$ mit der Stellungsstrecke $\varepsilon$:

$$\varepsilon \mid \varrho = 0;$$

die durch $\varepsilon$ und $\varepsilon_\varkappa$ bestimmte Ebene durch $O$ hat die Gleichung:

$$\tau = u\varepsilon + v\varepsilon_\varkappa.$$

Für die Schnittlinie beider Ebenen ist:

$$0 = u + v\varepsilon \mid \varepsilon_\varkappa,$$

daher ihre Gleichung:

$$\sigma = v[\varepsilon_\varkappa - (\varepsilon \mid \varepsilon_\varkappa)\varepsilon],$$

so dass die Einheitsstrecke dieser Linie:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_\varkappa - (\varepsilon \mid \varepsilon_\varkappa)\varepsilon}{\sqrt{[\varepsilon_\varkappa - (\varepsilon \mid \varepsilon_\varkappa)\varepsilon]^2}} = \frac{\varepsilon_\varkappa - (\varepsilon \mid \varepsilon_\varkappa)\varepsilon}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon_\varkappa)^2}},$$

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_\varkappa - \cos\alpha\,\varepsilon}{\sin\alpha}.$$

Für die Centralachse $\mu_0$ ist:

$$\mathfrak{S} = O\varkappa + \mid \gamma_0.$$

Wir dürfen setzen (siehe Heft 2, Taf. III, Fig. 5):

$$\varkappa = k_1\varepsilon + k_2\varepsilon' = k\cos\alpha\,\varepsilon + k\sin\alpha\,\varepsilon' = \varkappa_1 + \varkappa_2,$$

$$\gamma_0 = g_1\varepsilon' + g_2\varepsilon = g_0\sin\alpha\,\varepsilon' + g_0\cos\alpha\,\varepsilon = \gamma_1 + \gamma_2,$$

womit wir erhalten:

$$\mathfrak{S} = (O\varkappa_1 + \mid \gamma_1) + (O\varkappa_2 + \mid \gamma_2),$$

wodurch der Verein von Linientheilen in zwei Partialsysteme zerfällt, für die die Aequivalenzgleichungen bestehen:

$$\mathfrak{S}_1 = O\varkappa_1 + \mid \gamma_1, \quad \mathfrak{S}_2 = O\varkappa_2 + \mid \gamma_2,$$

und weil $\varkappa_1 \mid \gamma_1 = 0$, $\varkappa_2 \mid \gamma_2 = 0$ ist, so ist jedes Partialsystem äquivalent einer Einzelresultanten längs seiner Centralachse, welche Resultanten die Linientheile $\bar{\varkappa}_1$ und $\bar{\varkappa}_2$ längs der Strahlen $\chi_1$ und $\chi_2$ sind, von denen der erste normal zur Ebene $\mathfrak{P}$ ist, der zweite in sie hineinfällt. Die Gleichungen dieser Centralachsen sind:

$$\varrho_1 = \frac{\mid(\varkappa_1\gamma_1)}{k_1^2} + u_1\varepsilon, \quad \varrho_2 = \frac{\mid(\varkappa_2\gamma_2)}{k_2^2} + u_2\varepsilon',$$

*ihre Abstände* von dem Punkte O sind:

$$\lambda_1 = (P - O) = \frac{|(\varkappa_1 \gamma_1)}{k^2_1}, \quad \lambda_2 = (Q - O) = \frac{|(\varkappa_2 \gamma_2)}{k^2_2},$$

$$l_1 = \frac{g_1}{k_1} = \frac{g_0}{k} tg\,\alpha, \qquad l_2 = \frac{g_2}{k_2} = \frac{g_0}{k} cotg\,\alpha,$$

$$l_1 : l_2 = tg^2 \alpha,$$

und es ist:

$$\lambda_1 \lambda_2 \equiv |\,[(\varkappa_1 \gamma_1)(\varkappa_2 \gamma_2)] = |\,[(\varkappa_1 \varkappa_2 \gamma_2)\gamma_1 - (\gamma_1 \varkappa_2 \gamma_2)\varkappa_1] = 0,$$

so dass $\lambda_1$ und $\lambda_2$ in gerader Linie liegend entgegengesetzten Sinnes sind. Die Strecken $\lambda_1$ und $\lambda_2$ sind die kürzesten Abstände von $\mu_0$, $\chi_1$ und $\mu_0$, $\chi_2$, $\lambda_1 - \lambda_2 = (P - Q)$ ist der kürzeste Abstand von $\chi_1$ und $\chi_2$, welcher $\mu_0$ rechtwinklig schneidet. Damit ist der Verein von Linientheilen auf zwei sich rechtwinklig kreuzende Linientheile längs den Geraden $\chi_1$ und $\chi_2$ reducirt, wir haben:

$$\mathfrak{S} = P\varkappa_1 + Q\varkappa_2.$$

Mit $\bar{\varkappa}_1 = PP_1$, $\bar{\varkappa}_2 = QQ_1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\bar{\varkappa}_1 \bar{\varkappa}_2 &= (PP_1)(QQ_1) = P(P_1 - P)(Q - P)(Q_1 - Q) \\
&= P(P_1 - P)[(Q - O) - (P - O)](Q_1 - Q) \\
&= P\varkappa_2\varkappa_1 \left\{ \frac{|(\varkappa_2 \gamma_2)}{k^2_2} - \frac{|(\varkappa_1 \gamma_1)}{k^2_1} \right\} \\
&= P \left\{ \frac{1}{k^2_2} (\varkappa_2 \varkappa_1) \,|\, (\varkappa_2 \gamma_2) - \frac{1}{k^2_1} (\varkappa_2 \varkappa_1) \,|\, (\varkappa_1 \gamma_1) \right\},
\end{aligned}$$

$$\bar{\varkappa}_1 \bar{\varkappa}_2 \equiv \frac{1}{k^2_2} \begin{vmatrix} \varkappa_2 | \varkappa_2 & \varkappa_1 | \varkappa_2 \\ \varkappa_2 | \gamma_2 & \varkappa_1 | \gamma_2 \end{vmatrix} - \frac{1}{k^2_1} \begin{vmatrix} \varkappa_2 | \varkappa_1 & \varkappa_1 | \varkappa_1 \\ \varkappa_2 | \gamma_1 & \varkappa_1 | \gamma_1 \end{vmatrix},$$

$$\bar{\varkappa}_1 \bar{\varkappa}_2 \equiv \varkappa_1 | \gamma_2 + \varkappa_2 | \gamma_1 = k g_0 (cos^2 \alpha + sin^2 \alpha) = k g_0,$$

gleich der Invarianten des Vereines.

Für die Länge des kürzesten Abstandes der Centralachsen $\chi_1$ und $\chi_2$ erhalten wir:

$$(Q - P)^2 = \left\{ \frac{|(\varkappa_2 \gamma_2)}{k^2_2} - \frac{|(\varkappa_1 \gamma_1)}{k^2_1} \right\}^2 = \frac{g^2_0}{k^2} (2 \sec 2\alpha)^2.$$

Für das Product aus den Längen der Linientheile $\bar{\varkappa}_1$ und $\bar{\varkappa}_2$ ergiebt sich:

$$k_1 k_2 = \tfrac{1}{2} k^2 sin\, 2\alpha.$$

Ferner haben wir

$$(P - O) \,|\, (O - Q) \frac{(\varkappa_1 \gamma_1) \,|\, (\gamma_2 \varkappa_2)}{k^2_1 k^2_2} = \left(\frac{g_0}{k}\right)^2.$$

Lassen wir den Neigungswinkel der Ebene $\mathfrak{P}$ gegen die Centralachse variiren, dann beschreiben die Punkte $P$ und $Q$ eine Punktinvolution mit dem Mittelpunkte $O$.

Wir haben:

$$\mathfrak{S} = P\varkappa_1 + Q\varkappa_2.$$

Ist $M$ ein beliebiger Punkt der Ebene $\mathfrak{P}$, dann ist die Reduction für diesen Punkt, wenn wir von der vorstehenden Gleichung ausgehen:

$$\mathfrak{S} = M\varkappa_1 + (P-M)\varkappa_1 + M\varkappa_2 + (Q-M)\varkappa_2$$
$$= M\varkappa + (P-M)\varkappa_1 + (Q-M)\varkappa_2,$$
$$\mathfrak{S} = M\varkappa + |\gamma'_1 + |\gamma'_2,$$

wenn gesetzt wird:

$$(P-M)\varkappa_1 = |\gamma'_1, \quad (Q-M)\varkappa_2 = |\gamma'_2,$$

und das Moment im Punkte $M$ ist:

$$|\gamma = |(\gamma'_1 + \gamma'_2) = (P-M)\varkappa_1 + (Q-M)\varkappa_2,$$

aus welcher Gleichung folgt:

$$(P-M)|\gamma = 0,$$

denn es ist $(P-M)(Q-M)\varkappa_2 = 0$, weil diese drei Strecken in einer Ebene liegen.

Das resultirende Achsenmoment steht senkrecht auf dem Strahle $MP$.

Fällt $M$ mit $P$ zusammen, dann ergiebt sich:

$$\gamma_P = |[(Q-P)\varkappa_2].$$

Weil $(Q-P)$ und $\varkappa_2$ in der Ebene $\mathfrak{P}$ liegen, so ist $\gamma_P$ senkrecht zu $\mathfrak{P}$, fällt in $\chi_1$, $P$ der Pol der Ebene $\mathfrak{P}$.

Weil $M$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{P}$, so sind die Achsenmomente der Punkte eines jeden Strahles der Ebene $\mathfrak{P}$ durch ihren Pol $P$ senkrecht zu diesem Strahle.

Fällt $M$ mit $Q$ zusammen, dann erhalten wir:

$$\gamma_Q = |[(P-Q)\varkappa_1],$$

und weil $(P-Q)$ in der Ebene $\mathfrak{P}$ liegt, $\varkappa_1$ zu ihr normal ist, so fällt das Achsenmoment des Punktes $Q$ in die Ebene $\mathfrak{P}$, in $\chi_2$.

Coincidirt der Punkt $M$ mit irgend einem Punkte $V$ der Geraden $\chi_2$, dann haben wir:

$$|\gamma_V = (P-V)\varkappa_1 + (Q-V)\varkappa_2,$$

aber $(Q-V)\varkappa_2 = 0$, denn $(Q-V)$ und $\varkappa_2$ sind parallele Strecken, folglich ist:

$$|\gamma_V = (P-V)\varkappa_1,$$

und weil $(P-V)$ in $\mathfrak{P}$ liegt, $\varkappa_1$ zu $P$ senkrecht ist, so liegt $\gamma_V$ in $\mathfrak{P}$, mithin ist die Gerade $\chi_2$ die Charakteristik der Ebene $\mathfrak{P}$.

Das Moment des Systemes für den beliebigen Punkt $U$ von $\chi_1$ ist

$$|\gamma_U = (P-U)\varkappa_1 + (Q-U)\varkappa_2,$$

aber $(P-U)\varkappa_1 = 0$, mithin:

$$|\gamma_U = (Q-U)\varkappa_2,$$

so dass nur für den Punkt $P$ von $\chi_1$ das Achsenmoment in $\chi_1$ fällt.

Weil

$$|\gamma_U = (Q-U)\varkappa_2, \quad |\gamma_V = (P-V)\varkappa_1$$

ist, so schneiden sich die Ebenen der Momente der Punkte von $\chi_1$, $(\chi_2)$ in $\chi_2$, $(\chi_1)$.

Die Achsenmomentenstrecke des beliebigen Punktes $M$ der Ebene $\mathfrak{P}$ ist

$$\gamma = \gamma'_1 + \gamma'_2 = |[(P-M)\varkappa_1] + |[(Q-M)\varkappa_2],$$

*es ist* $\gamma'_1$ *senkrecht zu* $(P-M)$ *und liegt in* $\mathfrak{P}$, $\gamma'_2$ *senkrecht zu* $\mathfrak{P}$.

Bezeichnet $\mathfrak{v}$ den Winkel zwischen $\varepsilon$ und $\gamma$, so ist:

$$tg\,\mathfrak{v} = \frac{\sqrt{(\gamma'_2\gamma)^2}}{\gamma'_2|\gamma} = \frac{\sqrt{(\gamma'_2\gamma'_1)^2}}{\gamma'^2_2}.$$

Aber es ist:
$$(\gamma'_2\gamma'_1)^2 = \gamma'^2_1\gamma'^2_2 = (P-M)^2(Q-N)^2 k^2_1 k^2_2,$$
wenn wir

$$|\gamma'_2 = (Q-M)\varkappa_2 = [p(Q-P)+q\varkappa_2]\varkappa_2 = p(Q-P)\varkappa_2 = (Q-N)\varkappa_2$$

nehmen, und damit ergiebt sich:

$$tg\,\mathfrak{v} = \frac{\sqrt{(P-M)^2}}{\sqrt{(Q-N)^2}}\frac{k_1}{k_2} = \frac{\sqrt{(P-M)^2}}{\sqrt{(Q-N)^2}}\,cotg\,\mathfrak{a}.$$

„Das resultirende Achsenmoment eines beliebigen Punktes $M$ der Ebene $\mathfrak{P}$ ist stets senkrecht zu der Verbindungslinie des Reductionspunktes und des Poles $P$ der Ebene $\mathfrak{P}$, mit der Aenderung des Ortes von $M$ wechselt seine Neigung gegen die Ebene $\mathfrak{P}$."

Mit $M=P$ ist $tg\,\mathfrak{v}=0$, $\gamma$ normal zu $\mathfrak{P}$, mit $M=Q$ ist $N=Q$, $tg\,\mathfrak{v}=\infty$, $\gamma$ fällt in $\mathfrak{P}$.

Die Neigungswinkel von $\varkappa$ und $\gamma$ gegen die Normale der Ebene $\mathfrak{P}$ liegen im Allgemeinen in verschiedenen Ebenen. Diese Ebenen sind durch die Felder $(\varepsilon\varkappa)$ und $(\varepsilon\gamma)$ gegeben. Bezeichnet $\mathfrak{w}$ ihren Winkel, dann ist, mit $|(\varepsilon\varkappa)=\zeta$, $|(\varepsilon\gamma)=\eta$:

$$cos\,\mathfrak{w} = \frac{\zeta|\eta}{\sqrt{\zeta^2\eta^2}}.$$

Nun haben wir:

$$\zeta|\eta = |(\varepsilon\varkappa)||(\varepsilon\gamma) = |(\varepsilon\varkappa)(\varepsilon\gamma) = (\varepsilon\varkappa_2)|(\varepsilon\gamma'_1) = \varkappa_2|\gamma'_1,$$

$$\zeta|\eta = \varkappa_1\varkappa_2(P-M),\quad \zeta^2 = (\varepsilon\varkappa_2)^2 = k^2_2,\quad \eta^2 = (\varepsilon\gamma'_1)^2 = \gamma'^2_1 = (P-M)^2 k^2_1,$$

mithin ist:
$$cos\,\mathfrak{w} = \frac{\varkappa_1\varkappa_2(P-M)}{k^2 sin\,\mathfrak{a}\,cos\,\mathfrak{a}\sqrt{(P-M)^2}} = \frac{2\varkappa_1\varkappa_2\varepsilon_M}{k^2 sin\,2\,\mathfrak{a}},$$

wenn $\varepsilon_M$ die Einheitsstrecke von $(P-M)$ bedeutet.

Fällt insbesondere $M$ mit $P$ zusammen, dann ist $cos\,\mathfrak{w}=\frac{0}{0}$, der Winkel unbestimmt, $\varkappa_1$ und $\gamma$ sind parallel; mit $M=Q$ haben wir $cos\,\mathfrak{w}=1$, die beiden Ebenen fallen zusammen.

Die erhaltenen Resultate sind von

$$\frac{g_0}{k} = p,$$

dem Parameter des Linientheilvereines und dem Neigungswinkel der Ebene $\mathfrak{P}$ gegen die Centralachse $\mu_0$ abhängig. Dreht sich die Ebene $\mathfrak{P}$ bei demselben Neigungswinkel gegen die Centralachse, oder verschiebt sie sich parallel zu der Centralachse, dann bleiben diese Resultate ungeändert.

„Der Verein ist äquivalent zwei sich rechtwinklig kreuzenden Linientheilen längs der Normalen der Ebene durch ihren Pol und längs deren Charakteristik."

Wenn $\alpha = 0$ ist, dann ist die Ebene senkrecht zur Centralachse, $\varkappa_2$ und $\gamma_1$ werden verschwindend klein, der Pol fällt mit $O$ zusammen und die Charakteristik ist die unendlich ferne Gerade der Ebene, der Verein ist äquivalent $\bar{\varkappa}$ längs $\mu_0$ und einem verschwindenden Linientheile längs der Charakteristik.

Wenn $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ist, dann geht die Ebene $\mathfrak{P}$ durch die Centralachse, es wird $\varkappa_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\varkappa_2 = \varkappa$, $\gamma_1 = \gamma_0$, der Pol rückt in unendliche Ferne, die Charakteristik liegt auf der Centralachse, der Verein ist äquivalent $\bar{\varkappa}$ entlang $\mu_0$ und einem verschwindenden Linientheile längs der Normalen der Ebene durch ihren unendlich fernen Pol.

2. Der Pol und die Charakteristik einer Ebene $\mathfrak{P}$ lassen sich, wie bereits gezeigt worden ist, direct bestimmen.

Nach § 4 sind die Centralachse, die Normale der Ebene und ihre Charakteristik einer Ebene parallel. Ist

$$\mathfrak{S} = O\varkappa + |\gamma_0,$$

setzen wir

$$\varkappa = \varkappa_1 \varepsilon + \varkappa_2 \varepsilon',$$

dann ist das Achsenmoment im Pole $P$ parallel zu $\varkappa_1$, die Charakteristik parallel zu $\varkappa_2$ und die Achsenmomente ihrer Punkte fallen in die Ebene $\mathfrak{P}$.

Das Achsenmoment für den Punkt $P$ ist

$$\gamma_P = \gamma_0 + |[(O-P)\varkappa] = u_1 \varkappa_1,$$

woraus folgt:

$$\gamma_0 | \varkappa = u_1 \varkappa_1 | \varkappa, \quad u_1 = \frac{\gamma_0 | \varkappa}{\varkappa_1^2} = \frac{g_0}{k \cos^2 \alpha},$$

mithin ist:

$$\gamma_P = \frac{\varkappa | \gamma_0}{\varkappa_1^2} \varkappa_1 = \frac{g_0}{k \cos^2 \alpha} \varkappa_1, \quad g_P = g_0 \sec \alpha.$$

Weiter haben wir, mit $(P-O) = \lambda_1$:

$$\lambda_1 = -\frac{|(\varkappa \gamma_P)}{k^2} = \frac{u_1 | (\varkappa_1 \varkappa_2)}{k^2} = \frac{g_0}{k^3 \cos^2 \alpha} | (\varkappa_1 \varkappa_2),$$

$$l_1 = \frac{g_0}{k} tg\, \alpha,$$

und es ist $\lambda_1$ senkrecht zu der Ebene des Neigungswinkels der Ebene $\mathfrak{P}$ gegen die Centralachse $\mu_0$.

Die Gleichung des Strahles $\chi_1$ lautet:

$$\varrho = \frac{g_0}{k^3 \cos^2 \alpha} | (\varkappa_1 \varkappa_2) + u \varepsilon,$$

oder:

$$[k^3 \cos^2 \alpha\, \varrho - g_0 | (\varkappa_1 \varkappa_2)]\, \varepsilon = 0.$$

Die Gleichung der Charakteristik ist:

$$\varrho = \lambda_2 + v \varkappa_2.$$

Weil das Achsenmoment in $Q = O + \lambda_2$ parallel zu $\varkappa_2$ ist, so haben wir:

$$\gamma_Q = \gamma_0 + | [(O-Q)\varkappa] = u_2 \varkappa_2,$$

*woraus hervorgeht:*

$$\varkappa\,|\,\gamma_0 = u_2\,\varkappa\,|\,\varkappa_2, \quad u_2 = \frac{\varkappa\,|\,\gamma_0}{\varkappa_2^2} = \frac{g_0}{k\,sin^2\,\alpha},$$

so dass

$$\gamma_Q = \frac{\varkappa\,|\,\gamma_0}{\varkappa_2^2}\,\varkappa_2 = \frac{g_0}{k\,sin^2\,\alpha}\,\varkappa_2, \quad g_Q = g_0\,cosec\,\alpha$$

ist.

Ferner haben wir:

$$\lambda_2 = -\frac{|(\varkappa\,\gamma_Q)}{k^2} = \frac{u_2\,|(\varkappa_2\,\varkappa)}{k^2} = \frac{g_0}{k^3\,sin^2\,\alpha}\,|(\varkappa_2\,\varkappa_1),$$

$$l_2 = \frac{g_0}{k}\,cotg\,\alpha.$$

Daher ist die Gleichung der Charakteristik $\chi_2$:

$$\varrho = \frac{g_0}{k^3\,sin^2\,\alpha}\,|(\varkappa_2\,\varkappa_1) + u\,\varkappa_2,$$

oder:

$$\{k^3\,sin^2\,\alpha\,\varrho - g_0\,|(\varkappa_2\,\varkappa_1)\}\,\varkappa_2 = 0.$$

Die Strecken $\lambda_1$ und $\lambda_2$ fallen in eine zu $|(\varkappa_1\,\varkappa_2)$ parallele Gerade, so dass $(Q-P) = \lambda = -\lambda_1 + \lambda_2$ der kürzeste Abstand der Strahlen $\chi_1$ und $\chi_2$ ist, welcher die Centralachse in $O$ rechtwinklig schneidet. Wir finden

$$\lambda = \frac{g_0}{k^3}\,(2\,cosec\,2\,\alpha)^2\,|(\varkappa_2\,\varkappa_1), \quad l = \frac{g_0}{k}\,2\,cosec\,2\,\alpha.$$

Nehmen wir noch auf $\chi_1$ und $\chi_2$ die Linientheile $PP_1 = \bar{\varkappa}_1$, $QQ_1 = \bar{\varkappa}_2$ an und bilden wir das äussere Product aus denselben, so ergiebt sich:

$$\bar{\varkappa}_1\,\bar{\varkappa}_2 = (PP_1)(QQ_1) = P(P_1 - P)(Q - P)(Q_1 - Q),$$

$$\bar{\varkappa}_1\,\bar{\varkappa}_2 \equiv \frac{g_0}{k^3}\,(2\,cosec\,2\,\alpha)^2\,(\varkappa_1\,\varkappa)^2 = k\,g_0,$$

gleich der Invarianten des Systemes.

### § 10. Reduction eines Vereines von Linientheilen auf zwei sich senkrecht kreuzende Linientheile, wenn die Reduction für einen beliebigen Strahl $\mu$ bekannt ist.

1. Ist $O$ irgend ein Punkt des Strahles $\mu$, dann ist:

$$\mathfrak{S} = O\,\varkappa + |\,\gamma.$$

Wir gehen von einer Ebene $\mathfrak{P}$ durch $O$ aus, deren Stellungsstrecke $\varepsilon$ mit $\mu$ den Winkel $\alpha$ einschliesst.

Die Ebenen der Neigungswinkel der Strecken $\varkappa$ und $\gamma$ gegen $\varepsilon$ schneiden im Allgemeinen die Ebene $\mathfrak{P}$ in zwei von einander verschiedenen Geraden, deren Einheitsstrecken $\varepsilon'$ und $\varepsilon''$ sein mögen.

Die Gleichung der Ebene $\mathfrak{P}$ ist mit $O$ als Pol:

$$\varepsilon\,|\,\varrho = 0.$$

Die Strecken $\varepsilon'$ und $\varepsilon''$ ergeben sich ebenso wie im vorigen Paragraphen $\varepsilon'$, es ist:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_x - \cos\mathfrak{a}\,\varepsilon}{\sin\mathfrak{a}}, \quad \varepsilon'' = \frac{\varepsilon_\gamma - \cos\mathfrak{b}\,\varepsilon}{\sin\mathfrak{b}},$$

wenn noch $\varepsilon_\gamma$ die Einheitsstrecke von $\gamma$ und $\mathfrak{b}$ den Winkel zwischen $\varepsilon$ und $\gamma$ bedeutet. Wir dürfen setzen:

$$x = k_1\varepsilon + k_2\varepsilon' = k\cos\mathfrak{a}\,\varepsilon + k\sin\mathfrak{a}\,\varepsilon' = x_1 + x_2,$$

$$\gamma = g_2\varepsilon + g_1\varepsilon'' = g\cos\mathfrak{b}\,\varepsilon + g\sin\mathfrak{b}\,\varepsilon'' = \gamma_2 + \gamma_1.$$

Damit wird: $\mathfrak{S} = Ox + |\gamma = O(x_1 + x_2) + |(\gamma_1 + \gamma_2),$

$$\mathfrak{S} = (Ox_1 + |\gamma_1) + (Ox_2 + |\gamma_2),$$

womit der Verein in zwei Partialsysteme

$$\mathfrak{S}_1 = (Ox_1 + |\gamma_1), \quad \mathfrak{S}_2 = (Ox_2 + \gamma_2)$$

von solcher Beschaffenheit zerlegt ist, dass $x_1|\gamma_1 = 0$, $x_2|\gamma_2 = 0$, jedes System äquivalent einer Einzelresultanten längs seiner Centralachse ist, und es sind diese Resultanten $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, welche sich rechtwinklig kreuzen (siehe Heft 2, Tafel III, Fig. 6), so dass wir haben:

$$\mathfrak{S} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2.$$

Sind $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die Normalabstände der Träger dieser Linientheile von $O$, dann ist:

$$\lambda_1 = (P - O) = \frac{|(x_1\gamma_1)}{k^2_1}, \quad \lambda_2 = (Q' - O) = \frac{|(x_2\gamma_2)}{k^2_2},$$

$$l_1 = \frac{g_1}{k_1}, \qquad l_2 = \frac{g_2}{k_2},$$

und die Gleichungen dieser Träger $\chi_1$ und $\chi_2$ sind mit $O$ als Coordinatenpol:

$$\varrho_1 = \frac{|(x_1\gamma_1)}{k^2_1} + ux_1, \quad \varrho_2 = \frac{|(x_2\gamma_2)}{k^2_2} + vx_2,$$

oder:

$$[k^2_1\varrho_1 - |(x_1\gamma_1)]\,\varepsilon = 0, \quad [k^2_2\varrho_2 - |(x_2\gamma_2)]\,\varepsilon' = 0;$$

$\lambda_1$, $\lambda_2$ und $\chi_2$ liegen in $\mathfrak{P}$, sind senkrecht zu $\chi_1$, $\lambda_1$ ist der kürzeste Abstand von $\chi_1$ und $\mu$, $\lambda_2$ derjenige von $\chi_2$ und $\mu$. Ziehen wir die Parallele zu $\lambda_2$ durch $P$, dann schneidet dieselbe $\chi_2$ in einem Punkte $Q$, und es ist $(Q - P)$ der kürzeste Abstand von $\chi_1$ und $\chi_2$.

Das Achsenmoment des Punktes $P$ folgt aus:

$$\gamma_P = \gamma + |[(O - P)x] = \gamma + |[x\lambda_1],$$

womit sich ergiebt, wenn wir den Werth von $\lambda_1$ substituiren und reduciren,

$$\gamma_P = \gamma_2 + \frac{x_2|\gamma}{k^2_1}x_1,$$

und hieraus erhalten wir, indem $x_2 = x - x_1$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ ist,

$$\gamma_P = \frac{x|\gamma}{k^2_1}x_1 = \frac{x|\gamma_0}{k^2_1}x_1 = \frac{g_0}{k\cos^2\mathfrak{a}}x_1, \quad g_P = g_0\sec\mathfrak{a},$$

womit $\gamma_P$ als ein Vielfaches von $x_1$ resp. $\varepsilon$ erscheint, der Punkt $P$ demnach *der Pol der Ebene* $\mathfrak{P}$ ist.

Wir ermitteln ferner das Achsenmoment eines beliebigen Punktes $V$ des Strahles $\chi_2$, wobei wir von der Reduction für den Strahl $\mu_P$ des Poles $P$ ausgehen wollen.

Zunächst ist:

$$\gamma_V = \gamma_P + | [(P-V)\varkappa] = \gamma_P + | [(P-V)\varkappa_1] + | [\lambda_1 - \lambda_2 - u\varkappa_2)\varkappa_2]$$
$$= | [(P-V)\varkappa_1] + | [(\lambda_1 - \lambda_2)\varkappa_2].$$

Setzen wir die Werthe von $\lambda_1$ und $\lambda_2$ ein und reduciren, so ergiebt sich:

$$\gamma_V = | [(P-V)\varkappa_1].$$

Die Achsenmomente der Punkte $V$ fallen in die Ebene $\mathfrak{P}$, mithin ist $\chi_2$ die Charakteristik dieser Ebene.

Mit $V = Q$ ergiebt sich:

$$\gamma_Q = | [(P-Q)\varkappa_1].$$

Gehen wir von $V$ als Reductionspunkt aus, dann ist:

$$\gamma_P = \gamma_V + | [(V-P)\varkappa] = | [(P-V)\varkappa_1] + | [(V-P)(\varkappa_1 + \varkappa_2)],$$
$$\gamma_P = | [(V-P)\varkappa_2] = | [(Q-P)\varkappa_2].$$

2. Mit $P$ als Coordinatenpol sind die Gleichungen der Geraden $PQ$ und $\chi_2$:

$$\varrho_1 = u \,|(\varkappa_2\varkappa_1),$$
$$\varrho_2 = \lambda_2 - \lambda_1 + v\varkappa_2, \quad \varrho_2 = \frac{|(\varkappa_2\gamma_2)}{k^2_2} - \frac{|(\varkappa_1\gamma_1)}{k^2_1} + v\varkappa_2.$$

Aus diesen Gleichungen folgt mit $\varrho_1 = \varrho_2 = \lambda = (Q-P)$:

$$\frac{|(\varkappa_2\gamma_2)}{k^2_2} - \frac{|(\varkappa_1\gamma_1)}{k^2_1} + v\varkappa_2 = u\,|(\varkappa_2\varkappa_1),$$

die Multiplication dieser Relation mit $(\varkappa_2\gamma_2)$ giebt:

$$\frac{(\varkappa_2\gamma_2)^2}{k^2_2} - \frac{(\varkappa_2\gamma_2)\,|(\varkappa_1\gamma_1)}{k^2_1} = u(\varkappa_2\gamma_2)\,|(\varkappa_2\varkappa_1),$$

und hieraus folgt nach gehöriger Reduction:

$$u = \frac{g_0}{k^3}(2\,cosec\,2\alpha)^2.$$

Damit ergiebt sich:

$$\lambda = (Q-P) = \frac{g_0}{k^3}(2\,cosec\,2\alpha)^2\,|(\varkappa_2\varkappa_1),$$
$$l = 2\frac{g_0}{k}\,cosec\,2\alpha.$$

3. Bezeichnet $\lambda_0$ den Abstand der Centralachse $\mu_0$ vom Punkte $O$, dann ist:

$$\lambda_0 = \frac{|(\varkappa\gamma)}{k^2},$$

und die Gleichung der Centralachse $\mu_0$ mit $O$ als Coordinatenpol lautet:

$$\tau = \frac{|(\varkappa\gamma)}{k^2} + u\varkappa;$$

ferner ist die Gleichung des Strahles $PQ$:

$$\sigma = \frac{|(\varkappa_1\gamma_1)}{k^2_1} + v\,|\,(\varkappa_2\varkappa_1).$$

Für den Schnittpunkt dieser beiden Geraden muss sein:

$$\frac{|(\varkappa\gamma)}{k^2} + u\varkappa = \frac{|(\varkappa_1\gamma_1)}{k^2_1} + v\,|\,(\varkappa_2\varkappa_1),$$

woraus durch Multiplication mit $|\varkappa$ folgt:

$$u = \frac{\varkappa_2\varkappa_1\gamma_1}{k^2k^2_1},$$

so dass der Fahrstrahl $\tau_s$ des Schnittpunktes:

$$\tau_s = \frac{|(\varkappa\gamma)}{k^2} + \frac{\varkappa_2\varkappa_1\gamma_1}{k^2k^2_1}\varkappa.$$

Die Gleichung der Ebene $\mathfrak{P}$ lautet:

$$\varkappa_1\,|\,\varrho = 0.$$

Für den Schnittpunkt dieser Ebene und der Centralachse muss $\varrho = \tau$, also, wenn wir die Gleichung der Centralachse mit $|\varkappa_1$ multipliciren, sein:

$$0 = \frac{\varkappa\gamma\varkappa_1}{k^2} + u\varkappa\,|\,\varkappa_1, \quad u = \frac{\varkappa_2\varkappa_1\gamma}{k^2k^2_1},$$

mithin ist der Fahrstrahl $\tau_{s'}$ dieses Punktes:

$$\tau_{s'} = \frac{|(\varkappa\gamma)}{k^2} + \frac{\varkappa_2\varkappa_1\gamma_1}{k^2k^2_1}\varkappa = \tau_s,$$

so dass die Centralachse den kürzesten Abstand der Geraden $\chi_1$ und $\chi_2$ rechtwinklig in $C$ schneidet, ihn nicht kreuzt.

Bezeichnet $\lambda' = (C - P)$ den Abstand der Centralachse vom Pole $P$, dann ist:

$$\lambda' = \frac{|(\varkappa\gamma_P)}{k^2} = \frac{g_0}{k^3\cos^2\alpha}\,|\,(\varkappa_2\varkappa_1), \quad l' = \frac{g_0}{k}\,tg\,\alpha,$$

es fällt die Strecke $\lambda'$ mit $\lambda = (Q - P)$ zusammen, es schneidet $\mu_0$ die $(Q - P)$ rechtwinklig.

Ferner ist, mit $(Q - C) = \lambda''$:

$$\lambda'' = \lambda - \lambda' = \frac{g_0}{k^3\sin^2\alpha}\,|\,(\varkappa_2\varkappa_1), \quad l'' = \frac{g_0}{k}\,cotg\,\alpha,$$

*und* wir haben nun noch:

$$\lambda' : \lambda'' = l' : l'' = tg^2\,\alpha.$$

### § 11. Ein Verein von Linientheilen ist äquivalent zwei unter beliebigem Winkel sich kreuzenden Linientheilen $\bar{\varkappa}_1$ und $\bar{\varkappa}_2$ auf den Trägern $\chi_1$ und $\chi_2$, deren kürzester Abstand $(Q-P)=\lambda$ bekannt sei.

1. Bestimmung der Centralachse $\mu_0$.

Weil der Werth eines Linientheiles von der Lage auf seinem Träger unabhängig ist, so lassen wir die Anfangselemente von $\bar{\varkappa}_1$ und $\bar{\varkappa}_2$ mit $P$ und $Q$ (siehe Heft 2, Taf. III, Fig. 7) zusammenfallen. — Wählen wir $P$ und $Q$ zu Reductionspunkten, so ist:

$$\mathfrak{S}_P = P(\varkappa_1+\varkappa_2)+\lambda\varkappa_2 = P\varkappa+\lambda\varkappa_2,$$
$$\mathfrak{S}_Q = Q(\varkappa_2+\varkappa_1)-\lambda\varkappa_1 = Q\varkappa-\lambda\varkappa_1,$$

und es sind hiernach die Achsenmomente in den Punkten $P$ und $Q$:

$$\gamma_P = |(\lambda\varkappa_2),\quad \gamma_Q = -|(\lambda\varkappa_1),$$

welche senkrecht zu dem kürzesten Abstande von $\chi_1$ und $\chi_2$, sowie normal zu den Linientheilen $\bar{\varkappa}_2$ und $\bar{\varkappa}_1$ resp. sind.

Bezeichnet $\lambda_1$ den kürzesten Abstand der Centralachse $\mu_0$ von $P$, so ist:

$$\lambda_1 = \frac{|(\varkappa\gamma_P)}{k^2} = \frac{(\varkappa_2\lambda)\,|\,\varkappa}{k^2} = \frac{\varkappa_2\,|\,\varkappa}{k^2}\lambda = \frac{k_2}{k}\cos(\varkappa_2,\varkappa)\lambda.$$

Nennen wir $\lambda'_2$ den Normalabstand der Centralachse $\mu_0$ von $Q$, dann haben wir

$$\lambda'_2 = \frac{|(\varkappa\gamma_2)}{k^2} = \frac{(\lambda\varkappa_1)\,|\,\varkappa}{k^2} = -\frac{\varkappa_1\,|\,\varkappa}{k^2}\lambda = -\frac{k_1}{k}\cos(\varkappa_1,\varkappa)\lambda,$$

und mit $\lambda_2 = -\lambda'_2$ ist:

$$\lambda_2 = \frac{k_1}{k}\cos(\varkappa_1,\varkappa)\lambda,\quad \lambda_1+\lambda_2=\lambda.$$

Die Centralachse schneidet daher den kürzesten Abstand der Träger $\chi_1$ und $\chi_2$ rechtwinklig, der Schnittpunkt $C$ der Centralachse mit $(Q-P)$ theilt die letztere Strecke in dem Verhältnisse:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1}\frac{\cos(\varkappa_2,\varkappa)}{\cos(\varkappa_1,\varkappa)} = \frac{k_2}{k_1}\frac{\cos(\varkappa_2,\mu_0)}{\cos(\varkappa_1,\mu_0)}.$$

Wegen

$$\varkappa = \varkappa_1+\varkappa_2$$

ist, wenn wir äussere Multiplication gebrauchen,

$$\varkappa_1\varkappa = \varkappa_1\varkappa_2,\quad \varkappa\varkappa_2 = \varkappa_1\varkappa_2,$$

so dass mit $\sphericalangle(\varkappa_1,\varkappa_2)=\mathfrak{c}$, welcher der Kreuzungswinkel von $\chi_1$ und $\chi_2$ ist,

$$k\sin(\varkappa_1,\varkappa) = k_2\sin\mathfrak{c},\quad k\sin(\varkappa,\varkappa_2) = k_1\sin\mathfrak{c}.$$

Vermöge dieser Relationen erhalten wir:

$$k_2 = k\,\frac{\sin(\varkappa_1,\varkappa)}{\sin\mathfrak{c}},\quad k_1 = k\,\frac{\sin(\varkappa,\varkappa_2)}{\sin\mathfrak{c}},$$

ferner hieraus:

$$k_2:k_1 = \sin(\varkappa_1,\varkappa):\sin(\varkappa,\varkappa_2).$$

Hiermit ergiebt sich:

$$\lambda_1 = \frac{\sin(\varkappa_1, \varkappa)}{\sin \mathfrak{c}} \cos(\varkappa, \varkappa_2)\lambda, \quad \lambda_2 = \frac{\sin(\varkappa, \varkappa_2)}{\sin \mathfrak{c}} \cos(\varkappa_1, \varkappa)\lambda,$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin(\varkappa_1, \varkappa)}{\cos(\varkappa_1, \varkappa)} : \frac{\sin(\varkappa, \varkappa_2)}{\cos(\varkappa, \varkappa_2)} = \frac{tg(\varkappa_1, \varkappa)}{tg(\varkappa, \varkappa_2)}.$$

„Die Centralachse theilt den kürzesten Abstand der Träger der Linientheile $\bar{\varkappa}_1$ und $\bar{\varkappa}_2$ nach dem Verhältnisse der Tangenten der Neigungswinkel von $\varkappa_1$ gegen $\varkappa$ und von $\varkappa$ gegen $\varkappa_2$."

Aus der Relation

$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$$

folgt ferner, wenn wir innere Multiplication anwenden,

$$\varkappa_1 | \varkappa = \varkappa_1^2 + \varkappa_1 | \varkappa_2, \quad \varkappa | \varkappa_2 = \varkappa_1 | \varkappa_2 + \varkappa_2^2,$$

und wenn wir diese Werthe von $\varkappa_1 | \varkappa$ und $\varkappa | \varkappa_2$ in die Gleichungen für $\lambda_1$ und $\lambda_2$ substituiren, so ergiebt sich:

$$\lambda_1 = \frac{\varkappa_1 | \varkappa_2 + \varkappa_2^2}{k^2} \lambda, \qquad \lambda_2 = \frac{\varkappa_1^2 + \varkappa_1 | \varkappa_2}{k^2} \lambda,$$

$$\lambda_1 = \frac{k_2}{k^2}(k_1 \cos \mathfrak{c} + k_2)\lambda, \quad \lambda_2 = \frac{k_1}{k^2}(k_1 + k_2 \cos \mathfrak{c})\lambda,$$

und mithin ist auch:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1} \frac{k_1 \cos \mathfrak{c} + k_2}{k_1 + k_2 \cos \mathfrak{c}}.$$

Sind insbesondere $\bar{\varkappa}_1$ und $\bar{\varkappa}_2$ zu einander senkrecht, dann ist $\cos \mathfrak{c} = 0$, folglich:

$$\lambda_1 = \frac{k^2_2}{k_2} \lambda, \quad \lambda_2 = \frac{k^2_1}{k^2} \lambda, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2.$$

Das Achsenmoment in $P$ ist:

$$\gamma_P = |(\lambda \varkappa_2),$$

also ist:

$$\varkappa | \gamma_P = \varkappa | \gamma_0 = \varkappa \lambda \varkappa_2 = -\lambda \varkappa \varkappa_2 = -\lambda \varkappa_1 \varkappa_2,$$

$$k g_0 = -l k k_2 \sin(\varkappa, \varkappa_2) = -l k^2 \frac{\sin(\varkappa, \varkappa_2) \sin(\varkappa_1, \varkappa)}{\sin \mathfrak{c}},$$

$$\frac{g_0}{k} = -\frac{l \sin(\varkappa, \varkappa_2) \sin(\varkappa_1, \varkappa)}{\sin \mathfrak{c}}.$$

Setzen wir $\sphericalangle (\varkappa_1, \varkappa) = \mathfrak{v}$, dann ist $\sphericalangle (\varkappa, \varkappa_2) = \mathfrak{c} - \mathfrak{v}$, und es wird:

$$\frac{g_0}{k} = -l \frac{\sin(\mathfrak{c} - \mathfrak{v}) \sin \mathfrak{v}}{\sin \mathfrak{c}}.$$

Damit ist der sogenannte Parameter $(g_0 : k)$ des Vereines bestimmt.

2. Die Achsenmomente der Punktreihen auf $\chi_1$ und $\chi_2$.

Für das Achsenmoment des beliebigen Punktes $U$ auf dem Strahle $\chi_1$ erhalten wir:

$$\gamma_U = \gamma_P + |[(P - U)\varkappa],$$

*so dass, mit* $(P - U) = -u\varkappa_1$:

$$\gamma_U = |(\lambda \varkappa_2) - u|(\varkappa_1 \varkappa_2) = |[(\lambda - u\varkappa_1)\varkappa_2],$$

aber es ist:

$$-u\varkappa_1 = P - U = (P - Q) + (Q - U) = -\lambda + \chi',$$

daher:

$$\gamma_U = |(\chi' \varkappa_2).$$

Das Achsenmoment im Punkte $U$ ist senkrecht zu $\chi'$, der Verbindungsstrecke von $U$ und $Q$, sowie zu $\varkappa_2$, so dass die Achsenmomente der Punktreihe $\chi_1$ sämmtlich senkrecht zu $\chi_2$ sind, die entsprechenden Momentenebenen durch $U$ sämmtlich durch $\chi_2$ gehen. Die Gleichung des Hodographen der Achsenmomente der Punktreihe $\chi_1$ lautet:

$$\gamma_U = |[(\lambda - u\varkappa_1)\varkappa_2],$$

und die Gleichung der Geraden $\chi_1$ mit $P$ als Ursprung:

1) $$\varrho = u\varkappa_1.$$

Die Addition der beiden letzten Gleichungen giebt, wenn wir $\varrho + \gamma_U = \psi$ setzen,

$$\psi = |(\lambda \varkappa_2) + u[\varkappa_1 - |(\varkappa_1 \varkappa_2)],$$

oder, mit $|(\varkappa_1 \varkappa_2) = \delta$:

2) $$\psi = \gamma_P + u(\varkappa_1 - \delta).$$

Diese Gerade, welche durch den Endpunkt von $\gamma_P$ geht und parallel zu der Geraden $\varrho = u(\varkappa_1 - \delta)$ ist (siehe Heft 2, Taf. III, Fig. 7), schneidet im Allgemeinen die Gerade $\chi_1$ nicht.

Bezüglich der Achsenmomente der Punktreihe $V$ auf $\chi_2$ ergiebt sich entsprechendes. Nehmen wir $(P - V) = \chi''$, so erhalten wir:

$$\gamma_v = |[v\varkappa_2 - \lambda)\varkappa_1] = |(\chi'' \varkappa_1).$$

Die Gleichung der Geraden $\chi_2$ ist mit $Q$ als Ursprung

$$\varrho = v\varkappa_2,$$

mithin ist der Ort der Endelemente der Achsenmomente der Punktreihe auf $\chi_2$:

$$\psi' = \gamma_Q + v(\varkappa_2 + \delta).$$

Für den etwaigen Schnitt der Geraden 1) und 2) haben wir die Bedingung:

$$u_1\varkappa_1 = \gamma_P + u(\varkappa_1 - \delta),$$

woraus folgt:

$$\gamma_P \varkappa_1 \delta = 0,$$

$(\varkappa_1 \delta)$ kann nicht verschwinden, demnach muss sein:

$$\gamma_P \varkappa_1 = 0, \text{ das ist } \varkappa_1 |(\lambda \varkappa_2) = 0, \text{ das heisst } (\varkappa_1 | \varkappa_2)\lambda = 0,$$

mithin muss sein:

$$\varkappa_1 | \varkappa_2 = 0.$$

Die Strecken $\gamma_P$ und $\varkappa_1$ müssen parallel sein, $\gamma_P$ muss mit $\chi_1$ zusammenfallen, $\bar{\varkappa}_1$ und $\bar{\varkappa}_2$, resp. $\chi_1$ und $\chi_2$ müssen sich rechtwinklig kreuzen.

Was von $\chi_1$ gilt, das gilt in entsprechender Weise von $\chi_2$.

„Kreuzen sich die Träger $\chi_1$ und $\chi_2$ von $\varkappa_1$ und $\bar{\varkappa}_2$ unter rechtem Winkel, dann liegen die Achsenmomente der Punktreihen auf $\chi_1$ und $\chi_2$ je in einer Ebene, es ist $P$ der Pol und $\chi_2$ die Charakteristik der Ebene durch P und $\chi_1$."

Weil $\gamma_U = |(\chi' \varkappa_2)$, $\gamma_V = |(\chi'' \varkappa_1)$, so sind $\gamma_U$ und $\gamma_V$ senkrecht zu $\chi'$, $\varkappa_2$ und $\chi''$, $\varkappa_1$, resp., mithin ist in unserem Specialfalle die Ebene der Achsenmomente der Punktreihe auf $\chi_1$, $(\chi_2)$ senkrecht zu $\chi_2$, $(\chi_1)$, und geht durch $\chi_1$, $(\chi_2)$. Die erste Ebene ist die Polarebene des Punktes $Q$ und $\chi_1$ ihre Charakteristik, die zweite die Polarebene des Punktes $P$ und $\chi_2$ ihre Charakteristik.

3. Conjugirte Geraden.

Das Achsenmoment des beliebigen Punktes $V$ auf $\chi_2$ ist:

$$\gamma_V = |(\chi'' \varkappa_1).$$

Die Ebene durch $\chi''$ und $\bar{\varkappa}_1$ ist normal zu $\gamma_V$, sie ist mithin die Polarebene des Punktes $V$, es laufen die Polarebenen der Punkte $V$ auf $\chi_2$ durch $\chi_1$.

Weil ferner:

$$\gamma_U = |(\chi' \varkappa_2)$$

ist, so gehen die Polarebenen der Punkte von $\chi_1$ durch $\chi_2$. — Deshalb heissen $\chi_1$ und $\chi_2$ conjugirte Geraden des Linientheilvereines.

„Zwei Geraden sind in Bezug auf ein Linientheilsystem conjugirt, wenn die Polarebenen der Punkte der einen Geraden durch die andere Gerade hindurchgehen."

Nun ergeben sich unmittelbar die folgenden Sätze:

„Die Pole der Ebenen eines Ebenenbüschels liegen in einer Geraden, diese Gerade und die Achse des Ebenenbüschels sind conjugirte Linien." — Die Polarebenen der Punkte einer Geraden bilden ein Ebenenbüschel, diese Gerade und die Achse des Ebenenbüschels sind conjugirte Geraden. Befindet sich eine Gerade $\chi_1$ in einer Ebene $\mathfrak{P}$, dann geht die ihr conjugirte Gerade $\chi_2$ durch den Pol dieser Ebene.

## § 12. Reduction eines Vereines von Linientheilen auf zwei sich kreuzende Linientheile, wenn die Reduction für die Centralachse bekannt und der Träger des einen Linientheiles gegeben ist.

1. Sei gegeben der Träger $\chi_1$ von $\bar{\varkappa}_1$, dann sind die zu ihr conjugirte Gerade $\chi_2$, $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ zu ermitteln.

Der kürzeste Abstand $(P - Q) = \lambda$ der beiden Geraden $\chi_1$ und $\chi_2$ muss die Centralachse rechtwinklig schneiden, was in $C$ geschehen möge.

Mit $(P - C) = \lambda_1$, $(C - Q) = \lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$ muss sein:

$$\gamma_P = \gamma_0 - |(\lambda_1 \varkappa) = -|(\lambda \varkappa_2), \quad \gamma_Q = \gamma_0 + |(\lambda_2 \varkappa) = |(\lambda \varkappa_1),$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{tg(\varkappa_1, \varkappa)}{tg(\varkappa, \varkappa_2)}.$$

Bekannt sind die Reductionselemente $\bar{\varkappa}$ und $\gamma_0$ für die Centralachse, *sowie* $\lambda_1$, der kürzeste Abstand von $\chi_1$ und $\mu_0$; zu ermitteln haben wir $\lambda_2$, $\lambda$, $\chi_2$, $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$.

Durch die Gleichungen für die Achsenmomente erhalten wir:

$$\varkappa\,|\,\gamma_0 = \lambda\,\varkappa_1\varkappa_2,\quad \varkappa_2\,|\,\gamma_0 = \lambda_1\varkappa\varkappa_2,\quad \varkappa_1\,|\,\gamma_0 = \lambda_2\varkappa_1\varkappa,$$

woraus folgt:

$$g_0 \cos(\varkappa, \varkappa_2) = l_1 k \sin(\varkappa, \varkappa_2),$$

$$g_0 \cos(\varkappa_1, \varkappa) = l_2 k \sin(\varkappa_1, \varkappa),$$

so dass

$$\frac{g_0}{k} = l_1 tg(\varkappa, \varkappa_2) = l_2 tg(\varkappa_1, \varkappa)$$

ist, woraus folgt:

$$tg(\varkappa, \varkappa_2) = \frac{l_2}{l_1} tg(\varkappa_1, \varkappa) = \frac{g_0}{k l_1},$$

$$l_2 = \frac{g_0}{k} cotg(\varkappa_1, \varkappa).$$

Damit sind die Neigung des Strahles $\chi_2$ gegen $\mu_0$ und die Länge des kürzesten Abstandes beider Strahlen bestimmt.

Im Falle senkrecht conjugirter Achsen haben wir $tg(\varkappa, \varkappa_2) = cotg(\varkappa_1, \varkappa)$, so dass

$$l_1 cotg(\varkappa_1, \varkappa) = l_2 tg(\varkappa_1, \varkappa) = \frac{g_0}{k},\quad l_1 l_2 = \left(\frac{g_0}{k}\right)^2.$$

Nachdem die Lage von $\chi_2$ bekannt geworden ist, haben wir die Grössen von $\bar{\varkappa}_1$ und $\bar{\varkappa}_2$ auf $\chi_1$ und $\chi_2$, welchen der Verein äquivalent sein soll, zu bestimmen. Es ist:

$$\lambda\varkappa_1 = |\,\gamma_0 + \lambda_2\varkappa,\quad \lambda\varkappa_2 = \lambda_1\varkappa - |\,\gamma_0.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch innere Quadratur ihrer Seiten:

$$(\lambda\varkappa_1)^2 = \gamma^2_0 + (\lambda_2\varkappa)^2 + 2\gamma_0\lambda_2\varkappa,$$

$$(\lambda\varkappa_2)^2 = \gamma^2_0 + (\lambda_1\varkappa)^2 - 2\gamma_0\lambda_1\varkappa,$$

aber es ist $(\varkappa\gamma_0) = 0$, daher:

$$(\lambda\varkappa_1)^2 = \gamma^2_0 + (\lambda_2\varkappa)^2,\quad (\lambda\varkappa_2)^2 = \gamma^2_0 + (\lambda_1\varkappa)^2,$$

$$l^2 k^2_1 = g^2_0 + l^2_2 k^2,\qquad l^2 k^2_2 = g^2_0 + l^2_1 k^2,$$

womit sich ergiebt:

$$k^2_1 = \frac{g^2_0 + k^2 l^2_2}{l^2},\quad k^2_2 = \frac{g^2_0 + k^2 l^2_1}{l^2},$$

$$\frac{k^2_1}{k^2_2} = \frac{g^2_0 + k^2 l^2_2}{g^2_0 + k^2 l^2_1}.$$

Aber es ist ausser $g_0$ und $k$ nur $l_1$ gegeben, weshalb $k_1$ und $k_2$ lediglich mittelst dieser Grössen darzustellen sind, und weil

$$l_2 = \frac{g_0}{k} cotg(\varkappa_1, \varkappa),\quad l = l_1 + l_2$$

ist, so ergiebt sich:

$$k^2_1 = \frac{k^2 g^2_0}{[k l_1 \sin(\varkappa_1, \varkappa) + g_0 \cos(\varkappa_1, \varkappa)]^2},\quad k^2_2 = \frac{k^2(g^2_0 + k^2 l^2_1)\sin^2(\varkappa_1, \varkappa)}{[k l_1 \sin(\varkappa_1, \varkappa) + g_0 \cos(\varkappa_1, \varkappa)]^2},$$

$$\frac{k^2_1}{k^2_2} = \frac{g^2_0}{g^2_0 + k^2 l^2_1} cosec^2(\varkappa_1, \varkappa).$$

Weil
$$k l_1 tg(\varkappa, \varkappa_2) = k l_2 tg(\varkappa_1, \varkappa) = g_0$$
ist, so erhalten wir noch:
$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{sin(\varkappa, \varkappa_2)}{sin(\varkappa_1, \varkappa)}.$$

2. Unsere Reduction lässt sich aber auch noch in einer etwas anderen Weise durchführen.

Mit $\chi_1$ und $\mu_0$ ist der kürzeste Abstand $(C-P) = \lambda_1$ dieser Geraden gegeben. Das Achsenmoment im Punkte $P$ ist:
$$\gamma_P = \gamma_0 + |(\lambda_1 \varkappa), \text{ und } \gamma_P | \lambda_1 = 0.$$

Die Einheitsstrecke der Schnittlinie der Ebene durch $\chi_1$ und $\gamma_P$ und der Polarebene des Punktes $P$ sei $\varepsilon'$, diejenige von $\chi_1$ sei $\varepsilon$, dann lässt sich setzen:
$$\varkappa = k_1 \varepsilon + k_2 \varepsilon' = \varkappa_1 + \varkappa_2,$$
und es ist damit:
$$\mathfrak{S}_P = \bar{\varkappa}_1 + (\bar{\varkappa}_2 + |\gamma_P), \quad \varkappa_2 | \gamma_P = 0.$$

Durch diese Zerlegung wird der Verein äquivalent $\bar{\varkappa}_1$ und $\bar{\varkappa}_2$ längs $\chi_1$ und eines Strahles $\chi_2$. Bezeichnet $\lambda = (Q-P)$ den Normalabstand dieses Strahles von $P$, so ist:
$$\lambda = \frac{|(\varkappa_2 \gamma_P)}{k_2^2},$$
mithin die Gleichung von $\chi_2$, wenn $P$ Coordinatenpol ist,
$$\varrho = \frac{|(\varkappa_2 \gamma_P)}{k_2^2} + u \varkappa_2.$$

Mit dem obigen Werthe von $\gamma_P$ ergiebt sich:
$$\lambda = \frac{1}{k_2}\left\{\frac{g_0}{l_1} sin(\varkappa_2, \varkappa) + k \cos(\varkappa_2, \varkappa)\right\} \lambda_1.$$

Sind $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ normal zu einander, in welchem Falle $\gamma_P$ und $\chi_1$ coincidiren, dann ist:
$$l_1 = \frac{g_0}{k} cotg(\varkappa_2, \varkappa), \quad k_2 = k \cos(\varkappa, \varkappa_2),$$
womit sich ergiebt:
$$\lambda = sec^2(\varkappa_2, \varkappa) \lambda_1, \quad l = 2 \frac{g_0}{k} cosec\, 2(\varkappa_2, \varkappa).$$

3. Um unter den gegebenen Verhältnissen die Reduction eines Vereines auf zwei sich kreuzende Linientheile vorzunehmen, ist es nicht unbedingt nöthig, von dem kürzesten Abstande der Strahlen $\mu_0$ und $\chi_1$ auszugehen.

Ist $P' \gtrless P$ irgend ein Punkt von $\chi_1$, $(C'-P') = \lambda'$ der Abstand dieses Punktes von der Centralachse $\mu_0$, so ist das Achsenmoment in diesem Punkte
$$\gamma_{P'} = \gamma_0 + |(\lambda' \varkappa)$$
und
$$\mathfrak{S}_{P'} = \bar{\varkappa} + |\gamma_{P'} = \bar{\varkappa} + |\gamma_0 + (\lambda' \varkappa).$$

Nun schneide die Polarebene des Punktes $P'$ die Ebene $[\gamma_{P'} \mu_{P'}]$ in *der Geraden* $\varepsilon'$, so dass wir $\bar{\varkappa}$ in der Richtung von $\chi_1$ und $\varepsilon'$ zerlegen, *setzen dürfen:*

$$\varkappa = k_1 \varepsilon + k_2 \varepsilon' = \varkappa_1 + \varkappa_2,$$

womit wir erhalten:

$$\mathfrak{S}_{P'} = \bar{\varkappa}_1 + (\bar{\varkappa}_2 + |\gamma_{P'}), \quad \varkappa_2 | \gamma_{P'} = 0.$$

Daher ist der Verein äquivalent $\bar{\varkappa}_1$ und $\bar{\varkappa}_2$ längs $\chi_1$ und $\chi_2$, der Normalabstand des Strahles $\chi_2$ von $P'$ ist:

$$\lambda'' = \frac{|(\varkappa_2 \gamma_{P'})}{k^2_2},$$

und die Gleichung der Geraden $\chi_2$ lautet mit $P'$ als Ursprung:

$$\rho = \frac{(\varkappa_2 \gamma_{P'})}{k^2_2} + v k_2.$$

Mit dem Reductionspunkte auf $\chi_1$ wechselt das Achsenmoment, daher ändert $\bar{\varkappa}_1$ dann seine Grösse, $\bar{\varkappa}_2$ seine Richtung und Grösse, es ändert sich die Stellung der Polarebene, mithin wechselt, wenn $P'$ die $\chi_1$ beschreibt, die $\chi_2$ ihre Richtung und Lage im Raume, woraus folgt:

„Zu einer Geraden giebt es unendlich viele conjugirte Geraden, ein Linientheilverein ist auf unendlich viele Arten zwei sich kreuzenden Linientheilen äquivalent, wenn eine der conjugirten Geraden gegeben ist, vorausgesetzt, dass die Reductionsresultante des Systemes nicht verschwindet."

## § 13. Das Nullsystem eines Vereines von Linientheilen.

Jede Ebene des Raumes besitzt in Beziehung auf ein Linientheilsystem einen Pol und eine Charakteristik. Jeder Punkt des Raumes ist der Pol einer durch ihn hindurchgehenden Ebene, welche senkrecht zu dem Achsenmomente dieses Punktes ist.

Die Gesammtheit aller Punkte des Raumes als Pole und der durch sie hindurchgehenden Ebenen, welche senkrecht zu den Achsenmomenten dieser Punkte sind, der Polarebenen dieser Punkte, nennen wir das Nullsystem oder das Polarsystem des Linientheilvereines.

Die Achsenmomente der Punkte eines durch den Pol einer Ebene gehenden, in ihr liegenden Strahles sind senkrecht zu dem Strahle. Ist $\varepsilon$ seine Einheitsstrecke und sehen wir ihn als Achse an, dann ist das Moment des Vereines bezüglich dieser Achse, wenn $\gamma_M$ das Achsenmoment ihres Punktes $M$ ist, $\varepsilon | \gamma_M = 0$, so dass das Moment für alle Achsen durch den Pol einer Ebene in ihr verschwindet. In jeder Ebene des Nullsystemes liegt daher ein Strahlenbüschel von Achsen, für welche die Momente des Vereines verschwinden. Der Pol der Ebene ist der Mittelpunkt des Büschels. Jeder Punkt des Raumes ist der Träger eines Strahlenbüschels von Achsen mit verschwindenden Momenten, dasselbe liegt in der Polarebene dieses Punktes.

Schneiden wir den Verein durch ein Parallelebenenbüschel, so liegen die Pole der Ebenen dieses Büschels in einer zur Centralachse parallelen Geraden, ihre Charakteristiken in einer zu ihr parallelen Ebene. — Sind

die Elemente eines solchen Büschels senkrecht zur Centralachse, dann ist der Ort ihrer Pole die Centralachse, der Ort ihrer Charakteristiken die unendlich ferne Ebene des Raumes.

Schneiden wir den Verein durch ein System von Ebenen, welche parallel zur Centralachse sind, dann liegen die Pole der Ebenen unendlich fern und ihre Charakteristiken sind die Projectionen der Centralachse auf sie.

Die Pole der Ebenen eines Ebenenbüschels, dessen Achse die Centralachse ist, liegen unendlich fern und ihre Charakteristiken fallen mit der Centralachse zusammen.

Die Orte der Pole aller Systeme von Parallelebenen, welch' erstere parallel zur Centralachse sind, deren conjugirte Geraden unendlich fern liegen, heissen Durchmesser des Linientheilvereines. Die Centralachse ist der einzige Durchmesser, welcher auf den zu ihm conjugirten Ebenen senkrecht steht.

## § 14. Die Doppelstrahlen eines Linientheilvereines.

1. Die Träger zweier Linientheile, welche einem Vereine von Linientheilen äquivalent sind, sind stets conjugirte Geraden. — Nur im Allgemeinen sind zwei conjugirte Geraden die Träger von zwei dem Vereine äquivalenten Linientheilen, denn es sind auch zusammenfallende conjugirte Geraden, sogenannte Doppellinien des Nullsystemes, vorhanden.

Sind $\chi_1$ und $\chi_2$ zwei conjugirte Geraden, so sind die Polarebenen der Punktreihe $\chi_2$, $(\chi_1)$ senkrecht zu den Achsenmomenten der Punkte von $\chi_2$, $(\chi_1)$ und gehen durch $\chi_1$, $(\chi_2)$. Mit $\chi_1 = \chi_2$ sind die Achsenmomente der Punktreihe $\chi_2$ auch senkreckt zu $\chi_1$. Ist das Achsenmoment eines Punktes einer Geraden senkrecht zu ihr, so sind die Achsenmomente aller ihrer Punkte zu ihr senkrecht.

„Eine Gerade ist Doppellinie, wenn das Achsenmoment eines ihrer Punkte senkrecht zu ihr ist." — „Die Strahlen des Strahlenbüschels in einer Ebene, dessen Mittelpunkt der Pol dieser Ebene ist, sind Doppellinien." — „Jeder Punkt des Raumes ist der Mittelpunkt eines Strahlenbüschels von Doppellinien, derselbe befindet sich in der Polarebene dieses Punktes."

2. Sind $\chi_1$ und $\chi_2$ zwei conjugirte Geraden und ist $\psi$ eine dritte Gerade, welche $\chi_1$ und $\chi_2$ in $A_1$ und $A_2$ resp. schneidet, dann ist $A_1$ der Pol der Ebene $[\psi\chi_2]$, sein Achsenmoment ist normal zu $\psi$, $A_2$ der Pol der Ebene $[\psi\chi_1]$, sein Achsenmoment normal $\psi$, mithin ist $\psi$ eine Doppellinie.

„Jede Gerade, welche zwei conjugirte Geraden des Nullsystemes schneidet, ist eine Doppellinie."

3. Das Achsenmoment im Schnittpunkte einer zur Centralachse normalen Geraden ist senkrecht zu ihr.

„Alle die Centralachse senkrecht schneidende Strahlen sind sich selbst *conjugirt.*"

## § 15. Der Complex erster Ordnung.

1. Die Doppellinien des Nullsystemes eines Linientheilvereines machen einen Complex erster Ordnung aus; alle durch einen Punkt gehende Doppelstrahlen erfüllen eine Kegelfläche erster Ordnung, eine Ebene; alle in eine Ebene fallenden Doppelstrahlen umhüllen eine Linie erster Classe, nämlich einen Punkt.

2. Sobald $\mu_0$ und die Reduction $\mathfrak{S} = \bar{\varkappa} + |\gamma_0$ resp. $g_0 : k = p$ gegeben sind, ist das Nullsystem des Linientheilvereines, sind seine conjugirten Geraden und sein Complex bestimmt.

3. Sei $\psi$ irgend eine Doppellinie, $(P - O) = \lambda$ ihr kürzester Abstand von der Centralachse $\mu_0$ (siehe Heft 2, Taf. III, Fig. 8). Das Achsenmoment in $P$ ist:

$$\gamma_P = \gamma_0 - |(\lambda \varkappa)$$

und es ist, weil $\gamma_P$ senkrecht zu $\psi$ ist, $\gamma_P | \psi = 0$. Ferner haben wir:

$$\lambda = -\frac{|(\varkappa \gamma_P)}{k^2}, \quad l = \frac{g_0}{k} \operatorname{cotg} \mathfrak{c},$$

wenn $\sphericalangle (\varkappa, \psi) = \mathfrak{c}$ gesetzt wird, woraus folgt:

$$l \operatorname{tg} \mathfrak{c} = \frac{g_0}{k} = p.$$

„Das Product aus der Länge des Abstandes eines Complexstrahles von der Centralachse und der Tangente seines Neigungswinkels gegen die Centralachse ist gleich einer constanten Grösse, gleich dem Parameter des Complexes."

Sei $O$ irgend ein Punkt von $\mu_0$, $U$ irgend ein solcher von $\psi$,

$$P = O + \varrho_0, \quad U = O + \varrho.$$

Weil der Complexstrahl senkrecht zu $\lambda$ und $\gamma_P$ ist, so ist derselbe parallel zu $|(\lambda \gamma_P)$, mithin seine Gleichung:

$$\varrho = \varrho_0 + u | (\lambda \gamma_P),$$

und wenn wir den Werth von $\gamma_P$ substituiren, so erhalten wir:

$$\varrho = \varrho_0 + u | \{\lambda [\gamma_0 - |(\lambda \varkappa)]\},$$

$$\varrho = \varrho_0 + u \{ |(\lambda \gamma_0) + \lambda^2 \varkappa \},$$

oder auch:

$$(\varrho - \varrho_0) \{ |(\lambda \gamma_0) + \lambda^2 \varkappa \} = 0$$

als Gleichung des Complexstrahles.

Aber es ist

$$\lambda = \varrho_0 - (\varepsilon | \varrho_0) \varepsilon,$$

wenn $\varepsilon$ die Einheitsstrecke von $\mu_0$ bedeutet, daher auch:

$$\varrho = \varrho_0 + u \{ | [\{ \varrho_0 - (\varepsilon | \varrho_0) \varepsilon \} \gamma_0] + (\varrho_0 \varepsilon)^2 \varkappa \},$$

$$\varrho = \varrho_0 + u \{ | (\varrho_0 \gamma_0) + (\varrho_0 \varepsilon)^2 \varkappa \},$$

oder auch:

$$(\varrho - \varrho_0)\{|(\varrho_0 \gamma_0) + (\varrho_0 \varepsilon)^2 \varkappa\} = 0,$$

die Gleichung des Complexstrahles. Lassen wir $\varrho_0$ als Parameter variiren, so giebt diese Gleichung alle Complexstrahlen des Systemes.

Wählen wir den Punkt $O$ als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, $\mu_0$ als Achse der $z$, $\varepsilon = \varepsilon_3$, setzen $\varrho_l = x_l \varepsilon_1 + y_l \varepsilon_2 + z_l \varepsilon_3$, bedenken, dass $\gamma_0 = g_0 \varepsilon_3$, $\varkappa = k \varepsilon_3$ ist, und substituiren wir diese Werthe in die letzte Gleichung, so bekommen wir:

$$[(x - x_0)\varepsilon_1 + (y - y_0)\varepsilon_2 + (z - z_0)\varepsilon_3]\{|[(x_0 \varepsilon_1 + y_0 \varepsilon_2 + z_0 \varepsilon_3) g_0 \varepsilon_3] \\ + [(x_0 \varepsilon_1 + y_0 \varepsilon_2 + z_0 \varepsilon_3)\varepsilon_3]^2 k \varepsilon_3\} = 0.$$

Lösen wir die Klammer und reduciren, dann spaltet sich diese Gleichung in die drei Gleichungen:

$$\frac{x - x_0}{y_0} = \frac{y_0 - y}{x_0} = p\frac{z - z_0}{l^2},$$

womit die Gleichungen der Complexstrahlen in rechtwinkligen Coordinaten bekannt sind.

Die Gleichung einer Schraubenlinie auf einem Cylinder vom Radius $l$ um die Centralachse ist:

$$\varrho = l\{\cos t\, \varepsilon_1 + \sin t\, \varepsilon_2 + m\, t\, \varepsilon_3\}.$$

Die Tangente dieser Curve ist parallel zu der Strecke

$$\frac{d\varrho}{dt} = l(-\sin t\, \varepsilon_1 + \cos t\, \varepsilon_2 + m\, \varepsilon_3),$$

für den Neigungswinkel $\mathfrak{v}$ der Tangente, resp. der Curve gegen die Achse erhalten wir:

$$tg\, \mathfrak{v} = \frac{\sqrt{\left(\varepsilon \frac{d\varrho}{dt}\right)^2}}{\varepsilon \left| \frac{d\varrho}{dt} \right.} = \frac{m}{l}.$$

Wählen wir nun die Steigung der Schraubenlinie so, dass

$$tg\, \mathfrak{v} = tg\, \mathfrak{c}, \quad \frac{m}{l} = \frac{g_0}{kl}, \quad m = g_0 : k$$

ist, dann sind die Tangenten der Curve Complexstrahlen.

„Auf jedem Kreiscylinder um die Centralachse als dessen Achse liegen unendlich viele Schraubenlinien gleicher Ganghöhe, deren Tangenten Complexstrahlen des Linientheilvereines sind.“

Weil jede Schmiegungsebene einer solchen Schraubenlinie durch zwei aufeinander folgende Complexstrahlen geht, so ist jeder Punkt der Schraubenlinie der Pol seiner Schmiegungsebene daselbst.

Mit $l = 0$ ist $tg\, \mathfrak{c} = \infty$, $\sphericalangle\, \mathfrak{c} = \frac{1}{2}\pi$, der Cylinder degenerirt in die Centralachse, die Complexstrahlen sind senkrecht zu ihr. Wächst $l$, dann nimmt der Werth $tg\, \mathfrak{c}$ ab, die Neigung der Complexstrahlen gegen die Centralachse verkleinert sich und mit $l = \infty$ werden die Complexstrahlen *parallel zu der* Centralachse.

## § 16. Die Centralachsenfläche.

1. Sind $\chi_1$ und $\chi_2$ irgend zwei conjugirte Geraden eines Vereines von Linientheilen, dann schneidet seine Centralachse den kürzesten Abstand $(Q - P) = \lambda$ dieser Geraden rechtwinklig und es ist:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{tg(\varkappa_1, \varkappa)}{tg(\varkappa, \varkappa_2)}.$$

Lassen wir die Grössen der Linientheile $\bar{\varkappa}_1$ und $\bar{\varkappa}_2$ auf $\chi_1$ und $\chi_2$, denen der Verein äquivalent ist, variiren, dann variirt die Centralachse nach Lage und Neigung gegen $\chi_1$ und $\chi_2$. Dadurch erhalten wir die Centralachsen sämmtlicher Vereine von Linientheilen, welche je zwei Linientheilen auf $\chi_1$ und $\chi_2$ äquivalent sind. Diese Centralachsen bilden in ihrer Gesammtheit eine geradlinige Fläche, deren Erzeugenden in zu dem kürzesten Abstande der conjugirten Geraden senkrechten Ebenen liegen und denselben schneiden, es ist die Gerade des kürzesten Abstandes die Leitlinie der Fläche.

1. Die Fahrstrahlgleichung der Centralachse ist mit $P$ als Beziehungspunkt:

$$\varrho = \lambda_1 + u\varkappa,$$

oder, wenn wir setzen:

$$\lambda_1 = l_1 \varepsilon_3, \quad \varkappa = k_1 \varepsilon_1 + k_2 \varepsilon_2,$$

wobei $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ und $\varepsilon_3$ die Einheitsstrecken von $\bar{\varkappa}_1$, $\bar{\varkappa}_2$ resp. $\chi_1$, $\chi_2$ und $\lambda$ bedeuten:

$$\varrho = l_1 \varepsilon_3 + u(k_1 \varepsilon_1 + k_2 \varepsilon_2).$$

Aber es ist

$$l_1 = \frac{k_2}{k^2}(k_1 \cos \mathfrak{c} + k_2) l,$$

mithin auch:

$$\varrho = \frac{k_2(k_1 \cos \mathfrak{c} + k_2)}{k^2_1 + 2k_1 k_2 \cos \mathfrak{c} + k^2_2} l \varepsilon_3 + u(k_1 \varepsilon_1 + k_2 \varepsilon_2).$$

Weil noch

$$\varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3$$

ist, so geht die vorletzte Gleichung mit $x = uk_1$, $y = uk_2$ über in

$$\varrho = \frac{xy \cos \mathfrak{c} + y^2}{x^2 + 2xy \cos \mathfrak{c} + y^2} l \varepsilon_3 + x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2,$$

womit eine Gleichung der Achsenfläche vor uns steht, und es ist ihre Gleichung in schiefwinkligen Coordinaten:

$$(x^2 + 2xy \cos \mathfrak{c} + y^2) z = (xy \cos \mathfrak{c} + y^2) l.$$

Mit $M = \frac{1}{2}(P + Q)$ als Coordinatenpol erhalten wir, wenn wir nehmen $U = P + \varrho = M + \varrho_1$, wodurch $\varrho = (M - P) + \varrho_1 = \frac{1}{2}\lambda + \varrho_1$ ist:

$$\varrho_1 = \frac{1}{2} \frac{k^2_2 - k^2_1}{k^2_1 + 2k_1 k_2 \cos \mathfrak{c} + k^2_2} l \varepsilon_3 + u(k_1 \varepsilon_1 + k_2 \varepsilon_2),$$

$$\varrho_1 = \frac{1}{2} \frac{y^2 - x^2}{x^2 + 2xy \cos \mathfrak{c} + y^2} l \varepsilon_3 + x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2,$$

$$2(x^2 + 2xy \cos \mathfrak{c} + y^2) z = (y^2 - x^2) l.$$

Die Achsenfläche ist vom dritten Grade.

Im letzteren Falle ist mit $z = \pm a$:

$$\pm 2a = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + 2xy\cos\mathfrak{c} + y^2}\, l,$$

wodurch wir erkennen, dass es vier Vereine von Linientheilen giebt, deren Centralachsen vom Punkte $M$ gleiche Abstände besitzen.

2. Die Fahrstrahlgleichung der Centralachse lautet:

$$\varrho = l_1 \varepsilon_3 + u(k_1 \varepsilon_1 + k_2 \varepsilon_2).$$

Nun ist auch:

$$l_1 = \frac{\sin(\varkappa_1, \varkappa)\cos(\varkappa, \varkappa_2)}{\sin\mathfrak{c}}\, l, \quad k_1 = k\frac{\sin(\varkappa, \varkappa_2)}{\sin\mathfrak{c}}, \quad k_2 = k\frac{\sin(\varkappa_1, \varkappa)}{\sin\mathfrak{c}},$$

mit welchen Werthen wir erhalten:

$$\varrho = \frac{\sin(\varkappa_1, \varkappa)\cos(\varkappa, \varkappa_2)}{\sin\mathfrak{c}}\, l\varepsilon_3 + u[\sin(\varkappa, \varkappa_2)\,\varepsilon_1 + \sin(\varkappa_1, \varkappa)\,\varepsilon_2],$$

oder, wenn wir $\sphericalangle(\varkappa_1, \varkappa) = \mathfrak{w}$ setzen:

$$\varrho = \frac{\sin\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{c} - \mathfrak{w})}{\sin\mathfrak{c}}\, l\varepsilon_3 + u[\sin(\mathfrak{c} - \mathfrak{w})\,\varepsilon_1 + \sin\mathfrak{w}\,\varepsilon_2],$$

und diese Gleichung ist bei variablem $\mathfrak{w}$ und $u$ eine Fahrstrahlgleichung der Achsenfläche.

Setzen wir jetzt:

$$u\sin(\mathfrak{c} - \mathfrak{w}) = x, \quad u\sin\mathfrak{w} = y,$$

wodurch

$$u^2 = \frac{x^2 + 2xy\cos\mathfrak{c} + y^2}{\sin^2\mathfrak{c}}$$

wird, dann geht die Gleichung der Achsenfläche über in

$$\varrho = \frac{xy\cos\mathfrak{c} + y^2}{x^2 + 2xy\cos\mathfrak{c} + y^2}\, l\varepsilon_3 + x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2.$$

3. Eine Gleichung der Achsenfläche in rechtwinkligen Coordinaten lässt sich auf folgendem Wege construiren.

Mit $P$ als Ursprung legen wir die Achsen des Richtsystemes so, dass die Achse $\varepsilon_1$ den Winkel $\mathfrak{c} = 2\mathfrak{b}$ halbirt, $\varepsilon_2$ in der Ebene dieses Winkels zu ihr senkrecht ist, $\varepsilon_3$ wieder mit dem kürzesten Abstande der beiden conjugirten Geraden zusammenfällt, und setzen $\sphericalangle(\varepsilon_1, \varkappa) = \mathfrak{v}$, dann ist zunächst die Gleichung der geradlinigen Fläche:

$$\varrho = l_1\varepsilon_3 + u\,\varepsilon_3^{\frac{2\mathfrak{v}}{\pi}}\varepsilon_1 = l_1\varepsilon_3 + u(\cos\mathfrak{v}\,\varepsilon_1 + \sin\mathfrak{v}\,\varepsilon_2).$$

Aber es ist:

$$l_1 = \frac{\sin(\mathfrak{b} - \mathfrak{v})\cos(\mathfrak{b} + \mathfrak{v})}{\sin 2\mathfrak{b}}\, l = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\mathfrak{v}}{\sin 2\mathfrak{b}}\right) l,$$

wodurch wir erhalten:

$$\varrho = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\mathfrak{v}}{\sin 2\mathfrak{b}}\right) l\varepsilon_3 + u(\cos\mathfrak{v}\,\varepsilon_1 + \sin\mathfrak{v}\,\varepsilon_2)$$

*als Gleichung* der Fläche in den Variablen $u$ und $\mathfrak{v}$.

Nehmen wir
$$u \cos \mathfrak{v} = x, \quad u \sin \mathfrak{v} = y,$$
wodurch
$$\sin 2\mathfrak{v} = 2xy : (x^2 + y^2)$$
wird, dann ist:
$$\varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2xy}{(x^2+y^2)\sin 2\mathfrak{b}}\right) l \varepsilon_3,$$
mithin die Gleichung der Fläche in rechtwinkligen Coordinaten:
$$2z(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - 2xy \operatorname{cosec} 2\mathfrak{b})l.$$

Verlegen wir den Coordinatenursprung nach $M = \frac{1}{2}(P + Q)$, so ergiebt sich:
$$\varrho_1 = u(\cos \mathfrak{v}\, \varepsilon_1 + \sin \mathfrak{v}\, \varepsilon_2) - \frac{1}{2}\frac{\sin 2\mathfrak{v}}{\sin 2\mathfrak{b}} l \varepsilon_3,$$
$$\varrho_1 = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 - \frac{xy}{(x^2+y^2)\sin 2\mathfrak{b}} l \varepsilon_3,$$
und die Coordinatengleichung der Fläche lautet:
$$(x^2 + y^2)z + \frac{xy}{\sin 2\mathfrak{b}} l = 0.$$

4. Die Gleichung des Kreiscylinders vom Radius Eins, dessen Achse mit $\varepsilon_3$ zusammenfällt, ist mit $P$ als Ursprung und bei rechtwinkligen Coordinaten:
$$\tau = \cos \mathfrak{v}_1\, \varepsilon_1 + \sin \mathfrak{v}_1\, \varepsilon_2 + w\varepsilon_3,$$
diejenige der Achsenfläche ist:
$$\varrho = u(\cos \mathfrak{v}\, \varepsilon_1 + \sin \mathfrak{v}\, \varepsilon_2) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\mathfrak{v}}{\sin 2\mathfrak{b}}\right) l \varepsilon_3.$$

Für die Schnittlinie beider Flächen ist $\tau = \varrho$, was bedingt $u = 1$, so dass die Gleichung der Schnittcurve:
$$\sigma = \cos \mathfrak{v}\, \varepsilon_1 + \sin \mathfrak{v}\, \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\mathfrak{v}}{\sin 2\mathfrak{b}}\right) l \varepsilon_3,$$
oder, mit $\cos \mathfrak{v} = x$:
$$\sigma = x\varepsilon_1 + \sqrt{1 - x^2}\,\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sin 2\mathfrak{b}}\right) l \varepsilon_3.$$

Die Curve verläuft, da ihre Fahrstrahlen nur endliche Längen besitzen, vollständig im Endlichen, sie ist keine gemeine Schraubenlinie, auch liegt sie nicht in einer Ebene, denn das äussere Product aus den drei ersten aufeinander folgenden Derivationsstrecken des Fahrstrahles nach der Variablen verschwindet nicht, was aussagt, dass zwei aufeinander folgende Schmiegungsebenen der Curve nicht zusammenfallen.

5. Die Achsenfläche werde von einem Kreiscylinder geschnitten, welcher durch ihre Leitlinie hindurchgeht, sein Radius sei gleich Eins, $M = \frac{1}{2}(P + Q)$ sei Ursprung rechtwinkliger Coordinaten. — Die Fahrstrahlgleichungen der beiden Flächen sind:
$$\varrho = u(\cos \mathfrak{v}\, \varepsilon_1 + \sin \mathfrak{v}\, \varepsilon_2) - \frac{1}{2}\frac{\sin 2\mathfrak{v}}{\sin 2\mathfrak{b}} l \varepsilon_3,$$
$$\tau = (a_1 + \cos \mathfrak{v}_1)\varepsilon_1 + (a_2 + \sin \mathfrak{v}_1)\varepsilon_2 + w\varepsilon_3, \quad \sqrt{\mathfrak{a}^2_1 + \mathfrak{a}^2_2} = 1.$$

Für die Schnittlinie beider Flächen ist $\tau = \varrho$, was giebt:

$$a_1 + \cos\mathfrak{v}_1 = u\cos\mathfrak{v}, \quad a_2 + \sin\mathfrak{v}_1 = u\sin\mathfrak{v},$$

woraus folgt:

$$w = -l'\sin 2\mathfrak{v}, \quad l' = \frac{1}{2}\frac{l}{\sin 2\mathfrak{b}},$$

$$u = 2(a_1\cos\mathfrak{v} + a_2\sin\mathfrak{v}),$$

so dass die Fahrstrahlgleichung der Schnittcurve:

$$\sigma = (2a_1\cos^2\mathfrak{v} + a_2\sin 2\mathfrak{v})\,\varepsilon_1 + (a_1\sin 2\mathfrak{v} + 2a_2\sin^2\mathfrak{v})\,\varepsilon_2 - l'\sin 2\mathfrak{v}\,\varepsilon_3$$

lautet.

Auch diese Curve besitzt keine unendlich fernen Punkte, denn ihre sämmtlichen Fahrstrahlen haben endliche Längen, sie ist eine ebene Curve, eine Ellipse, denn das äussere Product aus der ersten, zweiten und dritten Ableitung des Fahrstrahles nach der Variablen verschwindet.

„Jeder durch die Directrix der Achsenfläche gehende Kreiscylinder schneidet diese Fläche in einer Ellipse."

## § 17. Zwei Vereine von Linientheilen.

1. Sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ zwei Vereine von Linientheilen und reduciren wir dieselben für den Punkt $O$, dann ist:

$$\mathfrak{S} = O\varkappa + |\gamma, \quad \mathfrak{S}' = O\varkappa' + |\gamma'.$$

Damit diese Vereine einander äquivalent seien, müssen wir haben:

$$\mathfrak{S} - \mathfrak{S}' = 0, \text{ das ist } O(\varkappa - \varkappa') + |(\gamma - \gamma') = 0,$$

mithin:

$$\varkappa = \varkappa' \text{ und } \gamma = \gamma'.$$

„Zwei Vereine von Linientheilen sind einander äquivalent, wenn für den nämlichen Reductionspunkt die resultirenden Linientheile für sich und die resultirenden Momente resp. Achsenmomente einander gleich sind."

2. Seien $\bar{\varkappa}_l$, $l = 1, 2, \ldots n$, $\bar{\varkappa}'_{l'}$, $l' = 1, 2, \ldots n'$ die Elemente zweier Vereine von Linientheilen.

Reduciren wir diese Vereine für denselben beliebigen Punkt $O$ des Raumes, dann ist:

$$\mathfrak{S} = O\Sigma\varkappa_l + |\gamma = O\varkappa + |\gamma = O\varkappa + O\nu_1 + \bar{\nu}_2, \quad \nu_2 = -\nu_1,$$

$$\mathfrak{S}' = O\Sigma\varkappa'_l + |\gamma' = O\varkappa' + |\gamma' = O\varkappa' + O\nu'_1 + \bar{\nu}_2, \quad \nu'_2 = -\nu'_1.$$

Führen wir die Reduction so durch, dass $(\nu_1 + \bar{\nu}_2)$ und $(\bar{\nu}'_1 + \bar{\nu}'_2)$ Paare gleicher Breite sind, alsdann liegen, wie $\bar{\nu}_1$ und $\bar{\nu}'_1$, so auch $\bar{\nu}_2$ und $\bar{\nu}'_2$ in einer Ebene, deren Träger sich in einem Punkte $S$ schneiden (siehe Heft II, Taf. III, Fig. 9), und es ist:

$$\mathfrak{S} = O\varkappa + O\nu_1 + S\nu_2,$$

$$\mathfrak{S}' = O\varkappa' + O\nu'_1 + S\nu'_2.$$

Multipliciren wir die Gleichung:

$$\Sigma \bar{\varkappa}_l = \bar{\varkappa} + \bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2$$

mit $\bar{\varkappa}'_{l'}$, so wird:

$$\bar{\varkappa}'_{l'} \Sigma \bar{\varkappa}_l = \bar{\varkappa}'_{l'} \bar{\varkappa} + \bar{\varkappa}'_{l'} \bar{\nu}_1 + \bar{\varkappa}'_{l'} \bar{\nu}_2 = \bar{\varkappa}'_{l'} (\bar{\varkappa} + \bar{\nu}_1) + \bar{\varkappa}'_{l'} \bar{\nu}_2 = \bar{\varkappa}'_{l'} \bar{\psi} + \bar{\varkappa}'_{l'} \bar{\nu}_2,$$

$$\psi = \varkappa + \nu_1.$$

„Die Summe der Spathe mit dem Linientheile $\bar{\varkappa}'_{l'}$ als gemeinsamer Kante und den Linientheilen des ersten Systemes als Gegenkanten ist gleich der Summe der Spathe mit derselben gemeinsamen Kante und den beiden sich kreuzenden Linientheilen, welchen das erste System äquivalent ist, als Gegenkanten.“

Bilden wir nun die Spathsummen von $\mathfrak{S}$ bezüglich aller Linientheile von $\mathfrak{S}'$, so ist:

$$\Sigma \bar{\varkappa}'_{l'} \Sigma \bar{\varkappa}_l = \Sigma \bar{\varkappa}'_{l'} (\bar{\varkappa} + \bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2) = (\bar{\varkappa}' + \bar{\nu}'_1 + \bar{\nu}'_2)(\bar{\varkappa}_1 + \bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2).$$

Die Durchführung der Multiplication auf der rechten Seite dieser Gleichung giebt:

$$\Sigma\Sigma \bar{\varkappa}'_{l'} \bar{\varkappa}_l = \bar{\varkappa}' \bar{\varkappa} + \bar{\varkappa}' \bar{\nu}_1 + \bar{\varkappa}' \bar{\nu}_2 + \bar{\nu}'_1 \bar{\varkappa} + \bar{\nu}'_1 \bar{\nu}_1 + \bar{\nu}'_1 \bar{\nu}_2 + \bar{\nu}'_2 \bar{\varkappa} + \bar{\nu}'_2 \bar{\nu}_1 + \bar{\nu}'_2 \bar{\nu}_2.$$

Aber wir haben:

$$\bar{\varkappa}' \bar{\varkappa} = \bar{\varkappa}' \bar{\nu}_1 = \bar{\nu}'_1 \bar{\varkappa} = \bar{\nu}'_1 \bar{\nu}_1 = \bar{\nu}'_2 \bar{\nu}_2 = 0,$$

denn die Linientheile dieser Producte liegen auf sich schneidenden Trägern.

Ferner ist:

$$\bar{\nu}'_2 \bar{\nu}_1 + \bar{\nu}'_1 \bar{\nu}_2 = 0,$$

denn diese beiden Körpertheile sind entgegengesetzt gleich, es ist:

$$(\bar{\nu}'_2 \bar{\nu}_1) = (SN'_2)(ON_1) = SN'_2 ON_1 = S(N'_2 - S)(O - S)(N_1 - O) \equiv \nu'_2 \quad \nu_1$$

$$(\bar{\nu}'_1 \bar{\nu}_2) = (SN'_1)(ON_2) = SN'_1 ON_2 = S(N'_1 - S)(O - S)(N_2 - O) \equiv \nu'_1 \delta \nu_2$$

$$\equiv \nu_1 \delta \nu'_2 \equiv - \nu'_2 \delta \nu_1 \equiv - (\bar{\nu}'_2 \bar{\nu}_1).$$

Demnach erhalten wir:

$$\Sigma\Sigma \bar{\varkappa}'_{l'} \bar{\varkappa}_l = \bar{\varkappa} \bar{\nu}'_2 + \bar{\varkappa}' \bar{\ }_2.$$

Nun ist:

$$\bar{\varkappa} \bar{\nu}'_2 = O(K - O)(S - O)(N'_2 - S) \equiv \varkappa \delta \nu'_2,$$

$$\bar{\varkappa}' \bar{\nu}_2 = O(K' - O)(S - O)(N_2 - S) \equiv \varkappa' \delta \nu_2,$$

daher:

$$\Sigma\Sigma \bar{\varkappa}'_{l'} \bar{\varkappa}_l \equiv \varkappa \delta \nu'_2 + \varkappa' \delta \nu_2,$$

aber es ist:

$$\delta \nu'_2 = | \gamma', \quad \delta \nu_2 = | \gamma,$$

folglich auch:

$$\Sigma\Sigma \bar{\varkappa}'_{l'} \varkappa_l \equiv \varkappa | \gamma' + \varkappa' | \gamma \equiv k g' \cos(\varkappa, \gamma') + k' g \cos(\varkappa', \gamma).$$

Wir nennen $\Sigma\Sigma \bar{\varkappa}'_{l'} \bar{\varkappa}_l$ die doppelte Momentensumme der beiden Vereine von Linientheilen in Beziehung aufeinander, wobei wir aber nur die Spathe der Körpertheile in Frage ziehen, übrigens auch die Körpertheile gesetzt werden können, indem solche gleichartige Grössen sind.

„Die doppelte Momentensumme zweier Vereine von Linientheilen in Bezug aufeinander ist gleich der Summe aus den inneren Producten der

Resultantenstrecke des ersten Systemes und dem Achsenmomente des zweiten, der Resultantenstrecke des zweiten und dem Achsenmomente des ersten Systemes."

Diese Momentensumme verschwindet in den folgenden Fällen:

1. Wenn $\bar{\varkappa} + |\gamma = 0$, oder $\bar{\varkappa}' + |\gamma' = 0$ ist, das heisst, wenn $\mathfrak{S}$ oder $\mathfrak{S}'$ äquivalent Null ist.
2. Wenn $\bar{\varkappa} = 0$ und $\bar{\varkappa}' = 0$ sind, das heisst, wenn jeder Verein gleichzeitig einem Paare äquivalent ist.
3. Wenn $\gamma = 0$ und $\gamma' = 0$ sind, das heisst, wenn $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ Einzelresultanten äquivalent sind.
4. Wenn gleichzeitig $\varkappa \,|\, \gamma' = 0$ und $\varkappa' \,|\, \gamma = 0$ sind, das heisst, wenn je die Reductionsresultante des einen Vereins auf dem resultirenden Achsenmomente des anderen senkrecht steht.
5. Wenn $(\varkappa' \,|\, \gamma) = -(\varkappa \,|\, \gamma')$ ist, oder $(\bar{\varkappa}' \bar{\nu}_2) = -(\bar{\varkappa} \nu'_2)$ ist, dass heisst, wenn die resultirenden Körpertheile oder Spathe entgegengesetzt gleich sind.

Sind die beiden Vereine bezüglich eines Punktes $O$ einander äquivalent, dann ist:

$$\bar{\varkappa} = \bar{\varkappa}' \quad \bar{\nu}_2 = \bar{\nu}'_2,$$

mithin:

$$\Sigma\Sigma \bar{\varkappa}'_{l'} \bar{\varkappa}_l = 2 \bar{\varkappa} \bar{\nu}_2 \equiv 2\varkappa \,|\, \gamma = 2kg \cos(\varkappa, \gamma) = 2kg_0.$$

Die Gleichung:

$$\Sigma\Sigma \bar{\varkappa}'_{l'} \bar{\varkappa}_l = \Sigma\Sigma \bar{\varkappa}_l \bar{\varkappa}'_{l'} \equiv \varkappa \,|\, \gamma' + \varkappa' \,|\, \gamma$$

stellt eine Relation zwischen den Momenten der Elemente des Linientheilvereines der $\bar{\varkappa}_l$ in Bezug auf Achsen dar, welche die Träger der Elemente des Vereines der $\bar{\varkappa}'_{l'}$ sind, und umgekehrt. — Verschwindet diese Doppelsumme, dann ist, wenn $\mathfrak{S} = O\varkappa + |\gamma$ ist, $\mathfrak{S}' = 0$, das heisst, $\mathfrak{S}'$ reducirt sich auf Null, und umgekehrt.

„Die Doppelsumme verschwindet, wenn irgend einer der beiden Vereine äquivalent Null ist."

3. Sind $\varepsilon_l$ und $\varepsilon'_{l'}$ die Einheitsstrecken irgend zweier Geraden, dann nennen wir den Spath des Productes $\bar{\varepsilon}'_{l'} \bar{\varepsilon}_l$ das Moment dieser beiden Geraden in Bezug auf einander.

Bezeichnen wir dieses Moment mit $M$, dann ist:

$$M \equiv \bar{\varepsilon}'_{l'} \bar{\varepsilon}_l, \quad M = \varepsilon'_{l'} \delta \varepsilon_l,$$

wenn $\delta$ die Abstandsstrecke der beiden Geraden bedeutet.

Dadurch, aber auch direct, kann geschrieben werden:

$$\Sigma\Sigma \bar{\varkappa}'_{l'} \bar{\varkappa}_l = \Sigma\Sigma k'_{l'} k_l (\bar{\varepsilon}'_{l'} \bar{\varepsilon}_l).$$

Es bedeutet $k_l(\bar{\varepsilon}'_{l'} \bar{\varepsilon}_l)$ das Moment von $\bar{\varkappa}_l$ bezüglich der Achse $\varepsilon'_{l'}$, $\Sigma k_l(\bar{\varepsilon}'_{l'} \bar{\varepsilon}_l)$ das Moment des Vereines der $\bar{\varkappa}_l$ in Bezug auf die Achse $\bar{\varepsilon}'_{l'}$, $\Sigma\Sigma k'_{l'} k_l(\bar{\varepsilon}_{l'} \bar{\varepsilon}_l)$ die doppelte Momentensumme von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ in Bezug *aufeinander*.

Setzen wir:
$$\Sigma k_l(\bar{\varepsilon}'_{l'}\varepsilon_l) = M_{l'},$$
dann ist:
$$k'_1 M_1 + k'_2 M_2 + k'_3 M_3 + \cdots + k'_{n'} M_{n'} = \sum_1^{n'} k'_{l'} M_{l'}.$$
Ist nun
$$\Sigma\Sigma k'_{l'} k_l(\bar{\varepsilon}_{l'}\bar{\varepsilon}_l) = 0,$$
dann ist:
$$\sum_1^{n'} k'_{l'} M_{l'} = 0,$$
und es besteht die Gleichung:
$$k'_1 M_1 + k'_2 M_2 + k'_3 M_3 + \cdots + k'_{n'} M_{n'} = 0.$$

„Verschwindet die doppelte Momentensumme, dann besteht zwischen den Momenten des einen Vereins in Bezug auf die Träger des anderen eine lineare Gleichung, die Coefficienten der Momente sind die Längen der Linientheile auf den Trägern, deren Summe verschwindet.“

Soll umgekehrt
$$\Sigma\Sigma\bar{\varkappa}'_{l'}\bar{\varkappa}_l \equiv \varkappa \mid \gamma' + \varkappa' \mid \gamma$$
eine Relation zwischen den Momenten des Vereins der $\bar{\varkappa}_l$ in Bezug auf die Achsen $\bar{\varkappa}'_{l'}$ darstellen, die unabhängig von der Lage gegen die Achsen ist, so muss die rechte Seite dieser Gleichung verschwinden, es muss $\bar{\varkappa}' = 0$ und $\gamma' = 0$ sein, das heisst, $\mathfrak{S}' = 0$ sein, es muss ein Linientheilsystem $\mathfrak{S}'$ längs den Achsen $\varepsilon'_{l'}$ geben, dessen Summe verschwindet.

4. Wählen wir den Punkt $O$ als Ursprung rechtwinkliger Coordinaten, setzen:
$$\varkappa = k_x\varepsilon_1 + k_y\varepsilon_2 + k_z\varepsilon_3, \qquad \gamma = g_x\varepsilon_1 + g_y\varepsilon_2 + g_z\varepsilon_3,$$
$$\varkappa' = k'_x\varepsilon_1 + k'_y\varepsilon_2 + k'_z\varepsilon_3 \qquad \gamma' = g'_x\varepsilon_1 + g'_y\varepsilon_2 + g'_z\varepsilon_3,$$
dann ist:
$$\Sigma\Sigma\bar{\varkappa}'_{l'}\bar{\varkappa}_l = k_x g'_x + k_y g'_y + k_z g'_z + k'_x g_x + k'_y g_y + k'_z g_z.$$

Die Entwickelung weiterer Beziehungen zwischen zwei Linientheilsystemen, namentlich die Darstellung des sogenannten Gleichgewichtes, habe ich mir für eine spätere Abhandlung vorbehalten, indem nämlich der Inhalt dieser Arbeit, die sich ganz absichtlich an den Gedankengang Schell's anschliesst, genügt, um vorerst die Kinematik, insoweit solche der Ingenieur nöthig hat, zu behandeln. Alsdann wird der Werth des geometrischen Kalküls viel markanter hervortreten. Mit Rücksicht hierauf empfehle ich die Arbeit über Curven und Flächen von Hermann Grassmann dem Jüngeren, deren Kenntniss ich voraussetzen muss, zum gefälligen Studium. Ein Lehrbuch der analytischen Geometrie ist überdies für den Druck in Vorbereitung.

Zürich, im März 1893.

---

# VIII.

# Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.

Von

Dr. W. Heymann
in Chemnitz.

## Vorbemerkung.

Seit ungefähr acht Jahren habe ich mich ab und zu mit der transcendenten Auflösung algebraischer Gleichungen beschäftigt. Meinen Untersuchungen lag zumeist die Idee zu Grunde, solchen algebraischen Gleichungen nachzugehen, deren Wurzeln durch hypergeometrische Reihen höherer Ordnung dargestellt werden können. Auf solche Weise erledigte ich insbesondere die trinomische Gleichung in völlig allgemeiner Darstellung.

Durch einen speciellen Ansatz wurde ich immer zu Gleichungen mit nur einem Parameter geführt, und diese Gleichungen waren ausserdem noch dadurch ausgezeichnet, dass ihre Discriminante die binomische Form

$$\nabla = x^p(1-x)^q$$

annahm, unter $p$, $q$ ganze Zahlen verstanden. Dies ist in Uebereinstimmung damit, dass die zugehörigen hypergeometrischen Differentialgleichungen — Differentialresolventen, wie ich sie nenne — die einzigen singulären Punkte $x=0$ und $x=1$ besitzen.

Ich habe mich sodann quadrinomischen und mehrgliedrigen Gleichungen mit einem Parameter zugewendet und die Bedingung festgehalten, dass deren Discriminante die oben erwähnte zweigliedrige Form habe. Auf diese Weise treten nun unendlich viele besondere Gleichungen auf, die theils ganz direct, theils auch indirect mit hypergeometrischen Functionen höherer Ordnung in Verbindung gesetzt werden können. Ich will im zweiten Theil dieser Abhandlung eine Anzahl solcher Gleichungen mittheilen, und es wird sich zeigen, dass die Gleichungen für die Kreistheilung, die einfachsten Modulargleichungen resp. die Jacobi'schen Gleichungen, ebenso die bekannten Resolventen der Gleichung fünften Grades u. s. f. *erscheinen.* Das Auftreten jener Gleichungen ist eigentlich selbstverständ-*lich, insofern* selbige eben eine Discriminante der besprochenen Form be-

sitzen. Unser Ansatz liefert aber auch noch andere bemerkenswerthe Gleichungen, die bisher nirgends erwähnt wurden.

Was insbesondere die Gleichungen vom fünften Grade anlangt, so stellte sich unter Anderem eine Resolvente ein, deren Form folgende ist:

$$xw^5 + 60w^2 + 15w + 1 = 0,$$

mit der Discriminante:

$$\nabla = x^2(6^4 - x)^2,$$

und welche ich weder in den diesbezüglichen Aufsätzen der Herren Gordan und Klein, noch in Klein's „Vorlesungen über das Ikosaeder" auffinden konnte. Bemerkt sei sogleich, dass obige Resolvente ihre Gestalt nach Anwendung der Transformation:

$$w + w' + 6ww' = 0$$

nicht ändert; die neue Gleichung in $w'$ besitzt aber ein neues $x = x'$, welches mit dem ursprünglichen durch

$$x' = 6^4 - x$$

verknüpft ist. Dieses Resultat veranlasste mich schon vor längerer Zeit mit Hilfe jener zwei Resolventen eine Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades zu versuchen, und ich erreichte es auch. Wenn ich mit der Publication dieser Untersuchungen bisher zurückgehalten habe, so hat dieses einen zweifachen Grund.

Zunächst ergab sich für mich die ausserordentlich lohnende aber auch zeitraubende Aufgabe, die einschlägigen Arbeiten zu studiren, um zu erfahren, welche Stellung meine Resolvente in der Theorie von Gordan und Klein einnimmt. Es zeigte sich, wie zu erwarten, dass die seither bekannten Resolventen fünften Grades mit oben erwähnter durch eine sehr einfache Tschirnhaus-Transformation in Verbindung gesetzt werden können. Eben deswegen kann ich auch meiner Resolvente eine principielle Bedeutung nicht beimessen, nur will ich auf die Symmetrie in meiner späteren Darstellung hinweisen, welche gerade durch jene Resolvente, nachdem sie gespalten ist, erreicht wird.

Ein anderer Grund für die Verzögerung meiner Mittheilungen war eine Anregung, die mir durch Herrn Kronecker im Jahre 1886 wurde. Ich hatte Herrn Kronecker zwei bestimmte Integrale mitgetheilt, welche die Auflösung einer allgemeinen quadrinomischen Gleichung darstellen, und auf seine Veranlassung hin beschäftigte ich mich mit jenen Integralen genauer und entwickelte selbige in Reihen. Die Entwickelung bezog sich ursprünglich auf die Gleichung:

$$z^5 + az^3 + bz + 1 = 0$$

und ergiebt daher ein Integral, beziehentlich eine Reihe mit zwei Veränderlichen. Später habe ich dann die Aufgabe ganz allgemein in Angriff genommen und in meinen „Studien" veröffentlicht.*

* Studien über die Transformation und Integration der Differential- und *Differenzengleichungen nebst einem* Anhang verwandter Aufgaben. B.G. Teubner. 1891.

Bestimmend für alle diese Untersuchungen war aber: Eine Auflösung der Gleichung fünften Grades zu finden, welche der Kronecker'schen Anforderung genügt, dass eine „accessorische Irrationalität" vermieden werde. Betreffs der vorhin erwähnten Integrale und Reihen muss ich bemerken, dass sie zunächst nur eine formale Bedeutung haben, da die Grenzen ihrer Giltigkeit schwer festzustellen sind. Aus diesem Grund habe ich noch eine zweite Auflösungsmethode in Betracht gezogen, bei welchen die Wurzeln der Gleichungen durch „Kettenfunctionen" dargestellt werden. Solche Kettenfunctionen werden durch unendliche Processe definirt, so etwa, dass man auf eine Grösse $x$ unendlich oft eine bestimmte Operation $f$ ausübt. Kettenbrüche sind ein specieller Fall derselben. Die Convergenz der Processe lässt sich hier leichter feststellen als bei den entsprechenden Reihen, besonders dann, wenn man die geometrische Deutung nicht ausser Acht lässt.

Die vorliegende Abhandlung zerfällt in zwei Theile. Im ersten Theil, der ein abgeschlossenes Ganzes für sich bildet, soll eine vollständige Auflösung der Gleichung fünften Grades gegeben werden, und es sei bemerkt, dass der Versuch gemacht ist, jene Auflösung so elementar zu begründen, als nur möglich. Es sollen alle functionen- und invariantentheoretischen Begriffe ausgeschlossen werden; nur die in Mitten auftretende Ikosaeder-Irrationalität bedarf zu ihrer numerischen Berechnung der hypergeometrischen Reihe, weil ohne transcendente Hilfsmittel eine Gleichung fünften Grades überhaupt nicht lösbar ist.

Es versteht sich ganz von selbst, dass unsere Resultate an vielen Stellen mit denen von Gordan und Klein übereinstimmen müssen. Ich habe, damit diese Uebereinstimmung nirgends verschleiert und die Priorität genannter Autoren gewahrt werde, möglichst die Klein'sche Bezeichnung angenommen. Im Uebrigen sei auf die unten genannte einschlägige Literatur verwiesen.

Hiernach ist also der erste Theil dieser Arbeit für solche Leser bestimmt, welche in Kürze die Auflösung der Gleichung fünften Grades überblicken wollen, etwa in der Weise, wie man das bei den Gleichungen dritten und vierten Grades gewöhnt ist. Selbstverständlich gestalten sich die Vorgänge bei den Gleichungen fünften Grades verwickelter, und man wird am Schlusse eine natürliche, von Kunstgriffen freie Darstellung verlangen, wie sie eben von dem höheren Standpunkt der Theorie des Ikosaeders aus thatsächlich gewonnen wird. In diesem Sinne — als vorbereitende Lectüre — möchte jener erste Theil verstanden werden!

Der zweite Theil der Abhandlung enthält allgemeine Erörterungen. Insbesondere wünschte ich eine kurze Mittheilung über Gleichungen mit binomischer Discriminante und über die directe Darstellung der Wurzeln *mittelst* Functionen mehrerer Veränderlicher zu machen. Diese Fragen *beziehen sich* allerdings auf die Gleichungen ganz im Allgemeinen; sie sind

aber hier dazu bestimmt, den ersten Theil meiner Arbeit zu vervollständigen, indem sie sich unmittelbar auf die Gleichung fünften Grades übertragen lassen.

## Literaturverzeichniss.

Journal f. d. r. u. a. Mathematik:

Bd. 75 S. 292—335. A. Schwarz. Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt. — 1872.

Bd. 87 S. 97—142. L. Fuchs. Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie. — 1875.

Bd. 87 S. 114—133. L. Kiepert. Auflösung der Gleichungen fünften Grades. — 1878.

Mathematische Annalen:

IX. Bd. S. 183—208. F. Klein. Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. — 1875.

XI. Bd. S. 115—118. F. Klein. Ueber lineare Differentialgleichungen. — Juni 1876.

XI. Bd. S. 401—411. F. Brioschi. La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre. — 1876.

XII. Bd. S. 167—179. F. Klein. Ueber lineare Differentialgleichungen (Fortsetzung). — April 1877.

XII. Bd. S. 503—560. F. Klein. Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder. — August 1877.

XIII. Bd. S. 109—160. F. Brioschi. Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade (Brioschi's Resultate aus den Jahren 1858—1866 enthaltend). — October 1877.

XIII. Bd. S. 375—404. P. Gordan. Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. — Januar 1878.

XIV. Bd. S. 111—172. F. Klein. Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. — Mai 1878.

Einzel-Werke:

Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade von F. Klein. — B. G. Teubner. 1884.

Vorlesungen über Invariantentheorie von P. Gordan. Herausgegeben von G. Kerschensteiner. — B. G. Teubner. 1887.

---

# I. Theil.

## 1. Die Resolvente von Brioschi.

Wenn man in die Theorie der Gleichungen fünften Grades eindringt, sei es nun von Seiten her der Modulfunctionen (Jacobi), oder der hypergeometrischen Functionen (Schwarz), oder der Invariantentheorie (Gordan), oder der Theorie des Ikosaeders (Klein), immer wird man zunächst auf einige sehr specielle und merkwürdige Resolventen geführt, welche eine allgemeine Auflösung des Problems ermöglichen. Diese Resolventen stellen sich auch ein, wenn man die Gleichung fünften Grades in quadrinomischer Form voraussetzt und derselben die Bedingung auferlegt, dass ihre Discriminante binomisch sei. Vergl. Theil II, A dieser Abhandlung.

Wir stellen an die Spitze unserer Untersuchung eine der fundamentalsten dieser Gleichungen, nämlich:

$$1)\qquad t^5 - 10ft^3 + 45f^2t - T = 0.$$

Diese Resolvente findet sich schon bei Brioschi*; in ihr bedeuten $f$ und $T$ zunächst gegebene Zahlen, die Bezeichnung $f$, $T$, $t$ ist die Klein'sche und entspricht der Theorie des Ikosaeders.

Wir versuchen jetzt, die Gleichung 1) in Verbindung mit anderen Resolventen zu setzen, insbesondere mit solchen, in denen ausser der vierten auch die dritte Potenz der Unbekannten fehlt, und erreichen es in einfachster Weise durch die Substitution:

$$2)\qquad t = \frac{1 + k\eta}{\eta}\sqrt{f},$$

wenn $k$ dermassen bestimmt wird, dass

$$k^2 - 3 = 0.$$

Somit finden wir zwei neue Resolventen, welche in der gemeinsamen Form**:

$$3)\qquad \left(24k - \frac{T}{\sqrt{f^5}}\right)\eta^5 + 20\eta^2 + 5k\eta + 1 = 0$$

enthalten sind, wobei:

$$4)\qquad k = \pm\sqrt{3},\quad \eta = \frac{\sqrt{f}}{t - k\sqrt{f}}.$$

## 2. Die Resolvente der $\eta$.

Wir wollen von jetzt ab die Gleichung:

$$5)\qquad h\eta^5 + 20\eta^2 + 5k\eta + 1 = 0,$$

in welcher:

---

* Annali di Matematica ser. 1, t. I (1858).

** *Es ist dies* die bereits in der Vorbemerkung erwähnte Resolvente, nur dass *dort die Klammergrösse* mit $x$ bezeichnet und $\eta = kw$ gesetzt wurde.

6) $$h = 24k - \frac{T}{\sqrt{f^5}}$$

gesetzt wurde, als Resolvente der $\eta$ bezeichnen. Je nachdem wir dem $k$ die Werthe: $$k_1 = +\sqrt{3} \quad \text{oder} \quad k_2 = -\sqrt{3}$$

ertheilen, werden wir $h_1$, $\eta_1$ beziehentlich $h_2$, $\eta_2$ schreiben.* Die beiden $h$ sind offenbar die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

7) $$f^5 h^2 + 2T\sqrt{f^5}h + (T^2 - 1728 f^5),$$

und man bemerke, dass:

8) $$h_1 - h_2 = 48\sqrt{3}.$$

Für die beiden $\eta$ hat man:

9) $$\eta_1 = \frac{\sqrt{f}}{t - \sqrt{3f}} \quad \text{und} \quad \eta_2 = \frac{\sqrt{f}}{t + \sqrt{3f}};$$

sie können als Wurzeln der quadratischen Gleichung:

10) $$(t^2 - 3f)\eta^2 - 2t\sqrt{f}\,\eta + f = 0$$

angesehen werden. Bildet man mittelst 9) die Ausdrücke für $\eta_1\eta_2$ und $\eta_1 - \eta_2$ und vergleicht selbige, so findet man, dass

11) $$\eta_1 - \eta_2 = 2\eta_1\eta_2\sqrt{3}.$$

Diese von $f$ und $t$ freie Beziehung ist für das Folgende wichtig; vermöge derselben transformirt man die Resolvente der $\eta_1$ in die der $\eta_2$ und umgekehrt.

### 3. Simultane Resolventen der $\eta$.

Ausser den beiden Resolventen der $\eta$, welche in Nr. 5 Abschnitt 2 enthalten sind, bestehen noch weitere algebraische Beziehungen, welche die sich entsprechenden Grössen $\eta_1$ und $\eta_2$ gleichzeitig enthalten, und welche simultane Resolventen heissen mögen. Ich stelle hier vor Allem diejenigen Resolventen fünften Grades zusammen, deren ich später bedarf. Diese sind:

12) $$\begin{cases} R_0 = h_1\eta_1^5 + 20\eta_1^2 + 5k_1\eta_1 + 1 = 0, \\ R_1 = h_1\eta_1^4\eta_2 + 8\eta_1\eta_2 + 2k_1\eta_1 + k_1\eta_2 + 1 = 0, \\ R_2 = h_1\eta_1^3\eta_2^2 + 2\eta_2^2 + k_1\eta_2 + 1 = 0, \\ R_3 = h_2\eta_1^2\eta_2^3 + 2\eta_1^2 + k_2\eta_1 + 1 = 0, \\ R_4 = h_2\eta_1\eta_2^4 + 8\eta_1\eta_2 + k_2\eta_1 + 2k_2\eta_2 + 1 = 0, \\ R_5 = h_2\eta_2^5 + 20\eta_2^2 + 5k_2\eta_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

---

* Wenn man $-\eta_2$ an Stelle von $+\eta_2$ schreibt, so kann man die Unterscheidung von $k_1$ und $k_2$ ganz aufgeben; die der beiden $h$ bleibt jedoch bestehen.

Beiläufig sei auch die symmetrische und homogene Resolvente:

13) $h_1\eta_1^5 - 5h_1\eta_1^4\eta_2 + 10h_1\eta_1^3\eta_2^2 - 10h_2\eta_1^2\eta_2^3 + 5h_2\eta_1\eta_2^4 - h_2\eta_2^5 = 0$
erwähnt, welcher:

14) $$\eta_1 = \varrho(t + \sqrt{3f}), \quad \eta_2 = \varrho(t - \sqrt{3f})$$

genügt, unter $\varrho$ einen Proportionalitätsfactor verstanden. Die Existenz der simultanen Resolventen verificirt man leicht auf Grund der Beziehung 11), aus welcher folgt:

15) $$\eta_1 = \frac{\eta_2}{1 + 2k_2\eta_2} \text{ resp. } \eta_2 = \frac{\eta_1}{1 + 2k_1\eta_1}.$$

Setzt man nämlich den Werth von $\eta_2$ in $R_1$ und $R_2$ ein, so resultirt $R_0$; setzt man den Werth von $\eta_1$ in $R_3$ und $R_4$ ein, so entsteht $R_5$. Uebrigens gehen die letzten drei Resolventen aus den ersten drei auch durch einfache Buchstabenvertauschung hervor.

Des Weiteren sei bemerkt, dass sich alle Potenzen und Potenzenproducte der Form $\eta_1^p\eta_2^q$, wo $p$ und $q$ ganze positive Zahlen bedeuten und $p + q > 2$ auf eine Form zweiten Grades:

$$A\eta_1^2 + B\eta_2^2 + C\eta_1\eta_2 + D\eta_1 + E\eta_2 + F$$

reduciren, deren Coefficienten $A \ldots F$ nur von $h_1$ und $h_2$, das heisst von dem Verhältniss $T^2 : f^5$ abhängen. Hier kann auch noch das Glied $\eta_1\eta_2$ mit Hilfe der Beziehung:

11) $$2\eta_1\eta_2\sqrt{3} = \eta_1 - \eta_2$$
beseitigt werden.

### 4. Eine allgemeinere Resolvente.

Gordan* und Klein** haben wohl zuerst den glücklichen Gedanken gefasst, durch eine mit zwei disponiblen Constanten ausgestattete lineare Verbindung der Wurzeln von zwei einfachen Resolventen fünften Grades eine allgemeinere Lösung zu construiren. Es ist dies einer der wichtigsten Fortschritte, der in der Theorie jener Gleichungen zu verzeichnen ist. Denn, während die erste Methode der Auflösung, nämlich die von Hermite entdeckte, sich auf die trinomische Form:

$$y^5 + 5\beta y + \gamma = 0$$

erstreckte, gelang es Gordan und Klein, die quadrinomische Form:

16) $$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0$$

ganz direct aufzulösen und hiermit die umständliche, von Bring und Jerrard modificirte Tschirnhaus-Transformation zu vermeiden. Klein hat durch geometrische Betrachtungen jeden Zweifel beseitigt, dass

* Math. Annalen XIII. Bd. S. 400, Nr. 19.

** *Ikosaeder*, Vorlesungen, S. 105, Nr. 30.

jene Transformation eine überflüssige Complication des ganzen Ansatzes herbeiführt.

Fragen wir jetzt, welcher Gleichung eine lineare Verbindung unserer $\eta$, also

$$17)\qquad y = p\eta_1 + q\eta_2,$$

genügt, unter $p$ und $q$ zunächst völlig unbestimmte Zahlen verstanden. — Bezeichnen wir die sich entsprechenden Werthe von $\eta_1$ und $\eta_2$ genauer durch $\eta_{1\nu}$ und $\eta_{2\nu}$, wo $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$, so folgt zunächst aus der Form der Resolvente der $\eta$, dass:

$$\sum_\nu \eta_{1\nu} = 0, \quad \sum_\nu \eta_{1\nu}^2 = 0; \quad \sum_\nu \eta_{2\nu} = 0, \quad \sum_\nu \eta_{2\nu}^2 = 0,$$

dass weiter auch wegen:

$$11)\qquad 2\eta_1\eta_2\sqrt{3} = \eta_1 - \eta_2$$

die Beziehung:

$$\sum_\nu \eta_{1\nu}\cdot\eta_{2\nu} = 0$$

besteht. Hieraus erhellt, dass obige lineare Verbindung der $\eta$, bei völliger Unbestimmtheit der $p$, $q$, einer Gleichung fünften Grades genügen wird, in welcher die vierte und dritte Potenz von $y$ nicht vorkommen kann. Wir bezeichnen eine solche Gleichung nach Klein als Hauptgleichung und schreiben sie, wie unter Nr. 16 angegeben.

Auf eine Hauptgleichung kommen wir nun, wenn wir die Substitution:

$$17)\qquad y = p\eta_1 + q\eta_2$$

beiderseits in die fünfte Potenz erheben und die Verbindungen fünften Grades wie $\eta_1^5$, $\eta_1^4\eta_2, \ldots$ sofort wieder mittelst der simultanen Resolventen unter Nr. 12 in Gebilde des zweiten Grades umsetzen. Das Schlussresultat enthält, wie zu erwarten, die $\eta$ nun in der durch 17) bezeichneten Verbindung und zwar in erster und zweiter Potenz, wofür wieder $y$ und $y^2$ zu schreiben ist. Es lautet:

$$18)\ \begin{cases} h_1h_2y^5 + 20\{h_2p^3 + h_1q^3\}y + 5\sqrt{3}\{h_2p^3(p+2q) - h_1q^3(2p+q)\}y \\ \qquad + \{h_2p^3(p^2+5pq+10q^2) + h_1q^3(10p^2+5pq+q^2)\} = 0 \end{cases}$$

und enthält natürlich für $q = 0$ resp. $p = 0$ die beiden Resolventen von $\eta_1$ und $\eta_2$ als specielle Fälle in sich.

Wenn man sich damit begnügen will, nur die Existenz der Resolvente 18) festzustellen, so kann man auch so verfahren, dass man in 18) einfach die Substitution 17) einträgt. Auf solche Weise entsteht folgende Gleichung:

$$19)\ h_2p^5R_0 + 5h_2p^4qR_1 + 10h_2p^3q^2R_2 + 10h_1p^2q^3R_3 + 5h_1pq^4R_4 + h_1q^5R_5 = 0,$$

wo die $R$ die linken Seiten der früher angegebenen simultanen Resolventen vorstellen. Da diese alle einzeln für sich verschwinden, so ist auch Gleichung 19) identisch erfüllt und damit die Existenz der Resolvente 18) gesichert.

### 5. Die Hauptgleichung.

Wir haben jetzt die Mittel in der Hand, die Auflösung einer Hauptgleichung:

$$16)\qquad y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0$$

von der Auflösung der Resolvente der $\eta$ beziehentlich der $t$ abhängig zu machen. Vergleichen wir nämlich Gleichung 16) mit der im Abschnitt 4 hergeleiteten allgemeinen Resolvente 18), so können wir Identität eintreten lassen, wenn wir nachstehendes Gleichungssystem in Bezug auf die Grössen $p$, $q$ und $h$ aufzulösen vermögen:

$$20)\qquad \begin{cases} \text{a)}\quad h_2 p^3 + h_1 q^3 = \frac{1}{4}\alpha h_1 h_2, \\ \text{b)}\quad h_2 p^3(p+2q) - h_1 q^3(2p+q) = \frac{\beta}{\sqrt{3}} h_1 h_2, \\ \text{c)}\quad h_2 p^3(p^2 + 5pq + 10q^2) + h_1 q^3(10p^2 + 5pq + q^2) = \gamma h_1 h_2. \end{cases}$$

Der Vorgang bei der Elimination ist nun folgender:

Man eliminire aus dem System zunächst die beiden $h$ oder, wie man auch sagen kann, die Grössen $p^3 h_1^{-1}$ und $q^3 h_2^{-1}$, dann ergiebt sich:

$$21)\qquad \alpha r - \beta s - \gamma = 0,$$

wobei zur Abkürzung

$$22)\qquad p + q = \sqrt{r} \quad \text{und} \quad (p-q)\sqrt{3} = s$$

gesetzt wurde.

Sodann eliminire man aus den ersten beiden Gleichungen a) und b), sowie der im Abschnitt 2 auftretenden Bedingung

$$8)\qquad h_1 - h_2 = 48\sqrt{3}$$

nochmals die Grössen $h$, dann folgt mit Rücksicht auf 21) eine Gleichung zur Bestimmung des $r$, nämlich:

$$23)\qquad (\alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3)r^2 - (2\alpha^3\gamma + 11\alpha^2\beta^2 + \beta\gamma^2)r + (\alpha\gamma - 8\beta^2)^2 = 0.$$

Endlich verschaffe man sich auf Grund der Gleichungen a) und b) einen Ausdruck für $h_1 h_2$ und findet:

$$h_1 h_2 = \frac{-12^3.\,\beta^2 p^3 q^3 r}{\alpha^4 r^2 - (2\alpha^3\gamma + 11\alpha^2\beta^2)r + (\alpha\gamma - 8\beta^2)^2}.$$

Hier lässt sich der Nenner mittelst der Gleichung 23) ganz unmittelbar in einen anderen verwandeln, und dann erhält man einfach:

$$24)\qquad h_1 h_2 = \frac{-12^3.\,\beta p^3 q^3}{(\beta^2 - \alpha\gamma)r + \gamma^2}.$$

Wollte man die $h$ für sich haben, so brauchte man den letzten *Ausdruck* nur in Verbindung mit Nr. 8 zu setzen; aber wir werden

diese Grössen überhaupt nicht benöthigen und mit dem Ausdruck 24) auskommen.

Wir haben sonach folgende einzelne Schritte zu thun. Zunächst löst man die quadratische Gleichung 23) auf, wobei sich ergiebt:

$$25)\qquad r = \frac{2\alpha^3\gamma + 11\alpha^2\beta^2 + \beta\gamma^2 \pm \beta\nabla}{2(\alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3)},$$

und hier ist:

$$26)\qquad \nabla^2 = 108\alpha^5\gamma - 135\alpha^4\beta^2 + 90\alpha^2\beta\gamma^2 - 320\alpha\beta^3\gamma + 256\beta^5 + \gamma^4,$$

wie man sich überzeugen möge, die Discriminante der Hauptgleichung 16). Ueber das Vorzeichen von $\nabla$ können wir erst später im Abschnitt 6 entscheiden.

Nun bestimme man auf Grund der Gleichung 21):

$$27)\qquad s = \frac{\alpha r - \gamma}{\beta}$$

und sodann $p$ und $q$ aus:

$$22)\qquad p + q = \sqrt{r} \quad \text{und} \quad p - q = \frac{s}{\sqrt{3}}.$$

In Wirklichkeit braucht man übrigens nur das Product:

$$28)\qquad pq = \frac{1}{12}(3r - s^2),$$

welches, in Nr. 24 eingeführt, folgendes ergiebt:

$$29)\qquad h_1 h_2 = \frac{-\beta(3r - s^2)^3}{(\beta^2 - \alpha\gamma)r + \gamma^3}.$$

Erinnert man sich, dass mit Rücksicht auf Gleichung 7) im Abschnitt 2 die Beziehung:

$$30)\qquad h_1 h_2 = (T^2 - 1728 f^5) : f^5$$

statt hat, so ist deutlich, dass vermöge der zuletzt angegebenen Formeln das Verhältniss $T^2 : f^5$ durch die Coefficienten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der Hauptgleichung 16) ausgedrückt werden kann, und jenes Verhältniss ist ja gerade der einzige Parameter der Resolvente der $\eta$.

Die Lösung der Hauptgleichung hat nun die Gestalt:

$$y = p\eta_1 + q\eta_2 = p\,\frac{\sqrt{f}}{t - \sqrt{3f}} + q\,\frac{\sqrt{f}}{t + \sqrt{3f}},$$

oder, mit Berücksichtigung von Nr. 22:

$$31)\qquad y = \frac{t\sqrt{rf} + sf}{t^2 - 3f}.$$

Der letzte Ausdruck stellt zugleich die Tschirnhaus-Transformation* dar, welche die Hauptgleichung in die Brioschi'sche Resolvente der $t$ überführt. Würde man dagegen aus:

* Vergl. auch Gordan, Math. Annalen XIII. Bd. S. 400, Nr. 19 und Kiepert, Journal f. d. r. u. a. M., 87. Bd. S. 131, Nr. 34.

17) $$y = p\eta_1 + q\eta_2$$

und

11) $$2\eta_1\eta_2\sqrt{3} = \eta_1 - \eta_2$$

eines der $\eta$ eliminiren, so käme man zu jener Tschirnhaus-Transformation, welche die Hauptgleichung in die Resolvente der $\eta$ umwandelt.

Anmerkungen. Statt der quadratischen Gleichung 23) für $r$ benutzen Klein* und Kiepert** eine andere, bei welcher $s$ die Unbekannte ist. Wir erhalten jene Gleichung, wenn wir aus Nr. 21

32) $$r = \frac{\beta s + \gamma}{\alpha}$$

entnehmen und dieses in 23) eintragen; es entsteht:

33) $$(\alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3)s^2 - (11\alpha^3\beta - \alpha\gamma^2 + 2\beta^2\gamma)s + 64\alpha^2\beta^2 - 27\alpha^3\gamma - \beta\gamma^2 = 0,$$

während der Ausdruck 24) übergeht in:

34) $$h_1 h_2 = \frac{-12^3.\,\alpha p^3 q^3}{(\beta^2 - \alpha\gamma)s + \beta\gamma}.$$

Noch anders ist die Darstellung bei Gordan***, welcher eine quadratische Gleichung aufstellt, deren Unbekannte $c$ mit unserem $r$ durch:

35) $$r = \frac{\alpha\gamma - 8\beta^2}{\alpha^2 - 3\beta c}$$

verbunden ist.

Bemerkt sei, dass die Klein'schen Formeln für $\alpha = 0$ versagen, die unsrigen für $\beta = 0$; durch obige zweifache Darstellung erledigen sich jene Ausnahmefälle von selbst. Die Klein'schen Ausdrücke sind ziemlich complicirt, dafür erweisen sie sich von einer allerdings nur scheinbaren Irrationalität frei, die in unsere Formeln (siehe Nr. 31) durch die Grösse $\sqrt{rf}$ eingeführt wird. Man vergl. hierüber den analogen Fall bei Kiepert.

## 6. Die Resolventen von Gordan und Klein.

Wie bereits im Abschnitt 4 erwähnt, sind die beiden Resolventen der $\eta_1$ und $\eta_2$, welche wir bei unserer Darstellung gebraucht haben, specielle Hauptgleichungen, charakterisirt durch $q = 0$ resp. $p = 0$. Gordan und Klein benutzen dagegen zwei andere Resolventen, welche durch die Bedingungen:

$$p + q = 0 \quad \text{und} \quad p - q = 0,$$

das heisst $r = 0$ resp. $s = 0$, bestimmt werden. Von jenen Resolventen ist die erstgenannte (für $r = 0$) die einfachste, und wir wollen sie jetzt

* Ikosaeder S. 193.

** Journal f. d. r. u. a. M. 87. Bd. S. 132.

*** *Math.* Annalen, XIII. Bd. S. 389.

näher betrachten, weil wir mittelst derselben später zum Ikosaeder gelangen werden.

Soll $r = 0$, so muss in Gleichung 23) des vorigen Abschnittes das absolute Glied verschwinden, also:

$$36)\qquad \alpha\gamma - 8\beta^2 = 0.$$

Wenn aber auch umgekehrt zu Folge der Bedingung 36) $r = 0$ gesetzt, die zweite Lösung der Gleichung 23) dagegen unterdrückt werden soll, so muss die Quadratwurzel im Ausdruck Nr. 25 mit dem unteren negativen Vorzeichen eingeführt werden. Anders würden wir nicht zu dem in Aussicht genommenen und ganz bestimmten Ansatz kommen.

Um die Bedingung 36) ein für alle mal zu erfüllen, setze man:

$$37)\qquad \alpha = 8\gamma_1^2,\quad \beta = \gamma_1\gamma_2,\quad \gamma = \gamma_2^2,$$

dann wird auf Grund unserer allgemeinen Formeln Nr. 27, 29 und 30 im Abschnitt 5:

$$s = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1},\quad h_1 h_2 = \frac{T^2 - 1728 f^5}{f^5} = \frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5}.$$

Hier kann man nun $\gamma_1$ mit $f$ zusammenfallen lassen, womit auch

$$T^2 - 1728 f^5 = \gamma_2^3$$

wird. In der Folge möge aber statt des Buchstabens $\gamma_2$ die Klein'sche Bezeichnung $\gamma_2 = -H$ in Anwendung kommen.

Wir sind so auf die erste der Gordan-Klein'schen Resolventen gekommen, nämlich auf die Gleichung*:

$$38)\qquad W^5 + 40 f^2 W^2 - 5 f H W + H^2 = 0,$$

welcher genügt:

$$39)\qquad W = p(\eta_1 - \eta_2),\quad p = H : 2f\sqrt{3},$$

oder auch, mit Rücksicht auf Nr. 31,

$$40)\qquad W = \frac{H}{t^2 - 3f}.$$

Die neu hinzugekommene Grösse $H$ ist mit den anderen beiden Parametern verbunden durch:

$$41)\qquad T^2 = 1728 f^5 - H^3,$$

und man bemerke noch, dass wegen:

$$11)\qquad \eta_1 - \eta_2 = 2\eta_1\eta_2\sqrt{3},$$

die Beziehung:

$$42)\qquad f W = H\eta_1\eta_2$$

statt hat.

---

* Klein, Math. Annalen XII. Bd. S. 523, Nr. 29; Gordan, Math. Annalen XIII. Bd. S. 394, Nr. 11.

Da die Gleichung 38), welche kurz die Resolvente der $W$ heissen möge, in unserer bisherigen Darstellung mit den Resolventen der $t$, $\eta$ und auch mit der Hauptgleichung 16) innig verbunden erscheint, so werden wir jetzt die eigentliche Auflösung derselben in Angriff nehmen. Dabei werden sich nun die Grössen $f$, $H$, $T$; $t$, $W$, welche für uns bisher nur die Bedeutung von Zahlen hatten, als jene Gebilde erweisen, die durch Schwarz und Klein schon vor länger als zwanzig Jahren unter viel allgemeineren und höheren Gesichtspunkten entdeckt und eingeführt wurden; insbesondere wird uns in dem Symbol $f$ eine Form entgegentreten, welche ein Ikosaeder zu definiren vermag.

Erwähnen wir am Ende auch kurz die zweite Gordan-Klein'sche Resolvente, obwohl wir dieselbe nicht weiter benöthigen. Sie wird charakterisirt durch $s = 0$ und kommt mit einer Hauptgleichung 16) überein, deren Coefficienten die Bedingung:

$$64\alpha^2\beta^2 - 27\alpha^3\gamma - \beta\gamma^2 = 0 \tag{43}$$

erfüllen. Man vergl. Abschnitt 5 Nr. 33. Ihre Auflösung wird vermittelt durch:

$$y = p(\eta_1 + \eta_2) = \frac{2pt\sqrt{f}}{t^2 - 3f}, \quad 2p = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}, \tag{44}$$

oder, weil nach Nr. 40:

$$t^2 - 3f = H : W, \tag{40a}$$

auch durch:

$$y = \frac{2ptW\sqrt{f}}{H}. \tag{45}$$

Man kann noch, ähnlich wie oben, statt der Coefficienten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ direct die Grössen $f$, $H$, $T$ einführen, dann wird:

$$\alpha = fT, \quad \beta = 27f^3H, \quad \gamma = H^2T, \tag{46}$$

und die Bedingung 43) reducirt sich auf jene, welche unter Nr. 41 angegeben wurde. Die gesuchte Resolvente nimmt die Form:

$$y^5 + 5fTy^2 + 135f^3Hy + H^2T = 0 \tag{47}$$

an, und ihr genügt einfach:

$$y = tW. \tag{48}$$

Eben Gleichung 47) ist es, welche in den Arbeiten Klein's* implicite vorkommt und auch gelegentlich bei Gordan** auftritt.

### 7. Allgemeiner Ansatz für die Auflösung.

Schon Euler und Bézout haben die Lösung der allgemeinen Gleichung vom fünften Grade in folgender Form:

---

* *Ikosaeder* S. 106, Nr. 31 ($\sigma = 0$, $\tau = 1$).

** *A. a. O.* S. 394, Nr. 12.

$$49)\quad \begin{cases} y_\nu = A_0 + A_1 \varepsilon^\nu + A_2 \varepsilon^{2\nu} + A_3 \varepsilon^{3\nu} + A_4 \varepsilon^{4\nu}, \\ \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i \sin\frac{2\pi}{5}, \quad \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \end{cases}$$

vorausgesetzt; es gelang diesen Forschern aber nicht, die $A$ in den Coefficienten der Gleichung auszudrücken.

Soll obiger Ausdruck einer Hauptgleichung:

$$16)\quad y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0$$

genügen, so muss:

$$\sum_\nu y_\nu = 0, \quad \sum_\nu y_\nu^2 = 0,$$

das heisst:

$$A_0 = 0, \quad A_1 A_4 + A_2 A_3 = 0.$$

Die letzte Bedingung befriedigt man nach Gordan einfach, indem man setzt:

$$A_1 = \lambda_2 \mu_2, \quad A_2 = \lambda_1 \mu_2, \quad A_3 = -\lambda_2 \mu_1, \quad A_4 = \lambda_1 \mu_1,$$

also:

$$50)\quad y_\nu = \varepsilon^{4\nu} \lambda_1 \mu_1 - \varepsilon^{3\nu} \lambda_2 \mu_1 + \varepsilon^{2\nu} \lambda_1 \mu_2 + \varepsilon^\nu \lambda_2 \mu_2.$$

Durch Bildung der Summen:

$$\sum_\nu y_\nu^3, \quad \sum_\nu y_\nu^4, \quad \sum_\nu y_\nu^5$$

verschafft man sich nun leicht folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der $\lambda$ und $\mu$:

$$51)\quad \begin{cases} \text{a)}\ \lambda_1^3 \mu_1^2 \mu_2 + \lambda_1^2 \lambda_2 \mu_2^3 + \lambda_1 \lambda_2^2 \mu_1^3 - \lambda_2^3 \mu_1 \mu_2^2 = -\alpha, \\ \text{b)}\ \lambda_1^4 \mu_1 \mu_2^3 - \lambda_1^3 \lambda_2 \mu_1^4 - 3\lambda_1^2 \lambda_2^2 \mu_1^2 \mu_2^2 + \lambda_1 \lambda_2^3 \mu_2^4 - \lambda_2^4 \mu_1^3 \mu_2 = -\beta \\ \text{c)}\ \lambda_1^5 (\mu_1^5 + \mu_2^5) - 10\lambda_1^4 \lambda_2 \mu_1^3 \mu_2^2 + 10\lambda_1^3 \lambda_2^2 \mu_1 \mu_2^4 + 10\lambda_1^2 \lambda_2^3 \mu_1^4 \mu_2 \\ \qquad + 10\lambda_1 \lambda_2^4 \mu_1^2 \mu_2^3 - \lambda_2^5 (\mu_1^5 - \mu_2^5) = -\gamma. \end{cases}$$

Herrn Gordan ist es mit Hilfe der Invariantentheorie gelungen, das obige Gleichungssystem thatsächlich aufzulösen, das heisst, wie wir es elementar ausdrücken wollen, die „doppelt binären Formen mit zwei Reihen unabhängiger Variablen“ so unter sich zu verbinden, dass sie in einfach binäre Formen der $\lambda$ beziehentlich $\mu$ zerfallen. Und gerade diese letzterwähnten Formen ermöglichen auf Grund der Theorie von Schwarz und Klein eine Auflösung der Hauptgleichung durch Gauss'sche hypergeometrische Reihen oder durch Modulfunctionen. Wir kommen auf die Gordan'sche Arbeit*, die eine fundamentale Bedeutung für die Theorie der Gleichungen fünften Grades zu allen Zeiten behalten wird, noch einmal kurz zurück. Hier aber möge der allgemeine Ansatz vorerst zur Auflösung der Resolvente der $W$ benutzt werden.

---

* **Math. Annalen XIII. Bd. — Vergl. auch Klein, Ikosaeder Cap. III, §§ 6, 10 und 11.**

### 8. Auflösung* der Resolvente der $W$.

Die betreffende Resolvente lautet nach Abschnitt 6:

38) $$W^5 + 40f^2W^2 - 5fHW + H^2 = 0,$$

und sie stellt einen speciellen Fall der Hauptgleichung:

16) $$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0$$

dar, wenn

52) $$\alpha = 8f^2, \quad \beta = -fH, \quad \gamma = H^2,$$

das heisst:

36) $$P = \alpha\gamma - 8\beta^2 = 0$$

gesetzt wird.

Was nun den letzten Ausdruck $P$ anlangt, so stellt er in den Veränderlichen $\lambda$, $\mu$ eine doppelt binäre Form 16. Grades dar, die sich indessen als reducibel erweist und in zwei Formen achten Grades zerfällt.** In der That ergiebt eine einfache Rechnung, dass

53) $$P = -N_1 N_2,$$

wobei:

54) $$\begin{cases} N_1 = \mu_1(7\lambda_1^5\lambda_2^2 + \lambda_2^7) - \mu_2(\lambda_1^7 - \lambda_1^2\lambda_2^5) \\ N_2 = \lambda_2(7\mu_1^5\mu_2^2 + \mu_2^7) + \lambda_1(\mu_1^7 - 7\mu_1^2\mu_2^5). \end{cases}$$

Die Bedingung $P = 0$ wird erfüllt, wenn eines der $N$ verschwindet. Setzen wir etwa $N_1 = 0$, dann folgt:

55) $$\mu_1 = \varrho(\lambda_1^7 - 7\lambda_1^2\lambda_2^5), \quad \mu_2 = \varrho(\lambda_2^7 + 7\lambda_1^5\lambda_2^2),$$

wo $\varrho$ einen Proportionalitätsfactor bezeichnet. Tragen wir diese Werthe von $\mu$ in die bilineare Verbindung 50) des vorigen Abschnittes ein, so ergiebt sich:

56) $$y_\nu = \varrho\left[\begin{array}{l} \varepsilon^{4\nu}\lambda_1^3(\lambda_1^5 - 7\lambda_2^5) - \varepsilon^{3\nu}\lambda_1^2\lambda_2(\lambda_1^5 - 7\lambda_2^5) \\ + \varepsilon^{2\nu}\lambda_1\lambda_2^2(\lambda_2^5 + 7\lambda_1^5) + \varepsilon^{\nu}\lambda_2^3(\lambda_2^5 + 7\lambda_1^5) \end{array}\right].$$

Durch dieselbe Eintragung der $\mu$ in das Gleichungssystem 51) müssen sich nun auch die Coefficienten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der Hauptgleichung als einfach binäre Formen der $\lambda$ legitimiren. Man findet auf Grund der ersten Gleichung jenes Systems

$$8\varrho^3\lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1^{10} + 11\lambda_1^5\lambda_2^5 - \lambda_2^{10})^2 = -\alpha,$$

und weil in der Resolvente der $W$

$$\alpha = 8f^2,$$

so wird, wenn man von jetzt ab $\varrho = -1$ wählt:

57) $$f = \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{10} + 11\lambda_1^5\lambda_2^5 - \lambda_2^{10}).$$

---

* Es handelt sich in diesem und dem nächsten Abschnitt noch nicht um eine „definitive Auflösung“, sondern immer um die Reduction des Problems auf ein *einfacheres*. Die endgiltige, transcendente Lösung ergiebt sich erst im Abschnitt 12.

** Gordan, a. a. O. S. 382, Nr. 22 und 23 und S. 390, Nr. 38.

Diese Form ist es nun, welche Schwarz und Klein als „Ikosaeder" bezeichnen, weil sie, gleich Null gesetzt, zwölf Wurzelwerthe liefert, die auf der Kugel die Ecken eines Ikosaeders bestimmen.*

Durch Eintragung der $\mu$ in die zweite Gleichung des Systems 51) findet man eine binäre Form 32. Grades, welche jedoch in die vorige Form $f$ und eine neue Form 20. Grades zerfällt. Da nun das Product jener Formen nach Nr. 52 mit $-\beta = fH$ übereinstimmen muss, so ist erwähnte Form 20. Grades genau das, was wir mit $H$ bezeichnen. Die Rechnung ergiebt:

$$58)\qquad H = -(\lambda_1^{20} + \lambda_2^{20}) + 228\,\lambda_1^5\lambda_2^5(\lambda_1^{10} - \lambda_2^{10}) - 494\,\lambda_1^{10}\lambda_2^{10}.$$

Wollte man endlich auch die dritte Gleichung des Systems 51) herbeiziehen, so erscheint selbstverständlich:

$$\gamma = H^2,$$

weil die Bedingung $P = 0$ von vornherein erfüllt worden ist.

Das Endergebniss der Untersuchung ist nun folgendes:

Die Resolvente der $W$:

$$38)\qquad W^5 + 40f^2W^2 - 5fHW + H^2 = 0$$

wird befriedigt durch:

$$59)\qquad \begin{cases} W_\nu = -\varepsilon^{4\nu}\lambda_1^8 + \lambda^{3\nu}\lambda_1^7\lambda_2 - 7\varepsilon^{2\nu}\lambda_1^6\lambda_2^2 - 7\varepsilon^\nu\lambda_1^5\lambda_2^3 \\ \quad + 7\varepsilon^{4\nu}\lambda_1^3\lambda_2^5 - 7\varepsilon^{3\nu}\lambda_1^2\lambda_2^6 - \varepsilon^{2\nu}\lambda_1\lambda_2^7 - \varepsilon^\nu\lambda_2^8, \end{cases}$$

wobei die Veränderlichen $\lambda_1$ und $\lambda_2$ durch die Gleichungen:

$$57)\qquad f(\lambda_1, \lambda_2) = f$$

und

$$58)\qquad H(\lambda_1, \lambda_2) = H$$

bestimmt sind.**

## 9. Auflösung der Resolventen der $t$ und $\eta$.

Zwischen der Unbekannten $t$ der Resolvente:

$$1)\qquad t^5 - 10ft^3 + 45f^2t - T = 0$$

und dem soeben ermittelten $W$ besteht nach Abschnitt 6 der Zusammenhang:

$$40\text{a})\qquad t^2 - 3f = H : W.$$

Trägt man hier die vorberechneten Werthe von $f$, $H$, $W_\nu$ ein, so ergiebt sich nach Ausziehung der Quadratwurzel:

---

* Schwarz, Journal f. d. r. u. a. M. 75. Bd., oder auch: Gesammelte mathem. Abhandlungen 2. Bd. S. 253.

** Gordan, a. a. O. S. 391, Nr. 3. — Klein, Ikosaeder S. 104, Nr. 25.

60) $t_\nu = \varepsilon^{3\nu}\lambda_1^6 + 2\varepsilon^{2\nu}\lambda_1^5\lambda_2 - 5\varepsilon^{\nu}\lambda_1^4\lambda_2^2 - 5\varepsilon^{4\nu}\lambda_1^2\lambda_2^4 - 2\varepsilon^{3\nu}\lambda_1\lambda_2^5 + \varepsilon^{2\nu}\lambda_2^6,$

und dieses ist die Lösung der Brioschi'schen Resolvente in Gordan-Klein'scher Bezeichnungsweise. Bemerkt sei, dass man bei solchen Rechnungen wie der letzten kurz mit den Ausdrücken $t_0$ und $W_0$, in denen also $\varepsilon$ gar nicht vorkommt, operiren kann. Zuletzt vertausche man

$$\lambda_1 \text{ mit } \pm \varepsilon^{3\nu}\lambda_1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 \text{ mit } \pm \varepsilon^{2\nu}\lambda_2,$$

dann bleiben die Formen $f$, $H$, $T$ ungeändert, während $t_0$ und $W_0$ wieder in die allgemeinen Ausdrücke $t_\nu$ und $W_\nu$ übergehen.

Für die Resolvente der $\eta$, welche nach Abschnitt 2 folgendermassen lautete:

5) $$h\eta^5 + 20\eta^2 + 5k\eta + 1 = 0,$$

wobei:

6) $$h = 24k - \frac{T}{\sqrt{f^5}}, \quad \left.\begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{3}$$

hatten wir gefunden:

4) $$\eta_\nu = \frac{\sqrt{f}}{t_\nu - k\sqrt{f}},$$

und das lässt sich wegen Nr. 40 auch schreiben:

61) $$\eta_\nu = \frac{(t_\nu\sqrt{f} + fk)W_\nu}{H}.$$

Dem $k_1$ und $k_2$ entsprechend sind mithin $\eta_1$ und $\eta_2$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

62) $$H\eta_\nu^2 - 2t_\nu W_\nu\sqrt{f}\eta_\nu + fW_\nu = 0,$$

und $h_1$, $h_2$ die Wurzeln von:

63) $$f^5h^2 + 2T\sqrt{f^5}h - H^3 = 0;$$

vergl. Nr. 7 und 10.

Die Lösung der Hauptgleichung 16) wird demgemäss mit Rücksicht auf Nr. 31:

64) $$y_\nu = \frac{(t_\nu\sqrt{rf} + sf)W_\nu}{H}.$$

Endlich wollen wir die in obigen Resolventen auftretende Grösse $T$ durch die $\lambda$ ausdrücken. Im Abschnitt 6 war gefunden:

41) $$T^2 = 1728f^5 - H^3,$$

und die rechte Seite dieser Beziehung erweist sich nach Einführung von $f$ und $H$ aus Nr. 57 und 58 als das Quadrat einer Form 30. Grades; man findet:

65) $$T = (\lambda_1^{30} + \lambda_2^{30}) + 522\lambda_1^5\lambda_2^5(\lambda_1^{20} - \lambda_2^{20}) - 10005\lambda_1^{10}\lambda_2^{10}(\lambda_1^{10} + \lambda_2^{10}).$$

Hiermit haben wir die für die Theorie der Gleichungen fünften Grades *wichtigsten* Formen als $f$, $H$, $T$, $t$, $W$ gefunden. Die Form sechsten

Grades für $t$ und die achten Grades für $W$ repräsentiren, gleich Null gesetzt, die Ecken eines Oktaeders beziehentlich eines Würfels; die Formen $H = 0$ und $T = 0$ markiren auf der Kugel ebenfalls 20 resp. 30 ausgezeichnete Punkte, doch möge betreffs dieser geometrischen Interpretationen auf die ausführliche Darstellung des Klein'schen Buches verwiesen sein.

## 10. Rückblick.

Unserer gesammten Darstellung liegt vom Abschnitt 1 an die Brioschische Resolvente der $t$ zu Grunde, wir haben sie einfach historisch übernommen. Eben deshalb und auch mit Rücksicht darauf, dass jene Resolvente nicht zur Classe der Hauptgleichungen gehört, möchte ich jetzt noch auf eine andere Art des Ansatzes aufmerksam machen, wodurch die Resolvente der $t$ bei Seite gesetzt und unsere Darstellung aus sich selbst heraus begründet wird.

Man gehe von der Hauptgleichung

16) $$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0$$

aus und frage nach der Beschaffenheit ihrer Coefficienten, wenn die Gleichung nach einer Transformation mittelst

66) $$y - z = \varrho y z$$

wieder eine Hauptgleichung werden soll.

Nun findet man, dass die Coefficienten von $z^4$ und $z^3$ in der transformirten Gleichung verschwinden, wenn:

67) $$\begin{cases} \text{a)} & \gamma\varrho^2 - 4\beta\varrho + 3\alpha = 0, \\ \text{b)} & 2\gamma\varrho^2 - 6\beta\varrho + 3\alpha = 0, \end{cases}$$

und diese Bedingungen können nur gleichzeitig bestehen, wenn:

68) $$3\alpha\gamma - 4\beta^2 = 0,$$

dann wird:

69) $$\varrho = \frac{3\alpha}{2\beta} = \frac{2\beta}{\gamma}.$$

Die Bedingung 68) charakterisirt aber gerade unsere Resolvente der $\eta$, nämlich:

5) $$h\eta^5 + 20\eta^2 + 6k\eta + 1 = 0,$$

denn für diese ist:

$$\alpha = 4h^{-1}, \quad \beta = kh^{-1}, \quad \gamma = h^{-1},$$

das heisst:

$$3\alpha\gamma - 4\beta^2 = 4h^{-2}(3 - k^2),$$

eine Grösse, welche verschwindet, wenn $k = \pm\sqrt{3}$ gewählt wird. Für $\varrho$ ergiebt sich dementsprechend:

70) $$\varrho = 2k,$$

und wir sehen, dass die $y$ und $z$ der specialisirten Hauptgleichung genau mit unseren Grössen $\eta_1$ und $\eta_2$ zusammenfallen; es ist wie früher:

$$11)\qquad \eta_1 - \eta_2 = 2k\eta_1\eta_2,$$

wo eine Vertauschung der $\eta$ unter sich einem Zeichenwechsel des $k$ entspricht.

Jetzt bliebe noch die Substitution unter Nr. 66 resp. Nr. 11 zu motiviren. Nun, diese Substitution ist die denkbar einfachste, welche das Verschwinden von $\sum_\nu \eta_1 . \eta_2$ anzeigt, wenn einzeln $\sum_\nu \eta_1$ und $\sum_\nu \eta_2$ verschwinden, und darauf kommt in der Folge viel an. Denn da unsere Resolventen der $\eta_1$ und $\eta_2$ so bestimmt wurden, dass auch:

$$\sum_\nu \eta_1^2 = 0 \quad \text{und} \quad \sum_\nu \eta_2^2 = 0,$$

so genügt, wie schon früher erwähnt, eine lineare Verbindung

$$17)\qquad y = p\eta_1 + q\eta_2$$

mit disponiblen Coefficienten wieder einer völlig allgemeinen Hauptgleichung 16).

Unter den Sonderfällen sind ausser den beiden $q = 0$ und $p = 0$ noch die anderen $p + q = 0$ und $p - q = 0$ von Wichtigkeit; das sind, wie wir sahen, die Gordan-Klein'schen Resolventen.

Die Brioschi'sche Resolvente der $t$ lässt sich, wenn gewünscht wird, nachträglich dadurch ableiten, dass man die Substitution 11) in:

$$71)\qquad \frac{1 + k\eta_1}{\eta_1} = \frac{1 - k\eta_2}{\eta_2} = \varkappa t$$

spaltet, wo $\varkappa$ ein Proportionalitätsfactor ist und hieraus den Werth von $\eta_1$ oder $\eta_2$ in Resolvente 5) einträgt. Das so geschilderte Verfahren kann in gewissem Sinn auch auf Hauptgleichungen höherer Grade übertragen werden.

Bei den Gleichungen vom fünften Grade erweist sich nun der Fall:

$$p + q = 0,$$

das heisst:

$$\alpha\gamma - 8\beta^2 = 0,$$

als ein besonders einfacher; die durch ihn bestimmte Resolvente für $\eta_1 - \eta_2$ ist die Resolvente der $W$ und führt unmittelbar zum Ikosaeder hin. Nachdem $\eta_1 - \eta_2$ gefunden ist, ergeben sich unter Berücksichtigung von Nr. 11 die Werthe $\eta_1$ und $\eta_2$, ein jeder für sich, und damit sind alle oben genannten Resolventen, sowie die ursprüngliche Hauptgleichung, aufgelöst.

### 11. Historische Bemerkungen.

Bisher bewegte sich unsere Untersuchung auf ganz elementarem und algebraischem Gebiet, aber auf diesem allein kann die Auflösung der *Gleichungen* fünften Grades nicht vollzogen werden.

Nachdem Abel die Unmöglichkeit der Auflösung durch Wurzelzeichen streng erwiesen hatte, konnte man mit um so grösserer Sicherheit eine Lösung des Problems mittelst höherer Transcendenten erhoffen, und in der That stiess auch gerade in jener Zeit Jacobi bei seinen Forschungen im Gebiete der elliptischen Functionen auf eine merkwürdige Classe algebraischer Gleichungen, die Modular- und Multiplicatorgleichungen, welche eben durch genannte Transcendenten lösbar sind.

Unter den Jacobi'schen Gleichungen befinden sich etliche sechsten Grades, die unter sich innig zusammenhängen und für welche durch die Untersuchungen von Galois sichergestellt war, dass sich ihr Grad um eine Einheit erniedrigen lässt, genauer gesprochen, dass sie eine Resolvente fünften Grades besitzen müssen. Hermite hat zuerst die Brücke zwischen diesen Einzelheiten geschlagen, indem er zeigte, dass die Bring-Jerrard-sche Form:

$$y^5 + 5\beta y + \gamma = 0$$

direct von der Jacobi'schen Modulargleichung sechsten Grades abhängig gemacht werden kann.

Indessen hatte schon Jacobi darüber Angaben gemacht, wie seine Gleichungen mit einer grösseren Anzahl von Parametern ausgestattet werden könnten, und dies wurde für Brioschi und Kronecker der Ausgangspunkt einer Reihe schwieriger aber höchst erfolgreicher Untersuchungen. Es gelang diesen Forschern die Form:

$$y^5 + 5\alpha y^3 + 5\beta y + \gamma = 0$$

in Verbindung mit den allgemeineren Jacobi'schen Gleichungen zu setzen und so direct durch elliptische Modulfunctionen zu lösen.

Nach diesem hatte Fuchs seine fundamentalen Untersuchungen über die linearen Differentialgleichungen begonnen, während Schwarz sich specieller mit der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe beschäftigte und sie auf ihre algebraische Integrirbarkeit hin prüfte. Beinahe gleichzeitig tritt Klein mit seinen Arbeiten hervor und stellt sich das Programm, „solche geometrische oder analytische Gebilde in Betracht zu ziehen, welche durch Gruppen von Aenderungen in sich selbst transformirt werden“. Unter diesem Gesichtspunkte entwickelte er die moderne Theorie des Ikosaeders, in welcher fast Alles, was das Wesen der bis jetzt bekannten Auflösungen einer Gleichung fünften Grades ausmacht, ebenso bewunderungswürdig als natürlich verbunden erscheint. Inzwischen entstand auch die schon oft genannte ausgezeichnete Gordan'sche Arbeit, in welcher unter ganz neuen und zwar invariantentheoretischen Gesichtspunkten die Gleichung

$$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0$$

auf die Ikosaedergleichung zurückgeführt wird. Gordan giebt eine definitive Schlusslösung durch Hermite'sche Formeln an, während Klein und Kiepert in ihren parallel laufenden Untersuchungen die bequemeren Weierstrass'schen Ausdrücke benutzen.

Ich habe diese historischen Notizen eingeschaltet, weil für unsere eigene Darstellung ein Wendepunkt eingetreten ist. Wir müssen uns entscheiden, ob wir die Auflösung der Gleichung fünften Grades, welche also auf die Bestimmung der $\lambda$ hinauskommt, durch elliptische Modulfunctionen oder durch hypergeometrische Reihen bewerkstelligen wollen. Es ist das Eine so fundamental wie das Andere, aber die Einführung von Modulfunctionen wird umständlich, wenn man an der Forderung einer rein analytischen Darstellung festhält. Anders, wenn man die geometrische Anschauung heranzieht, dann wird das Ikosaeder ganz von selbst eine Quelle für jene doppeltperiodischen Functionen.

So wollen wir also den anderen Weg gehen und zeigen, dass die $\lambda_1$ und $\lambda_2$ particuläre Integrale der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe sind. Eben deswegen haben wir auch die Jacobi'schen Gleichungen bei Seite gelassen.

(Fortsetzung folgt.)

# Kleinere Mittheilungen.

## IX. Independente Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch Determinanten.

Für die unabhängige Darstellung der Bernoulli'schen und Euler-schen Zahlen existiren Formeln der mannigfachsten Art. Diese, sowie die Methoden, durch welche sie erhalten worden sind, hat Herr Saalschütz in dem zweiten Abschnitte seiner „Vorlesungen über die Bernoulli'schen Zahlen" (Berlin, Springer, 1893) in, wie es mir scheint, vollständiger Weise zusammengestellt. In einer kürzlich veröffentlichten Arbeit* habe ich gezeigt, wie sich mit Benutzung von $2q^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln (wo $q$ eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet) Recursionsformeln für die Bernoulli-schen und Euler'schen Zahlen aufstellen lassen, in welchen beliebig viele der, der gesuchten Zahl vorangehenden, Zahlen fehlen. Alle diese beliebig stark verkürzten Recursionsformeln lieferten als specielle Fälle neue independente Darstellungen der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.

Jede Bernoulli'sche oder Euler'sche Zahl lässt sich aber auch sehr leicht und in übersichtlichster Form durch eine Determinante, deren Elemente einfachen Gesetzen folgen, independent darstellen. Durch fortgesetzte Zerlegung der Determinante in Subdeterminanten von immer niedrigerem Grade und durch wiederholte Anwendung der für die Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen gefundenen independenten Formeln gelangt man zu der Mehrzahl nach bekannten Recursionsformeln dieser Zahlen. So naheliegend diese Darstellungsart auch ist, so habe ich sie in der mir hier zugänglichen Literatur nicht finden können; da sie wohl nicht ohne Interesse ist und mir die einfachste zu sein scheint, so erlaube ich mir dieselbe hier mitzutheilen.

Die erwähnten independenten Darstellungen der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen gewinnt man mit Hilfe des Mac-Laurin'schen Lehrsatzes. Das Verfahren ist im Principe dasselbe, wie das von den Herren Scherk und Schlömilch** benutzte; es unterscheidet sich aber

* Haussner, Zur Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen. Nachrichten v. d. K. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen, Jahrgang 1893, S. 777.

** Scherk, Mathematische Abhandlungen (Berlin 1825). Erste Abhandlung. Schlömilch, Neue Formeln zur independenten Bestimmung der Secanten- und Tangentencoefficienten. Grunert's Archiv, Bd. 16. (1850) S. 411. Vergleiche auch Saalschütz a. a. O. S. 66.

von diesem durch die Art der Berechnung der höheren Differentialquotienten der Functionen, welche den Entwicklungen zu Grunde gelegt sind.

Es seien $f(x)$, $u(x)$, $v(x)$ drei beliebig oft differentiirbare Functionen von $x$, welche durch die Gleichung:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

mit einander verknüpft sind. Dann lässt sich bekanntlich der nach $x$ genommene $\nu^{\text{te}}$ Differentialquotient von $f$ ($\nu$ irgend eine positive ganze Zahl) als Determinante $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Grades folgendermassen schreiben:

$$\text{A)}\quad f^{(\nu)}(x) = \frac{1}{v^{\nu+1}} \begin{vmatrix} v & 0 & 0 & \cdot\ \cdot & 0 & u \\ v' & v & 0 & \cdot\ \cdot & 0 & u' \\ v'' & \binom{2}{1}v' & v & \cdot\ \cdot & 0 & u'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ v^{(\nu-1)} & \binom{\nu-1}{1}v^{(\nu-2)} & \binom{\nu-1}{2}v^{(\nu-3)} & \cdot\ \cdot & v & u^{(\nu-1)} \\ v^{(\nu)} & \binom{\nu}{1}v^{(\nu-1)} & \binom{\nu}{2}v^{(\nu-2)} & \cdot\ \cdot & \binom{\nu}{\nu-1}v' & u^{(\nu)} \end{vmatrix},$$

wo $\binom{h}{g}$ den $g^{\text{ten}}$ Binomialcoefficienten von $h$, die obere Marke an $f$, $u$, $v$ die Ordnung des nach $x$ genommenen Differentialquotienten der betreffenden Function bezeichnet und wo bei den Elementen der Determinante das Argument $x$ fortgelassen ist. Die Gleichung A) liefert nun die unabhängige Darstellung der höheren Differentialquotienten von $f(x)$, wenn alle Differentialquotienten von $u(x)$ und $v(x)$ independent angegeben werden können. Dies ist z. B. möglich, wenn für $f(x)$ eine der Functionen $tg\,x$, $sec\,x$, $tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$, $\frac{e^x-1}{e^x+1}$, $\frac{2e^x}{e^{2x}+1}$ gesetzt wird.

Bezeichnet nun $\beta_m$ den $m^{\text{ten}}$ Tangentencoefficienten, welcher mit der $m^{\text{ten}}$ Bernoulli'schen Zahl durch die Beziehung

$$\beta_m = \frac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{2m} B_m$$

verbunden ist, $\sigma_m$ die $m^{\text{te}}$ Euler'sche Zahl ($\sigma_0 = 1$) und ist $\gamma_{2m-1} = \beta_m$, $\gamma_{2m} = \sigma_m$, so gelten für die oben genannten fünf Functionen die folgenden Entwicklungen:

$$\text{1)}\quad tg\,x = \sum_{m=1}^{m=\infty} \beta_m \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}, \qquad \text{3)}\quad \frac{e^x-1}{e^x+1} = \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^{m-1} \frac{\beta_m}{2^{2m-1}} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

$$\text{2)}\quad sec\,x = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sigma_m \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \qquad \text{4)}\quad \frac{2e^x}{e^{2x}+1} = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \sigma_m \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

$$\text{5)}\quad tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \gamma_m \frac{(2x)^m}{m!}.$$

Entwickelt man andererseits die Functionen 1) bis 4) nach dem Mac-Laurin'schen Lehrsatze:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0),$$

die Function 5) nach dem Taylor'schen Satze:

$$f\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

und vergleicht man dann in den beiden Reihenentwicklungen, welche man so für jede der fünf Functionen erhalten hat, die Coefficienten gleich hoher Potenzen von $x$ mit einander, so erhält man die Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch die Differentialquotienten dieser Functionen, also nach dem oben Bemerkten independent durch Determinanten dargestellt.

Nimmt man zunächst $f(x) = tg\,x$, so folgen die beiden Gleichungen:

$$\beta_m = f^{(2m-1)}(0), \quad 0 = f^{(2m)}(0).$$

Um die auf den rechten Seiten stehenden Differentialquotienten zu berechnen, hat man in der Gleichung A) für $u^{(\nu)}$ und $v^{(\nu)}$ die folgenden Werthe einzusetzen:

$$u^{(2\nu-1)}(0) = (-1)^{\nu-1}, \quad u^{(2\nu)}(0) = 0,$$
$$v^{(2\nu-1)}(0) = 0, \quad v^{(2\nu)}(0) = (-1)^{\nu}.$$

Dadurch erhält man $\beta_m$ independent durch eine Determinante $2m^{\text{ten}}$ Grades dargestellt, welche sich aber leicht auf eine Determinante $m^{\text{ten}}$ Grades reduciren lässt. Man erhält schliesslich für $\beta_m$ die folgende unabhängige Darstellung:

$$\text{I)} \quad \beta_m = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \\ \binom{3}{1} & 1 & 0 & . & . & 0 & 1 \\ \binom{5}{1} & \binom{5}{3} & 1 & . & . & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \binom{2m-3}{1} & \binom{2m-3}{3} & \binom{2m-3}{5} & . & . & 1 & 1 \\ \binom{2m-1}{1} & \binom{2m-1}{3} & \binom{2m-1}{5} & . & . & \binom{2m-1}{2m-3} & 1 \end{vmatrix}.$$

Man zerlege nun diese Determinante nach den Elementen der vorletzten Colonne in die Summe zweier Subdeterminanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades und beachte, dass die eine dieser Subdeterminanten, abgesehen vom Vorzeichen, gleich $\beta_{m-1}$ ist; die andere Subdeterminante zerlege man wieder nach den Elementen der vorletzten Colonne in die Summe zweier Subdeterminanten $(m-2)^{\text{ten}}$ Grades, deren eine, abgesehen vom Vorzeichen, gleich $\beta_{m-2}$ ist. Die andere Determinante zerlege man wieder in de

angegebenen Weise und setze dieses Verfahren fort, bis der Grad der Determinante gleich 1 geworden ist. Dann erhält man schliesslich durch diese wiederholte Anwendung der independenten Formel I) die bekannte Recursionsformel:

$$\text{Ia)}\qquad \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m}(-1)^{\varrho}\binom{2m-1}{2\varrho-1}\beta_{\varrho}-1=0.$$

Für $f(x)=\sec x$ ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$0=f^{(2m-1)}(0),\quad \sigma_m=f^{(2m)}(0).$$

Hier haben die Differentialquotienten von $u(x)$ und $v(x)$ für $x=0$ die Werthe:

$$u=1,\ u'=u''=\ldots=u^{(\nu)}=\ldots=0,$$
$$v^{(2\nu-1)}(0)=(-1)^{\nu},\quad v^{(2\nu)}(0)=0.$$

Die $\sigma_m$ independent darstellende Determinante $2m^{\text{ten}}$ Grades lässt sich wieder auf eine solche $m^{\text{ten}}$ Grades reduciren, und man erhält:

$$\text{II)}\qquad \sigma_m=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0\\ 1 & \binom{4}{2} & 1 & . & . & 0 & 0\\ 1 & \binom{6}{2} & \binom{6}{4} & . & . & 0 & 0\\ . & . & . & . & . & . & .\\ 1 & \binom{2\nu-2}{2} & \binom{2\nu-2}{4} & . & . & \binom{2\nu-2}{2\nu-4} & 1\\ 1 & \binom{2\nu}{2} & \binom{2\nu}{4} & . & . & \binom{2\nu}{2\nu-4} & \binom{2\nu}{2\nu-2}\end{vmatrix}.$$

Indem man das früher für die Determinante, welche $\beta_m$ darstellte, geschilderte Zerlegungsverfahren auf die hier auftretende Determinante mit der Modification anwendet, dass jede Determinante nach den Elementen der letzten Colonne zerlegt wird, erhält man die bekannte Recursionsformel:

$$\text{IIa)}\qquad \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m}(-1)^{m}\binom{2m}{2\varrho}\sigma_{\varrho}=0.$$

Wählt man weiter $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, so folgt:

$$\beta_m=(-1)^{m-1}2^{2m-1}f^{(2m-1)}(0),\quad 0=f^{(2m)}(0),$$

und da $u(0)=0$, $v(0)=2$ ist und sämmtliche Differentialquotienten von $u(x)$ und $v(x)$ für $x=0$ den Werth 1 haben, ergiebt sich schliesslich:

$$\text{III)}\qquad \beta_m=\frac{(-1)^{m-1}}{2}\begin{vmatrix}2 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1\\ \binom{2}{1} & 2 & 0 & . & . & 0 & 1\\ \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & 2 & . & . & 0 & 1\\ . & . & . & . & . & . & .\\ \binom{2m-2}{1} & \binom{2m-2}{2} & \binom{2m-2}{3} & . & . & 2 & 1\\ \binom{2m-1}{1} & \binom{2m-1}{2} & \binom{2m-1}{3} & . & . & \binom{2m-1}{2m-2} & 1\end{vmatrix}.$$

Unter Berücksichtigung der Nulldeterminante $f^{(2m)}(0)=0$ erhält man durch die unter I) angegebene Zerlegung und durch Einführung der **Bernoulli**'schen Zahlen an Stelle der Tangentencoefficienten die bekannte Recursionsformel:

$$\text{IIIa)}\quad (-1)^m 2(2^{2m}-1)B_m+\sum_{\varrho=1}^{\varrho=m-1}(-1)^\varrho(2^{2\varrho}-1)\binom{2m}{2\varrho}B_\varrho+m=0.$$

Durch Benutzung von $f(x)=\dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}$ erhält man:

$$0=f^{(2m-1)}(0),\quad \sigma_m=(-1)^m f^{(2m)}(0).$$

Nun ist:

$$u(0)=u'(0)=\ldots=u^{(\nu)}(0)=\ldots=2$$

$$v(0)=2,\ v'(0)=2,\ v''(0)=2^2,\ldots,\ v^{(\nu)}(0)=2^\nu,\ldots,$$

und es ergiebt sich:

$$\text{IV)}\quad \sigma_m=(-1)^m\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & . & . & 0 & 1\\ 2^3 & \binom{3}{2} & 1 & . & . & 0 & 1\\ . & . & . & . & . & . & .\\ 2^{2\varrho-2} & \binom{2\varrho-1}{2}2^{2\varrho-4} & \binom{2\varrho-1}{3}2^{2\varrho-5} & . & . & 1 & 1\\ 2^{2\varrho-1} & \binom{2\varrho}{2}2^{2\varrho-3} & \binom{2\varrho}{3}2^{2\varrho-4} & . & . & \binom{2\varrho}{2\varrho-1} & 1\end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung der Nulldeterminante $f^{(2m-1)}(0)=0$ durch Zerlegung der Determinante nach den Elementen der vorletzten Colonne die Recursionsformel:

$$\text{IVa)}\quad (-1)^m\sigma_m+\sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1}(-1)^\varrho\binom{2m}{2\varrho}2^{2m-2\varrho-1}\sigma_\varrho-1=0,$$

welche ich in der mir zugänglichen Literatur nicht habe auffinden können.

Schliesslich ergeben sich für $f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ unter Benutzung der Reihenentwicklung 5) und der Entwicklung von $f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ nach dem **Taylor**'schen Satze die Gleichungen:

$$\text{V)}\quad \beta_m=2^{-2m+1}f^{(2m-1)}\left(\frac{\pi}{4}\right),\quad \sigma_m=2^{-2m}f^{(2m)}\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Beachtet man, dass

$$u^{(2\nu-1)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^{\nu-1}\frac{1}{2}\sqrt{2},\qquad u^{(2\nu)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^\nu\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$v^{(2\nu-1)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^\nu\frac{1}{2}\sqrt{2},\qquad v^{(2\nu)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^\nu\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

ist, und setzt man abkürzend:

$$\sqrt{2}\,u^{(\nu)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=a^{(\nu)},\qquad \sqrt{2}\,v^{(\nu)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=b^{(\nu)},$$

so ist hier $f^{(\nu)}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ definirt durch die Determinante:

$$
\text{V}')\quad f^{(\nu)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \\ b' & 1 & 0 & . & . & 0 & a' \\ b'' & \binom{2}{1}b' & 1 & . & . & 0 & a'' \\ . & . & . & . & . & . & . \\ b^{(\nu-1)} & \binom{\nu-1}{1}b^{(\nu-2)} & \binom{\nu-1}{2}b^{(\nu-3)} & . & . & 1 & a^{(\nu-1)} \\ b^{(\nu)} & \binom{\nu}{1}b^{(\nu-1)} & \binom{\nu}{2}b^{(\nu-2)} & . & . & \binom{\nu}{\nu-1}b' & a^{(\nu)} \end{vmatrix}.
$$

Durch Zerlegung der Determinante $f^{(\nu)}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ in der früher geschilderten Weise und wiederholte Anwendung der Formeln V) gelangt man, je nachdem man von der zweiten oder der ersten der Gleichungen V) ausgeht, zu den bekannten Recursionsformeln*:

$$
\text{Va})\quad \begin{cases} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m}(-1)^{\varrho}2^{2\varrho}\left\{\binom{2m}{2\varrho}\sigma_{\varrho} - \binom{2m}{2\varrho-1}\frac{\beta_{\varrho}}{2}\right\} = 0, \\ (-1)^{m}2^{2m-2}\beta_{m} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m-1}(-1)^{\varrho}2^{2\varrho-1}\left\{\binom{2m-1}{2\varrho}\sigma_{\varrho} + \binom{2m-1}{2\varrho-1}\frac{\beta_{\varrho}}{2}\right\} + 1 = 0. \end{cases}
$$

Die independenten Darstellungen I) und II) sind die einfachsten, da bei ihnen die Determinante nur vom $m^{\text{ten}}$ Grade ist, während sie bei den anderen nur auf eine solche des $(2m-1)^{\text{ten}}$ resp. $(2m)^{\text{ten}}$ Grades reducirt werden kann.

Naumburg a. S., im März 1894.

ROBERT HAUSSNER.
(Würzburg.)

---

### X. Ueber die gleitende und rollende Reibung bei der Fallmaschine.

Ist $p$ das Gewicht der Hauptrolle (62 Gramm) mit Einrechnung der beiden mittelst der gewichtlos gedachten Schnur aufgelegten je 50 Gramm betragenden Gewichte, also bei vorliegendem Apparate:

$$p = 162,$$

und $\varphi$ der Coefficient der Zapfenreibung, so ist, wenn $q$ das kleine Uebergewicht heisst, welches am Umfang $2\pi R$ der Rolle gerade hinreicht, diese Reibung zu überwinden,

$$q.R = p\varphi.r. \qquad (r \text{ der Zapfenradius.})$$

---

* Die Recursionsformeln Ia), IIa), IIIa) und Va) sind identisch mit den *Formeln XIV, XIII*, VI, XIXa, XIXb der „Vorlesungen über die Bernoulli'schen *Zahlen*" *von* Saalschütz.

Liegt aber die Hauptrolle, das ist deren Welle vom Umfange $2r\pi$, auf vier Frictionsrollen vom Umfange $2r_1\pi$ und Zapfenradien $r_2$, so ist das entsprechende Uebergewicht $q'$ aus der Gleichung zu entnehmen:

$$\left[p\varphi' + (p + p')\varphi\frac{r_2}{r_1}\right]r = q'R,$$

worin $\varphi'$ der Coefficient der rollenden Reibung ist mit Einrechnung des Divisors $sin\frac{\alpha}{2}$. Der Winkel $\alpha$ ist von den beiden Tangenten an den Umfängen $2r_1\pi$ gebildet, wo dieselben von $2r\pi$ berührt werden; diese Achse vom Umfange $2r\pi$ läuft ja in der Keilnut, welche von beiden Frictionsrollenpaaren gebildet wird. Das Gewicht dieser beiden Paare beträgt am vorliegenden Apparate

$$p' = 120 \text{ Gramm.}$$

Der Leitfaden von Beetz-Henrici setzt $\varphi'$ und $p'$ stillschweigend gleich Null. Dass diese Annahme hinsichtlich $p'$ unzulässig, leuchtet also sogleich ein. Es ist dieser Fehler noch viel bedeutender als derjenige, dass man, wie auch in vielen anderen Büchern geschieht, bei der Formel für die durch ein grösseres Uebergewicht (als oben $q$) hervorgebrachte Beschleunigung das Gewicht der Fadenrolle als Null betrachtet.

Ob aber der Betrag der rollenden Reibung, in der dritten Gleichung $p\varphi'$, gegen denjenigen der Zapfenreibung $(p + p')\varphi\frac{r_2}{r_1}$ klein genug ist, dass man ersteren vernachlässigen kann gegen den letzteren, das lässt sich wegen der schwierigen Bestimmung der beiden Coefficienten $\varphi'$ und $\varphi$ schwer entscheiden. Von vornherein ist es zu bezweifeln, da das Verhältniss $r_2 : r_1$ die Zapfenreibung sehr herabdrückt.

Aus den Messungen der Durchmesser ergiebt sich:

$$R = 42, \quad r = 1{,}5, \quad r_1 = 45, \quad r_2 = 1 \text{ Millimeter.}$$

Wir haben also die Beträge der Reibung:

| (rollend) | (gleitend) |
|---|---|
| $162.\varphi'$, | $\frac{282}{45}\varphi$ Gramme. |

Diese Beträge sind gemäss der dritten Gleichung zu vergleichen mit:

$$\frac{1}{10}\cdot\frac{42}{1{,}5} \text{ oder } 2{,}8,$$

da 0,1 Gramm, auf eines der 50 Grammstücke gelegt, Bewegung einzuleiten schien ($q' = 0{,}1$). Es sind nämlich die beiden 50 Grammstücke selbst nicht genau gleich schwer; auf das eine 0,1 gelegt, war noch Ruhe, auf das andere aber wirkte 0,1 bewegend ein.

Setzt man nun $\frac{282}{45}\varphi$ oder $6{,}3\,\varphi = 2{,}8$ unter der erwähnten Voraussetzung, als ob die rollende Reibung $162\,\varphi'$ gegen $6{,}3\,\varphi$ verschwindend wäre, so ergiebt sich $\varphi = \frac{2{,}8}{6{,}3} = 0{,}45$, was augenscheinlich viel zu hoch ist.

Macht man die entgegengesetzte Annahme, dass die gleitende Reibung gegenüber der rollenden verschwinde, so kommt $162\,\varphi' = 2{,}8$, oder $\varphi' = 0{,}017 = \frac{1}{60}$, was viel eher mit den über rollende Reibung bekannten Verhältnissen stimmt.

Also ist von beiden Annahmen die letztere wohl zutreffender und somit der Ausspruch gewiss richtig:

„Durch die Frictionsrolle wird die Zapfenreibung der Hauptrolle in rollende verwandelt; die an den Frictionsrollen selbst noch vorhandene Zapfenreibung ist gegenüber derjenigen am Hauptrade, wenn dieses ohne Frictionsrollen sich dreht, bedeutend herabgesetzt, nämlich im Verhältniss der beiden Durchmesser der Frictionsrollen."

Mit diesem Ausspruche denke ich nämlich nicht an einen der vorangegangenen extremen Fälle, obwohl die Auswahl aus beiden auch schon zur Annahme, dass die rollende Reibung nicht vernachlässigt werden dürfe, führt, sondern ich denke an die mit obigen Ziffern hier wiederholte Gleichung:

$$162\,\varphi' + 6{,}3\,\varphi = 2{,}8,$$

in der beide Arten von Reibung neben einander bestehen. Für $\varphi = 0{,}1$ wird daraus beispielsweise $\varphi' = 0{,}014$ oder $\frac{1}{70}$, was nicht viel von dem Resultate des vorletzten Absatzes differirt.

Acht Tage später, nachdem der Apparat im kalten Zimmer gestanden, musste fast 0,2 statt 0,1 Gramm aufgewendet werden, um gleichförmige Bewegung zu erzielen.* Ich will nur annehmen 0,15, so käme:

$$162\,\varphi' + 6{,}3\,\varphi'' = 4{,}2,$$

wenn angenommen werden dürfte, dass inzwischen nur der Zapfenreibungs-Coefficient $\varphi$ sich auf den Werth $\varphi''$ erhöht hätte. Durch Abziehung der beiden letzten Gleichungen von einander wird:

$$6{,}3\,(\varphi'' - \varphi) = 1{,}4,$$

woraus $\varphi'' = 0{,}3$, wenn $\varphi = 0{,}1$. Wenn man diese Verdreifachung der Zapfenreibung bezweifelt, so muss auch eine Steigerung der rollenden Reibung ($\varphi'$) angenommen werden, etwa durch Zwischenlagerung von Staub.

* *Beim* früheren Versuche waren die Zapfen der Frictionsrollen frisch geölt, *überhaupt der* ganze Apparat frisch geputzt worden; beim späteren nicht.

Ich ziehe den Schluss der mitgetheilten Untersuchung:

1. Ich habe noch nirgends von einem derartigen messenden Versuche, wenn derselbe auch nur zu einer ungefähren Abschätzung der beiderlei Reibungsarten führt oder führen kann, gelesen.*

2. Ausser dem erwähnten Buche wurde ich bei Gelegenheit dieser Veröffentlichung auch von kollegialer Seite auswärts auf drei andere Bücher aufmerksam gemacht. Erstens auf das im Erscheinen begriffene Lehrbuch Violles, dessen erster Theil des ersten Bandes im § 90 und 185 auf obigen Gegenstand zu sprechen kommt und die rollende Reibung vernachlässigt. Ferner setzt ausdrücklich auch die 6. wie die 2. Auflage des Lehrbuchs der technischen Mechanik von Ritter als Moment der Reibung, wenn ich statt der dortigen die hiesige Bezeichnung wähle:

$$\frac{\varphi}{\sin\frac{\alpha}{2}}(p+p')r\cdot\frac{r_2}{r_1}.$$

Man sieht durch Vergleichung mit obiger dritter Gleichung, dass es heissen sollte:

$$\left[p\,\frac{\varphi'}{\sin\frac{\alpha}{2}}+(p+p')\,\varphi\cdot\frac{r_2}{r_1}\right]r,$$

und dass also dem Verfasser hierbei eine fatale Verwechslung, oder richtiger gesagt, Confundirung der beiderlei Reibungsarten passirt ist. Bei dieser Gelegenheit hebe ich auch die Gleichung 322 auf S. 333 (2. Aufl.) noch heraus für das Moment der Reibung eines sich in fester Keilnut drehenden Kreises:

$$\frac{\varphi}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot D\,.\,r,$$

wo $D$ der Druck ist. Diese Gleichung gewinnt man sofort durch Zerlegung von $D$ in die zwei gleichen Componenten $D$ durch $\sin\frac{\alpha}{2}$, welche auf den beiden Seiten der Keilnut senkrecht stehen, als streng richtige Gleichung, während Ritter vorher auf einem umständlicheren und, wie der Erfolg lehrt, nicht richtigem Wege eine andere Gleichung ableitet, aus welcher, „wenn der Reibungswinkel sehr klein ist, für praktische Zwecke hinreichend genau" die erwähnte Gleichung hervorgehen sollte.

Endlich schweigt Voigts „Elementare Mechanik" (1889), welche mir auch genannt worden war, auf S. 195—197 gänzlich von der rollenden Reibung, indem sie nur den allgemeinen Titel „Achsenreibung" aufführt.

* In mehrfacher Beziehung interessant ist der soeben in der Zeitschr. f. phys. und chem. Unt. erschienene Artikel von Volkmann über die Fallrinne S. 161 bis 166, in welcher auch der Coefficient der rollenden Reibung gemäss messenden Versuchen zu 0,004 geschätzt wird. Hierbei darf ich auch wohl meinen Apparat vom Rep. d. Phys. 1891 S. 345 in Erinnerung bringen. (Anmerk. bei der Korr.)

Augsburg. Prof. Dr. Kurz.

## XI. Notiz zu meinem Aufsatz über die thermischen Capacitäten (S. 124 u. f.) und über Kirchhoff's Vorlesungen „Theorie der Wärme".

Die von Clausius angegebenen Werthe für $c_v$ (S. 126) sind auch in den soeben erschienenen Vorlesungen Kirchhoff's (vierter und letzter Band) VII § 2 wiedergegeben worden. Der Herausgeber, Professor Planck, hat auch vor wenigen Jahren im Vereine mit Pulfrich den dritten Band des Werkes von Clausius edirt.

Gelegentlich möchte ich mein Interesse an der Sache noch damit bekunden, dass ich einige Abkürzungen der Rechnung andeute: In VI § 10 reicht die Gleichung $w^2 = \gamma . pv$ hin zur Berechnung von $\gamma$; die Berechnung von $R$ ist erst im § 11 erforderlich, wo es sich um einen dritten Weg zur Gewinnung von $\gamma$ handelt. Und hierbei kann man die numerische Einbeziehung des Factors $g = 981$ ganz ersparen, da

$$R = \frac{1033.773.g}{273}$$

und $x = 42400g$, so dass in der Gleichung

$$R = x.c_p.\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$$

das $g$ fortfällt. Letzteres kann auch in VII § 1 (am Schlusse) geschehen. In VIII ist $2\varepsilon$ der Durchmesser.

Augsburg. Prof. Dr. Kurz.

---

## XII. Bemerkung zu dem Artikel „Ein stereometrisches Analogon zum Pythagoreischen Satz."

(Band 38 Seite 383 und Band 39 Seite 64.)

Der von Herrn Dr. Beau mitgetheilte Satz findet sich in „Carnot, De la Corrélation des figures de géométrie" (Paris 1801) S. 170 Nr. 230 in der Fassung:

> „Dans toute pyramide triangulaire dont les trois faces sont perpendiculaires entre elles, le quarré de la quatrième face est égale à la somme des quarrés des trois premières",

und zwar als Beispiel für die Anwendung des allgemeinen Satzes über Polyeder mit den Seitenflächen $a, b, c, \ldots$

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + \cdots - 2(bc.\cos b, c + bd.\cos b, d + \cdots),$$

der im gleichen Werke (S. 169, Nr. 227 — 229) aufgeführt ist. Die entsprechenden Sätze über ebene und windschiefe Polygone stehen S. 151 Nr. 204.

Dieselben Entwicklungen wurden von Carnot in seine „Géométrie de position" (Paris 1803) aufgenommen (S. 309—311).

*Tübingen.* K. Fink.

## IX.

# Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.

Von

Dr. W. Heymann

in Chemnitz.

Schluss des ersten Theiles.

### 12. Die Differentialresolvente des Ikosaeders.

Es seien $f$ und $H$ zwei homogene Functionen der Veränderlichen $z_1$ und $z_2$. Man setze

$$72)\qquad \begin{cases} \text{a)} & f(z_1, z_2) = c = const. \\ \text{b)} & H(z_1, z_2) = u \end{cases}$$

und frage nach jener linearen Differentialgleichung (Differentialresolvente), welcher

$$73)\qquad z = C_1 z_1 + C_2 z_2$$

genügt, unter $u$ die unabhängige Veränderliche verstanden. Von welcher Beschaffenheit $f$ und $H$ sein müssen, damit die Coefficienten der Differentialresolvente rationale Functionen von $u$ werden, ergiebt sich beiläufig.

Aus 72) folgt zunächst:

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{dz_1}{du} + \frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{dz_2}{du} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial z_1}\frac{dz_1}{du} + \frac{\partial H}{\partial z_2}\frac{dz_2}{du} = 1,$$

also:

$$74)\qquad G\frac{\partial z_1}{du} = -\frac{\partial f}{\partial z_2}, \quad G\frac{dz_2}{du} = +\frac{\partial f}{\partial z_1},$$

wobei

$$75)\qquad G = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} & \frac{\partial f}{\partial z_2} \\ \frac{\partial H}{\partial z_1} & \frac{\partial H}{\partial z_2} \end{vmatrix}$$

abermals eine gewisse homogene Function der $z_1$, $z_2$ bedeutet. Durch eine zweite Differentiation nach $u$ ergiebt sich aus 74):

$$76)\qquad G^2\frac{d^2 z_1}{du^2} = G'\frac{\partial f}{\partial z_2} - D_1, \quad G^2\frac{d^2 z_2}{du^2} = -G'\frac{\partial f}{\partial z_1} + D_2,$$

wo zur Abkürzung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} & \frac{\partial f}{\partial z_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} \end{vmatrix} = D_1, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} & \frac{\partial f}{\partial z_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} \end{vmatrix} = D_2, \quad \frac{dG}{du} = G'$$

gesetzt wurde. Es lassen sich aber die letzten beiden Determinanten auf eine einzige reduciren. Nimmt man nämlich an, dass $f$ eine ganze homogene Function $n^{\text{ten}}$ Grades sei, so bestehen nach Euler die Identitäten:

$$z_1 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} + z_2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} = (n-1)\frac{\partial f}{\partial z_1}$$

$$z_1 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} + z_2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} = (n-1)\frac{\partial f}{\partial z_2},$$

und löst man diese nach $z_1$ und $z_2$ auf, so folgt:

$$Fz_1 = (n-1)D_1, \quad Fz_2 = -(n-1)D_2,$$

unter $F$ die neue Determinante:

$$77) \qquad F = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} \end{vmatrix}$$

verstanden.

Sonach ergiebt sich durch Eintragung von $D_1$ und $D_2$ in Nr. 76) und mit Rücksicht auf Nr. 74):

$$G^2 \frac{d^2 z_1}{du^2} = -G'G\frac{dz_1}{du} - \frac{Fz_1}{n-1}$$

$$G^2 \frac{d^2 z_2}{du^2} = -G'G\frac{dz_2}{du} - \frac{Fz_2}{n-1},$$

welche Gleichungen in der gemeinsamen Form:

$$78) \qquad G^2 \frac{d^2 z}{du^2} + GG'\frac{dz}{du} + \frac{F}{n-1}z = 0$$

enthalten sind. Aber es ist noch gefordert, dass $F$ und $G^2$ rationale Functionen der Veränderlichen $u$ seien.

Setzen wir jetzt $f$ speciell als erste Ikosaederform voraus, also in obiger Bezeichnungsweise:

$$79) \qquad f = z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10})$$

und bilden die unter 75) aufgestellte Determinante, so ergiebt sich:

$$80) \quad F = 121[-(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228 z_1^5 z_2^5 (z_1^{10} - z_2^{10}) - 494 z_1^{10} z_2^{10}].$$

Ein Vergleich mit Nr. 58) im Abschnitt 8 zeigt, dass die in der Klammer auftretende Grösse genau mit der Ikosaederform $H$ zusammenfällt; es ist mithin:

$$81) \qquad F = 121 H.$$

Nun möge vorausgesetzt werden, dass die linke Seite der Gleichung 72b) eben jene Function $H(z_1, z_2)$ sei; durch die Bezeichnung ist dies übrigens alles schon von vornherein in Einklang gebracht.

Für die Determinante unter Nr. 75) ergiebt sich sodann:

82) $G = -20[(z_1^{30}+z_2^{30})+522 z_1^5 z_2^5 (z_1^{20}-z_2^{20})-10005 z_1^{10} z_2^{10}(z_1^{10}+z_2^{10})]$,

und man bemerkt, dass die Klammergrösse genau mit der im Abschnitt IX unter Nr. 65) aufgestellten Ikosaederform $T$ coincidirt; es ist:

83) $$G = -20T;$$

nur wäre zu erwähnen, dass statt der Buchstaben $\lambda_1, \lambda_2$ hier immer $z_1, z_2$ stehen. Endlich sei daran erinnert, dass zwischen $f$, $H$, $T$ die Identität

41) $$T^2 = 1728 f^5 - H^3$$

statt hat.* Der mit Invariantentheorie vertraute Leser findet in obigen Zeilen beiläufig, dass $H$ und $T$ Covarianten der Form $f$ sind; $H$ ist die Hesse'sche und $T$ die Functional-Determinante von $f$. Jene Covarianten bilden das vollständige Formensystem von $f$, alle drei Formen sind durch die dreigliedrige Relation 41) mit einander verknüpft.

Tragen wir nun die Werthe für $F$ und $G$ aus 81) und 83) in die Differentialgleichung 78) ein, so entsteht:

84) $$T^2 \frac{d^2 z}{du^2} + TT' \frac{dz}{du} + \delta H z = 0,$$

oder wegen 41) und weil $u = H$:

85) $$(1728 f^5 - H^3)\frac{d^2 z}{dH^2} - \frac{3}{2} H \frac{dz}{dH} + \delta H z = 0,$$

$$\delta = \frac{n-1}{4(n-2)^2} = \frac{11}{400}.$$

Dieses ist die Differentialresolvente des Ikosaeders. Sie ist bereits hypergeometrischer Natur und geht speciell in die Gauss'sche Gleichung über, wenn man setzt:

86) $$\frac{H^3}{1728 f^5} = J,$$

wo $J$ die neue unabhängige Veränderliche, der sogenannte Ikosaederparameter ist. Die transformirte Gleichung lautet:

87) $$J(1-J)\frac{d^2 z}{dJ^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)J]\frac{dz}{dJ} - \alpha\beta z = 0,$$

und die Elemente $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ haben die Werthe:

88) $$\alpha = \frac{n-1}{6(n-2)} = \frac{11}{60}, \quad \beta = \frac{-1}{6(n-2)} = -\frac{1}{60}, \quad \gamma = \frac{2}{3}, \quad (n = 12).$$

---

* Zufolge dieser Beziehung ist $T^2$, d. h. $G^2$, eine rationale Function von $u = H$.

Hiermit haben wir unser Ziel erreicht; die $z_1$, $z_2$, d. h. die $\lambda_1$, $\lambda_2$ erscheinen als particuläre Integrale der Gleichung 87), mithin als wohlbekannte hypergeometrische Reihen zweiter Ordnung. Herr Klein* hat alle diese Reihen, wie sie für verschiedene Werthe des Parameters $J$ erforderlich werden, angegeben und auch die zugehörigen Integrationsconstanten bestimmt.

Uebrigens sei bemerkt, dass man bei der Reihenaufstellung betreffs der Transformationstheorie von Gleichung 87) gar keine Voraussetzungen zu machen braucht, es genügt die Kenntniss einer einzigen Integralform, also etwa die der gewöhnlichen Gauss'schen Reihe:

89) $$z = F(\alpha, \beta, \gamma, J).$$

Die übrigen wesentlichen Integrale kann man durch Transformation des algebraischen Gleichungssystems:

$$f(z_1, z_2) = f, \quad H(z_1, z_2) = H, \quad T(z_1, z_2) = T$$

mittelst der einfachen Substitutionen:

$$z_1 = v\zeta_1, \quad z_2 = v\zeta_2$$

erhalten, wo $v$ derartig bestimmt werden muss, dass die rechten Seiten der vorigen Gleichungen ihre Bedeutung wechseln, also $f$ veränderlich und $H$ oder $T$ constant gedacht wird u. s. f. In jedem einzelnen Falle existirt dann ein Ansatz, ähnlich dem wie im gegenwärtigen Abschnitt, und es stellen sich Formen (höhere Ueberschiebungen) ein, die unmittelbar durch die ursprünglichen Formen $f$, $H$, $T$ ausgedrückt werden können. Auf solche Weise kommt man zu den bekannten sechs Fällen, in denen das vierte Element der Reihe die Gestalt

$$J, \quad 1-J, \quad \frac{1}{J}, \quad \frac{J-1}{J}, \quad \frac{1}{J-1}, \quad \frac{J}{J-1}$$

besitzt.

### 13. Zusammenstellung der Resultate.

Die Ergebnisse der früheren Abschnitte, soweit sie sich auf eine Hauptgleichung beziehen, lassen sich zusammenfassen wie folgt:

Einer Hauptgleichung fünften Grades:

16) $$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0$$

wird durch den Ausdruck:

64) $$y_\nu = \frac{(t_\nu\sqrt{rf} + sf)\, W_\nu}{H}$$

genügt, wo $t_\nu$ und $W_\nu$ nachstehende fünfwerthige Ausdrücke sind:

---

* Math. Annalen. XII. Bd. S. 514 u. 515. — Erwähnt sei, dass Herr Klein *in seinen in* den Math. Annalen erschienenen Arbeiten immer $12^2 H$ statt $H$ und $12\, T$ *statt* $T$ schreibt. Unsere Bezeichnung entspricht der neueren im „Ikosaeder".

$$60)\quad t_\nu = \varepsilon^{3\nu}\lambda_1^6 + 2\varepsilon^{2\nu}\lambda_1^5\lambda_2 - 5\varepsilon^\nu\lambda_1^4\lambda_2^2 - 5\varepsilon^{4\nu}\lambda_1^2\lambda_2^4 - 2\varepsilon^{3\nu}\lambda_1\lambda_2^5 + \varepsilon^{2\nu}\lambda_2^6,$$

$$59)\left\{\begin{aligned} W_\nu &= -\varepsilon^{4\nu}\lambda_1^8 + \varepsilon^{3\nu}\lambda_1^7\lambda_2 - 7\varepsilon^{2\nu}\lambda_1^6\lambda_2^2 - 7\varepsilon^\nu\lambda_1^5\lambda_2^3 \\ &\quad + 7\varepsilon^{4\nu}\lambda_1^3\lambda_2^5 - 7\varepsilon^{3\nu}\lambda_1^2\lambda_2^6 - \varepsilon^{2\nu}\lambda_1\lambda_2^7 - \varepsilon^\nu\lambda_2^8, \\ \varepsilon &= \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5};\quad \nu = 0, 1, 2, 3, 4, \end{aligned}\right.$$

während $f$ das Ikosaeder:

$$57)\qquad f = \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{10} + 11\lambda_1^5\lambda_2^5 - \lambda_2^{10})$$

und $H$ die zugehörige Form:

$$58)\quad H = -(\lambda_1^{20} + \lambda_2^{20}) + 228\lambda_1^5\lambda_2^5(\lambda_1^{10} - \lambda_2^{10}) - 494\lambda_1^{10}\lambda_2^{10}$$

repräsentirt.

Die Veränderlichen $\lambda_1$ und $\lambda_2$ sind die particulären Integrale der Differentialgleichung

$$87)\qquad J(1-J)\frac{d^2\lambda}{dJ^2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6}J\right)\frac{d\lambda}{dJ} + \frac{11}{3600}\lambda = 0,$$

also zwei hypergeometrische Reihen, deren Quotient in das unter Nr. 64) angegebene $y$ eingeht. Das vierte Element der Reihen, d. h. der Ikosaederparameter:

$$86)\qquad J = H^3 : 1728 f^5 = -h_1 h_2 : 1728$$

ist bestimmt durch

$$29)\qquad J = \frac{\beta(3r - s^2)^3}{1728\,[(\beta^2 - \alpha\gamma)r + \gamma^2]},$$

und die Grössen $r$ und $s$ werden auf Grund folgender Formeln gewonnen:

$$25)\qquad r = \frac{2\alpha^3\gamma + 11\alpha^2\beta^2 + \beta\gamma^2 - \beta\nabla}{2(\alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3)},$$

$$26)\quad \nabla^2 = 108\alpha^5\gamma - 135\alpha^4\beta^2 + 90\alpha^2\beta\gamma^2 - 320\alpha\beta^3\gamma + 256\beta^5 + \gamma^4,$$

$$27)\qquad s = \frac{\alpha r - \gamma}{\beta}.$$

Wir bemerken weiter, dass statt des Ausdrucks 64) auch der im Abschnitt 7 aufgestellte:

$$50)\qquad y_\nu = \varepsilon^{4\nu}\lambda_1\mu_1 - \varepsilon^{3\nu}\lambda_2\mu_1 + \varepsilon^{2\nu}\lambda_1\mu_2 + \varepsilon^\nu\lambda_2\mu_2,$$

die vorgelegte Hauptgleichung 16) befriedigt. Das Verhältniss der $\lambda$ folgt genau wie vorhin aus Nr. 29); derselbe Ausdruck ergiebt aber auch das Verhältniss der $\mu$ und zwar dann, wenn das Vorzeichen von $\nabla$ in dem Werthe für $r$ in das entgegengesetzte umgewandelt wird. Man überzeugt sich hiervon, wenn man zu einem bekannten Specialfall, z. B. zur Resolvente der $W_\nu$ zurückkehrt.

Es ist sehr interessant, den inneren Zusammenhang zwischen den erwähnten Auflösungsmethoden zu studiren. Gordan* geht in seiner Arbeit von der doppeltbinären Grundform:

* Math. Annalen *XIII. Bd.*

$$51\text{a})\qquad \lambda_1^3\mu_1^2\mu_2 + \lambda_1^2\lambda_2\mu_2^3 + \lambda_1\lambda_2^2\mu_1^3 - \lambda_2^3\mu_1\mu_2^2 = -\alpha$$

aus, wendet auf dieselbe die Processe der Invariantentheorie an und gelangt so zu 36 verschiedenen Formen, unter denen dann gewisse Relationen stattfinden. Auf solche Weise kommt Gordan zunächst zu den einfachsten Resolventen für $t$, $W$ und $(tW)$, endlich zur Hauptgleichung selbst.

Klein* schlägt einen umgekehrten Weg ein. Er vergleicht die unter Nr. 64) und 50) aufgestellten Lösungen und berechnet die von uns mit $r$ und $s$ bezeichneten Grössen rückwärts, d. h., er drückt sie in den $\lambda$, $\mu$ aus. Hierbei ergiebt sich, dass $r$ und $s$ proportional gewissen doppeltbinären Formen werden, eben jenen Formen, die Gordan direct aufstellt.

Endlich sei an dieser Stelle einer Untersuchung gedacht, die als speciell und aufhältlich in vorliegender Arbeit nicht aufgenommen werden konnte, die aber nicht interesselos ist. Wir meinen die Behandlung der Resolventen der $\eta$, $W$ und $(tW)$, ingleichen der trinomischen Formen:

$$y^5 + 5\beta y + \gamma = 0, \quad y^5 + 5\alpha y^2 + \gamma = 0,$$

als besondere Fälle der Hauptgleichung:

$$16)\qquad y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0,$$

in welcher dementsprechend also

$$68)\qquad 3\alpha\gamma - 4\beta^2 = 0,$$

$$36)\qquad \alpha\gamma - 8\beta^2 = 0,$$

$$43)\qquad 64\alpha^2\beta^2 - 27\alpha^3\gamma - \beta\gamma^2 = 0$$

oder

$$\alpha = 0,$$

resp. $\beta = 0$ ist.

Bestimmt man für die ersten drei Resolventen die $\lambda_1$, $\lambda_2$, so kommt man natürlich auf die früher mitgetheilten Resultate zurück. Bevorzugen wir dagegen die $\mu$, d. h. benutzen wir in der Rechnung ein $\nabla$ mit entgegengesetztem Zeichen ($+\nabla$ statt $-\nabla$), so stellen sich für den Ikosaederparameter $J$ auf Grund von Nr. 29) ziemlich complicirte Ausdrücke ein. Es sind dies im Wesentlichen jene Verbindungen, welche Klein** unter ganz anderen Gesichtspunkten in einer Arbeit „Ueber lineare Differentialgleichungen" gefunden hat, und deren Existenz schon durch die Untersuchungen von Schwarz*** festgestellt war, es erscheinen eben die mit XII, XIV und XV bezeichneten Fälle der Schwarz'schen Tabelle.

Was die anderen beiden Sonderfälle der Hauptgleichung anlangt, $\alpha = 0$ und $\beta = 0$, so bekommt man für $J$ Ausdrücke dritten und vierten Grades, die sich ebenfalls der Schwarz'schen und Brioschi'schen Tabelle†

---

* Ikosaeder II, 3. § 6 bis 9.

** Math. Annalen XII. Bd. S. 167.

*** *Schwarz*, Gesammelte mathem. Abhandlungen 2. Bd. S. 246.

† *Brioschi*, Math. Annalen XI. Bd. S. 401.

einordnen und eine Transformation zweiter respective dritter Ordnung vorstellen. Zugleich treten uns in diesen Ausdrücken jene Gleichungen dritten und vierten Grades entgegen, deren die Tschirnhaus-Bring'sche Transformation bedarf, wenn die Hauptgleichung auf eine trinomische Form zurückgeführt werden soll. (Vergl. auch Klein, Math. Annalen XII. Bd. S. 553 und XIV. Bd. S. 166.)

So kann man also mit Hilfe rein algebraischer Betrachtungen an der Gleichung fünften Grades Vorgänge studiren und Resultate reproduciren, die ursprünglich der Transformationstheorie der hypergeometrischen Functionen beziehentlich der Theorie der Differentialgleichungen angehören.

### 14. Die allgemeinen Gleichungen fünften Grades.

Die allgemeine Gleichung

$$90)\qquad x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

kann mittelst der Tschirnhaus-Transformation:

$$91)\qquad x^2 + mx + n = y$$

auf eine Hauptgleichung:

$$16)\qquad y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0$$

gebracht werden und hierbei bestimmen sich $m$ und $n$ durch*:

$$92)\ (2a^2-5b)m^2-(4a^3-13ab+15c)m+(2a^4-8a^2b+10ac+3b^2-10d)=0,$$

$$93)\qquad 5n = am - a^2 + 2b.$$

Man denke sich die Substitution 91) auf bekannte Weise umgesetzt in

$$94)\qquad x = a'y^4 + b'y^3 + c'y^2 + d'y + e'$$

und führe hier an Stelle von $y$ die Grösse $t$ ein.

Es war nach Abschnitt 5

$$y = p\eta_1 + q\eta_2 = \frac{p't + q'}{t^2 - 3f},$$

wobei $p'$ und $q'$ nur gegebene Grössen enthalten, folglich wird

$$x = \frac{U}{(t^2 - 3f)^4},$$

wobei $U$ eine gewisse ganze Function achten Grades in $t$ vorstellt, deren Coefficienten sich von selbst ergeben. Spaltet man obiges $x$ wie folgt:

$$x = \frac{U}{(t^2 - 3f)^2} \cdot \frac{1}{(t^2 - 3f)^2},$$

so kann man den ersten Factor auf die Form:

$$a''t^4 + b''t^3 + c''t^2 + d''t + e''$$

gebracht denken und dann nachstehende Partialbruchzerlegung vornehmen:

* Vergl. Kiepert a. a. O. S. 181.

$$95)\quad x = \frac{A}{(t-\sqrt{3f})^2} + \frac{B}{(t+\sqrt{3f})^2} + \frac{D}{t-\sqrt{3f}} + \frac{E}{t+\sqrt{3f}} + F,$$

d. h. aber in den $\eta_1$, $\eta_2$ ausgedrückt:

$$96)\quad x = A\eta_1^2 + B\eta_2^2 + D\eta_1 + E\eta_2 + F.$$

Zu eben diesem Resultat gelangt man auch, wenn man

$$y = p\eta_1 + q\eta_2$$

in Nr. 94) einführt und beachtet, dass die Glieder $\eta_1^4$, $\eta_1^3\eta_2, \ldots \eta_2^4$; $\eta_1^3, \ldots \eta_2^3$ einzeln sich durch einen Ausdruck zweiten Grades der $\eta_i$ darstellen lassen, in welchem das Glied $\eta_1\eta_2$ fehlt. (Vergl. Abschnitt 3.)

Da

$$\sum_\nu \eta_\nu = 0 \text{ und } \sum_\nu \eta_\nu^2 = 0,$$

so verschwindet in 96) auch $F$, falls die reducirte Gleichung:

$$97)\quad x^5 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

vorgelegt wird.

Aus dieser Darstellung, die nur schematisch zu verstehen ist, geht hervor, dass der reducirten Gleichung 97) ein Ausdruck:

$$98)\quad x = A\eta_1^2 + B\eta_2^2 + D\eta_1 + E\eta_2$$

genügt, in welcher die Grössen $A, \ldots E$ sich in bekannter Weise rational und irrational durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrücken lassen. Aber es ist wichtig zu bemerken, dass hierbei nur zwei Irrationalitäten in Frage kommen: erstens die Quadratwurzel aus der Discriminante und zweitens jene Quadratwurzel, welche durch Auflösung der quadratischen Gleichung für $m$, d. h. $5bm^2 + 15cm - (3b^2 - 10d) = 0$ in die Rechnung gezogen wird. (Vergl. Nr. 92.)

Während nun die erste Quadratwurzel immer eine rationale Function der Wurzeln der vorgelegten Gleichung, nämlich das Differenzenproduct der Wurzeln vorstellt, ist die zweite Quadratwurzel:

$$99)\quad \omega = \sqrt{\frac{12b^3 - 40bd + 45c^2}{20b^2}}$$

nicht durch jene Wurzeln rational darstellbar, also nach Kronecker eine „accessorische Irrationalität", die in keiner Weise vermieden werden kann.

Die $\eta_1$ und $\eta_2$ sind die Wurzeln zweier Resolventen, welche die gemeinsame Form:

$$5)\quad h\eta^5 + 20\eta^2 + 5k\eta + 1 = 0$$

haben, wobei

$$6)\quad h = 24k - \frac{T}{\sqrt{f^5}},$$

$T$ und $f$ bekannte Grössen und wo, dem $\eta_1$ und $\eta_2$ entsprechend, $k_1 = +\sqrt{3}$ bez. $k_2 = -\sqrt{3}$ gesetzt werden muss.

**15. Andere Darstellung der Schlusslösung.**

Symmetrischer wird die Darstellung des vorigen Abschnitts, wenn man nicht eine, sondern beide Wurzeln $m$ und $m'$ der quadratischen Gleichung 92) bei der Rechnung benutzt.

Die Tschirnhaus-Transformation 91) repräsentirt sich jetzt in der zweifachen Gestalt:

$$\left.\begin{array}{ll} 91) & x^2 + mx + n = y \\ 91') & x^2 + m'x + n' = y' \end{array}\right\},$$

unter $y$ und $y'$ die Lösungen der Hauptgleichung verstanden, falls in deren Coefficienten einmal das $m$, dann das $m'$ eingegangen ist. Die Lösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades ergiebt sich nun mit Rücksicht auf 91) und 91') aus:

$$100) \qquad (m - m')x + (n - n') = y - y'.$$

Ist die allgemeine Gleichung eine reducirte wie unter Nr. 97), so hängen $n$ und $n'$ von $m$ überhaupt nicht ab, denn es wird wegen $a = 0$, vergl. Nr. 93):

$$n = n' = \frac{2}{5}b, \text{ d. h. } n - n' = 0;$$

ausserdem ist

$$m - m' = 2\omega$$

und sonach

$$101) \qquad 2\omega x = y - y'.$$

Erinnern wir uns der Form der Wurzeln einer Hauptgleichung, so können wir folgendes Resultat aussprechen: Die Wurzeln von

$$97) \qquad x^5 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

sind dargestellt durch:

$$102) \qquad x = p\eta_1 + q\eta_2 + p'\eta_1' + q'\eta_2',$$

wobei die $p, \ldots q'$ von derselben Beschaffenheit sind, wie die $A, \ldots E$ in Nr. 98), und die vier $\eta$ die Lösungen von vier Resolventen bedeuten, die allesammt dieselbe Grundform:

$$5) \qquad h\eta^5 + 20\eta^2 + 5k\eta + 1 = 0$$

besitzen. Hier ist $h$ respective $h'$ eine bekannte Grösse und $k = \pm\sqrt{3}$.

Löst man die Hauptgleichung dagegen mittelst des Ansatzes

$$50) \qquad y_\nu = \varepsilon^{4\nu}\lambda_1\mu_1 - \varepsilon^{3\nu}\lambda_2\mu_1 + \varepsilon^{2\nu}\lambda_1\mu_2 + \varepsilon^{\nu}\lambda_2\mu_2$$

auf, so ergiebt sich für die allgemeinere Gleichung fünften Grades unter Nr. 97) nachstehende Lösung:

$$103) \; 2\omega x_\nu = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2' \\ \mu_2' & \mu_1 \end{vmatrix} . \varepsilon^{4\nu} - \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1' \\ -\mu_2' & \mu_1 \end{vmatrix} . \varepsilon^{3\nu} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2' \\ -\mu_1' & \mu_2 \end{vmatrix} . \varepsilon^{2\nu} + \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1' \\ \mu_1' & \mu_2 \end{vmatrix} . \varepsilon^{\nu},$$

wobei die $(\lambda_1, \lambda_2)$, $(\mu_1, \mu_2)$, $(\lambda_1', \lambda_2')$, $(\mu_1', \mu_2')$ auf Grund von vier Ikosaedergleichungen zu bestimmen sind, deren Parameter aus den Coefficienten

der vorgelegten Gleichung fünften Grades gebildet werden können, und zwar dermassen durch elementare Processe, dass ausser rationalen Verbindungen nur die beiden vorhin erwähnten Quadratwurzeln, also insbesondere auch die accessorische Irrationalität $\omega$ in die Rechnung verwebt werden.

Man bemerke, dass die Lösungen $y$ und $y'$ der beiden Hauptgleichungen stets conjugirt zu verbinden sind, also in der einen $\nu = 0$; 1, 2, 3, 4, in der anderen gleichzeitig $\nu = 0$; 4, 3, 2, 1 zu setzen ist, und dass zwischen $y$ und $y'$ die Beziehung

$$(y - y')^2 + 2\omega(m'y - my') + 4n\omega^2 = 0$$

statt hat.

Obgleich nun hiermit schematisch Alles, was sich auf die Auflösung einer allgemeinen Gleichung fünften Grades bezieht, erledigt ist, und alle Elemente, welche die Lösung zusammensetzen, einzeln bekannt sind, so fehlt es dennoch zur Zeit an einem Algorithmus, welcher eine wirklich hinschreibbare und übersichtliche Auflösung des allgemeinen Falles ermöglicht. Es ist zweifellos, dass bei allen bis jetzt bekannten Methoden der algebraische Theil in zu viele einzelne Schnitte zerlegt ist, und dass das oft umworbene Problem der Gleichungen fünften Grades in mehr als einer Hinsicht noch nicht als abgeschlossen bezeichnet werden kann.

(Der zweite Theil dieser Arbeit erscheint in den nächsten Heften dieses Jahrgangs).

X.

# Ueber relative Primzahlen.

Von

Dr. L. Goldschmidt

in Gotha.

Im 70. Bande des Crelle'schen Journals ist von Herrn Victor Schemmel eine Verallgemeinerung der Sätze über relative Primzahlen gegeben worden, mit deren Beweis wir uns in den nachstehenden Ausführungen beschäftigen werden, indem wir damit einem gütigen Hinweis des Herrn Professor Stern Folge leisten.

Es lassen sich aus den relativen Primzahlen einer ungeraden Zahl $m$, welche kleiner als diese sind, eine bestimmte Anzahl Gruppen von $n$ aufeinanderfolgenden Zahlen zusammenstellen.

Bevor gezeigt werden soll, dass für diese Gruppen ähnliche Gesetze wie die bekannten für relative Primzahlen bestehen, wollen wir erst den Satz:

$$\varphi(m) = a^{\alpha-1}(a-1)b^{\beta-1}(b-1)c^{\gamma-1}(c-1)\ldots$$

in ein wenig anderer Weise ableiten, als das in den Lehrbüchern zu geschehen pflegt.

Wie üblich, bedeutet $\varphi(m)$ die Anzahl der kleineren, zu $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$ relativen Primzahlen, während $a$, $b$, $c\ldots$ beliebige Primzahlen, $\alpha$, $\beta$, $\gamma\ldots$ beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Die zu $a$ relativ primen ersten $a-1$ Zahlen der natürlichen Reihe kehren als Reste $mod\, a$ in den $b$ Intervallen:

von 0 bis $a$
„ $a$ „ $2a$
„ $2a$ „ $3a$
. . . . . .
. . . . . .
von $(b-1)a$ bis $ba$

$b$ mal wieder, während gleichzeitig alle Reste $r_\nu$ in den je $b$ Zahlen:

$$\text{A)} \qquad r_\nu,\ r_\nu + a,\ r_\nu + 2a, \ldots r_\nu + (b-1)a$$

vollständige Restsysteme $mod\, b$ durchlaufen. Während also bis zu $ab$ im Ganzen $(a-1)b$ relative Primzahlen zu $a$ auftreten, finden sich in den $a-1$ Restsystemen A) ebensoviele, das heisst $a-1$ Vielfache von $b$ vor, so dass nach deren Ausscheidung:

$$\varphi(ab) = (a-1)b - (a-1) = (a-1)(b-1)$$

wird.

Diese $(a-1)(b-1)$ zu $ab$ relativen Primzahlen finden sich als Reste *mod* $ab$ in den $c$ Gruppen:

$$\begin{array}{lll} \text{von} & 0 & \text{bis } ab \\ \text{„} & ab & \text{„ } 2ab \\ \text{„} & 2ab & \text{„ } 3ab \\ \cdots & & \\ \cdots & & \\ \text{von} & (c-1)ab & \text{bis } cab \end{array}$$

$c$ mal vor, während gleichzeitig alle diese Reste $r_\mu$ in den je $c$ Zahlen:

B) $$r_\mu,\ r_\mu + ab,\ r_\mu + 2ab, \ldots r_\mu + (c-1)ab$$

wiederum vollständige Restsysteme nach dem Modul $c$ erschöpfen, so dass in jeder Reihe B) auch einmal ein Vielfaches von $c$ enthalten ist. Indem wir also diese $(a-1)(b-1)$ durch $c$ theilbaren Zahlen aus den vorhandenen

$$(a-1)(b-1)c$$

zu $ab$ relativen Primzahlen ausmerzen, erhalten wir alle kleineren, mit $abc$ theilerfremden Zahlen durch die Relation:

$$\varphi(abc) = (a-1)(b-1)c - (a-1)(b-1) = (a-1)(b-1)(c-1).$$

So kann man weiter schliessen, um zu zeigen, dass für eine beliebige Zahl von Primfactoren sich die Grösse $\varphi$ analog zusammensetzt, während für eine Zahl

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

aus dem Anblick der Intervalle:

$$\begin{array}{lll} \text{von} & 0 & \text{bis } abc\ldots \\ \text{„} & abc & \text{„ } 2abc\ldots \\ \text{„} & 2abc & \text{„ } 3abc\ldots \\ \cdots & & \\ \cdots & & \\ \text{von} & (a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\ldots - 1)abc & \text{bis } a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots \end{array}$$

die bekannte Gleichung:

$$\varphi(m) = a^{\alpha-1}(a-1)b^{\beta-1}(b-1)c^{\gamma-1}(c-1)\ldots$$

folgt.

Wir werden nunmehr mit $\varphi_n(m)$ die Zahl der Gruppen bezeichnen, welche sich aus je $n$ aufeinanderfolgenden, zu $m$ theilerfremden Zahlen aus allen den Zahlen bilden lassen, welche kleiner als $m$ sind.

Für eine Primzahl $a$ giebt es $a-n$ solcher Gruppen, deren erste mit 1 beginnt und mit $n$ schliesst, deren letzte dagegen aus den Elementen:

$$a-n,\ a-n+1, \ldots a-1$$

besteht. Offenbar wiederholen sich diese Gruppen in nach dem Modul $a$ congruenten Zahlen zwischen je zwei aufeinander folgenden Vielfachen von $a$. Gehen wir bis $ab$, so sind von den

$$(a-n)b$$

*Gruppen* diejenigen auszuschliessen, welche $b$ oder ein Vielfaches von $b$ *enthalten.*

Alle diese Gruppen entsprechen den folgenden Formen:

$$1+ha,\quad 2+ha,\quad 3+ha,\ldots\ldots\ldots n+h.a$$
$$2+ha,\quad 3+ha,\quad 4+ha,\ldots\ldots\ldots n+1+ha$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a-n+ha,\; a-n+1+ha,\; a-n+2+ha,\ldots a-1+ha,$$

in welchen $h$ die Zahlen von 0 bis $b-1$ durchläuft, so dass in jeder dieser Formen einmal ein Vielfaches von $b$ an erster, einmal an zweiter etc. Stelle stehen wird und somit:

$a-n$ Gruppen, deren erste Zahl $\equiv 0 \mod b$,
$a-n$ „ „ zweite „ $\equiv 0$ „ $b$,
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
$a-n$ Gruppen, deren $n^{te}$ Zahl $\equiv 0 \mod b$,

im Ganzen $n(a-n)$ auszuschliessen sein werden.

Damit keine der Gruppen zugleich an verschiedenen Stellen ein Vielfaches von $b$ enthalten könne, ist es nur erforderlich, $a$ als die kleinste von den in Frage kommenden Primzahlen anzusehen, was die Allgemeinheit der Untersuchung nicht stört, während einleuchtend ist, dass in $n$ aufeinander folgenden Zahlen nicht mehr als höchstens einmal ein Vielfaches einer grössen Zahl erscheinen kann.

Wir können nach dem Vorhergehenden die Gleichung:

$$\varphi_n(ab)=(a-n)b-n(a-n)=(a-n)(b-n)$$

aufstellen.

Diese $(a-n)(b-n)$ Gruppen finden sich in Zahlen, welche beziehungsweise nach dem Modul $ab$ congruent sind, immer zwischen zwei aufeinander folgenden Vielfachen von $ab$ vor, wenn wir zu dem Product $abc$ übergehen, also:

$$(a-n)(b-n)c \text{ mal}$$

vor und um $\varphi_n(abc)$ zu finden, muss ich von diesen diejenigen Gruppen abziehen, in welchen durch die Primzahl $c$ theilbare Elemente auftreten.

Wiederum werden an jeder einzelnen Stelle dieser Gruppen vollständige Restsysteme $\mod c$ erschöpft, so dass die den vorigen analogen Schlüsse zu

$$\varphi_n(abc)=(a-n)(b-n)c-n(a-n)(b-n)=(a-n)(b-n)(c-n)$$

führen.

Indem wir so fortfahren und in Bezug auf die Zahl $m=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$ bedenken, dass immer zwischen zwei aufeinander folgenden Vielfachen von $abc\ldots$ sich die den $(a-n)(b-n)(c-n)\ldots$ Gruppen entsprechenden in relativen Primzahlen zu $abc\ldots$ vorfinden müssen, dass ferner $a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\ldots$ solcher Intervalle bis $m$ vorkommen, erhält man den von Herrn Schemmel aufgestellten Satz:

$$\varphi_n(m)=a^{\alpha-1}(a-n)b^{\beta-1}(b-n)c^{\gamma-1}(c-n)\ldots,$$

welcher für $n=1$ in den zunächst für $\varphi(m)$ abgeleiteten übergeht. Wie aus diesem für zwei theilerfremde Zahlen $m$ und $m'$:

$$\varphi(mm') = \varphi(m)\varphi(m'),$$

so folgt aus dem allgemeineren unmittelbar:

$$\varphi_n(mm') = \varphi_n(m)\varphi_n(m').$$

Ein einfaches Beispiel soll hier eingefügt werden. Ist $ab = 5.7$ und nehmen wir $n = 3$, so giebt es $2.4 = 8$ Gruppen der gekennzeichneten Art, nämlich:

| | | | *mod* 5 | | | *mod* 7 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 |
| 11 | 12 | 13 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 16 | 17 | 18 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 |
| 17 | 18 | 19 | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 5 |
| 22 | 23 | 24 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 |
| 31 | 32 | 33 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| 32 | 33 | 34 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6. |

Wie man sieht, geben die Zahlen, nach dem Modul 5 betrachtet, $7 - 3 = 4$ mal die der Zahl fünf eigenen Gruppen:

1 2 3
2 3 4

nach dem Modul 7 betrachtet $5 - 3 = 2$ mal die der Zahl sieben eigenen Gruppen:

1 2 3
2 3 4
3 4 5
4 5 6

wenn auch in anderer Ordnung. So ist es allgemein. Bis zur Zahl $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ lassen sich:

$$b^{\beta-1}(b-n)c^{\gamma-1}(c-n)\ldots \text{mal}$$

die zur Zahl $a^\alpha$ gehörigen $a^{\alpha-1}(a-n)$ Gruppen der Zahl $a$ nachweisen, wenn man alle Zahlen *mod* $a$ betrachtet, ferner:

$$a^{\alpha-1}(a-n)c^{\gamma-1}(c-n)\ldots \text{mal}$$

die zur Zahl $b^\beta$ gehörigen $b^{\beta-1}(b-n)$ Gruppen der Zahl $b$, wenn man alle Elemente *mod* $b$ betrachtet u. s. f.

Für den besonderen, zunächst behandelten Fall lässt sich die Formel:

$$\varphi(m) = a^{\alpha-1}(a-1)b^{\beta-1}(b-1)c^{\gamma-1}(c-1)\ldots$$

dahin interpretiren, dass alle kleineren, mit $m$ theilerfremden Zahlen ebenso vielmal alle Reste von 1 bis $a-1$ *mod* $a$ erschöpfen, als alle Factoren von $\varphi(m)$ ausser $(a-1)$ dies angeben und entsprechend ist es für die übrigen Primfactoren von $m$.

Dass hierauf der Beweis der Formel in den Disquisitiones arithmeticae beruht, welcher combinatorisch vorgeht, bedarf kaum der Erwähnung.

Ist $k$ eine beliebige relative Primzahl zu $m$, so stimmen, wie bekannt, die Producte:

$$1k,\ 2k,\ 3k,\ 4k, \ldots (m-1)k$$

in Bezug auf den Modul $m$ mit den ersten $m-1$ Zahlen bis auf die andere Reihenfolge völlig überein. Daraus ergiebt sich, dass jenen $\varphi_n(m)$ Gruppen immer ebenso viele andere entsprechen, deren Glieder sich nicht um eine Einheit, sondern um $k$ Einheiten unterscheiden.

So entsprechen für unser Beispiel den 8 Gruppen die folgenden, deren Elemente um die Zahl 11 verschieden sind:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 12 | 23 |
| 2 | 13 | 24 |
| 11 | 22 | 33 |
| 12 | 23 | 34 |
| 16 | 27 | 3 |
| 22 | 33 | 9 |
| 26 | 2 | 13 |
| 32 | 8 | 19 |

Es heisse irgend ein Divisor von $m$ $\delta$, so ist derselbe in der Form $a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots$ enthalten, während die Exponenten:

$$\alpha' \leqq \alpha,$$
$$\beta' \leqq \beta,$$
$$\gamma' \leqq \gamma$$
etc.

sein müssen. Dem für diese Divisoren bekannten Satze:

$$\Sigma \varphi(\delta) = m$$

entspricht im vorliegenden allgemeineren Falle die Beziehung:

$$\Sigma \frac{\varphi_n(\delta)}{n^{\alpha'} n^{\beta'} n^{\gamma'} \ldots} = \frac{m}{n^{\alpha} n^{\beta} n^{\gamma} \ldots},$$

welche unter Vermeidung des Bruches rechter Hand auch

$$\Sigma n^{\alpha-\alpha'} n^{\beta-\beta'} n^{\gamma-\gamma'} \ldots \varphi(\delta) = m$$

geschrieben werden kann.

Bildet man nämlich, analog wie bei dem Beweise für den speciellen Fall, die Summen:

$$n^{\alpha}\varphi_n(1) + n^{\alpha-1}\varphi_n(a) + n^{\alpha-2}\varphi_n(a^2) + \cdots + \varphi_n(a^{\alpha}),$$
$$n^{\beta}\varphi_n(1) + n^{\beta-1}\varphi_n(b) + n^{\beta-2}\varphi_n(b^2) + \cdots + \varphi_n(b^{\beta}),$$
$$n^{\gamma}\varphi_n(1) + n^{\gamma-1}\varphi_n(c) + n^{\gamma-2}\varphi_n(c^2) + \cdots + \varphi_n(c^{\gamma}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so entspricht das Product aller der linken Seite der zuletzt geschriebenen Gleichung, während für die erste Summe aus:

$$n^{\alpha} + n^{\alpha-1}(a-n) + n^{\alpha-2}a(a-n) \cdots + na^{\alpha-2}(a-n) + a^{\alpha-1}(a-n),$$

oder aus:

$$n^a + n^{a-1}(a-n)\left\{1+\frac{a}{n}+\frac{a^2}{n^2}\cdot+\frac{a^{a-1}}{n^{a-1}}\right\}$$

nach leichter Rechnung $a^a$ ebenso, wie für die folgenden beziehungsweise $b^\beta$, $c^\gamma$ etc. und also für das Product aller der Werth $m$ folgt.

Es bleibt hierzu nur zu bemerken, dass man entweder $\varphi_n(1)$ ein- für allemal $=1$ zu setzen hat, oder dass man die Definition der Grösse $\varphi_n(m)$ dahin abändert, dass sie die Zahl derjenigen nicht grösseren und zu $m$ relativen Primzahlen angiebt, welche Gruppen von je $n$ aufeinander folgenden, mit $m$ theilerfremden Zahlen eröffnen können.

Die Verallgemeinerung der Sätze über relative Primzahlen, mit welcher wir uns beschäftigt haben, erhält ein besonderes Interesse durch folgenden eleganten Satz, welchen Herr Schemmel aufstellt:

„Wählt man aus jeder der $\varphi_n(m)$ Gruppen das $\lambda^{\text{te}}$ Glied und bildet aus diesen Gliedern das Product, welches ich mit

$$\Pi_n A_{\lambda k}$$

bezeichnen will, wo $k$ die Differenz je zweier aufeinander folgenden Glieder in einer Gruppe bedeutet, so erhält man für dieses Product im Falle $n=1$ den Wilson'schen, wenn dagegen $n>1$, folgenden Satz:

$$\{\Pi_n A_{\lambda k}\}^{n-1} \equiv \{(-1)^{\lambda-1}k^{n-1}(\lambda-1)!\,(n-\lambda)!\}^{\varphi_n(m)} \bmod m,$$

wo die Facultäten $(\lambda-1)!$ und $(n-\lambda)!$, wenn $\lambda=1$ oder $\lambda=n$ wird, durch die Einheit zu ersetzen sind."

Betrachtet man zunächst die Gruppen:

$$\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & \ldots\lambda\ldots\ldots\ldots\ldots & n \\
2 & 3 & 4 & \lambda+1 & \ldots n+1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a-n, & a-n+1, & a-n+2\ldots & a-n+\lambda-1\ldots & a-1
\end{array}$$

und bezeichnet man das Product:

$$\lambda\,.\,\lambda+1\ldots a-n+\lambda-1 \text{ mit } \prod_a{}_n r_\lambda,$$

so ist nach dem Wilson'schen Satze:

$$(\lambda-1)!\prod_a{}_n r_\lambda\,(a-n+\lambda)(a-n+\lambda+1)\ldots(a-1) \equiv -1 \bmod a,$$

oder, wenn ich für den auf $\prod_a{}_n r_\lambda$ folgenden Theil des Ausdrucks linker Hand die kleinsten Reste nehme, nachdem der Factor $(-1)^{n-\lambda}$ herausgezogen ist, so folgt:

$$(-1)^{n-\lambda}(\lambda-1)!\,(n-\lambda)!\prod_a{}_n r_\lambda \equiv -1 \bmod a$$

und nach Multiplication mit $-1$:

$$(-1)^{n-(\lambda-1)}(\lambda-1)!\,(n-\lambda)!\prod_a r_\lambda \equiv 1 \bmod a.$$

Durch Erheben zur $(a-n)^{\text{ten}}$ Potenz ergiebt sich weiter:

$$\{(-1)^{n-(\lambda-1)}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\}^{a-n}\Big[\prod_a {}_n r_\lambda\Big]^{a-n} \equiv 1 \ mod\ a,$$

wofür man auch schreiben darf:

$$\{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\}^{a-n}\Big[\prod_a {}_n r_\lambda\Big]^{a-n} \equiv 1 \ mod\ a,$$

wie eine leichte Ueberlegung zeigt. Das Vorzeichen linker Hand hängt von dem Producte:

$$[n-(\lambda-1)](a-n)$$

ab, welches in seinem Verhalten als gerade oder ungerade Zahl mit

$$(n+\lambda-1)(a-n),$$

und ebenso mit

$$(\lambda-1)(a-n)$$

übereinstimmt. Ist nämlich $n$ eine gerade Zahl, so kann ich es ohne Weiteres unterdrücken, ist $n$ dagegen ungerade, so ist der zweite Factor $a-n$ und somit auch das Product immer gerade, gleichviel, ob $n$ im ersten Factor steht oder nicht.

Dass für $(\lambda-1)!$ die Einheit zu setzen ist, wenn man die erste Colonne der Reste zu Factoren des Products $\Pi$ nimmt, ist ebenso einleuchtend, als es für $(n-\lambda)!$ erforderlich ist, wenn $\lambda = n$ gewählt wird.

Nach dem Fermat'schen Lehrsatze gilt die Congruenz:

$$\Big[\prod_a {}_n r_\lambda\Big]^{a-1} \equiv 1 \ mod\ a.$$

Setzt man also auf der rechten Seite der zuletzt aufgestellten Beziehung für die Einheit $\Big[\prod_a {}_n r_\lambda\Big]^{a-1}$ und dividirt man auf beiden Seiten, was zulässig ist, mit $\Big[\prod_a {}_n r_\lambda\Big]^{a-n}$, so ergiebt sich:

$$\text{C)}\qquad \{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\}^{a-n} \equiv \Big[\prod_a {}_n r_\lambda\Big]^{n-1} mod\ a.$$

Die analoge Congruenz gilt natürlich für jeden Primzahlmodul und ich gelange so zu:

$$\begin{cases} \{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\}^{(a-n)(b-n)(c-n)\dots} \equiv \Big[\prod_a {}_n r_\lambda\Big]^{(n-1)(b-n)(c-n)\dots} mod\ a, \\ \{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\}^{(a-n)(b-n)(c-n)\dots} \equiv \Big[\prod_b {}_n r_\lambda\Big]^{(n-1)(a-n)(c-n)\dots} mod\ b, \\ \{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\}^{(a-n)(b-n)(c-n)\dots} \equiv \Big[\prod_c {}_n r_\lambda\Big]^{(n-1)(a-n)(b-n)\dots} mod\ c, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

welche Beziehungen durch entsprechende Potenzirung von C) und der nach den Moduln $b$, $c$ analogen Congruenzen entstanden sind.

Nach unseren früheren Bemerkungen sagt aber der Ausdruck:

$$\Big[\prod_a {}_n r_\lambda\Big]^{(b-n)(c-n)\ldots},$$

dass die an $\lambda^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Elemente der zu $a$ gehörenden $a-n$ Gruppen zum Product vereinigt $(b-n)(c-n)\ldots$ mal, das heisst so oft als Factor gesetzt sind, als sie überhaupt unter den $\varphi_n(abc\ldots)$ nach dem Modul $a$ betrachteten Gruppen sich vorfinden. Bezeichnen wir also mit

$$\Pi_n A_\lambda$$

das Product aller in allen Gruppen in $\lambda^{\text{ter}}$ Stelle überhaupt auftretenden Zahlen, so erhalten wir die Congruenz:

$$\Big[\prod_a {}_n r_\lambda\Big]^{(b-n)(c-n)\ldots} \equiv \Pi_n A_\lambda \ mod\, a$$

und analog:

$$\Big[\prod_b {}_n r_\lambda\Big]^{(a-n)(c-n)\ldots} \equiv \Pi_n A_\lambda \ mod\, b,$$

$$\Big[\prod_c {}_n r_\lambda\Big]^{(a-n)(b-n)\ldots} \equiv \Pi_n A_\lambda \ mod\, c,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Substituiren wir den Ausdruck rechts in den Congruenzen D), so ergiebt sich sowohl nach dem Modul $a$, als nach $b$, $c$ etc.:

$$\{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\}^{\varphi_n(abc\ldots)} \equiv [\Pi_n A_\lambda]^{n-1},$$

woraus diese Congruenz auch $mod\, abc\ldots$ folgen muss.

Aus der Gleichung:

$$\{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\}\prod_a r_\lambda = 1 + ap,$$

welche einer früher abgeleiteten Congruenz entspricht, ergiebt sich durch Erheben zur $a^{\alpha-1\text{ten}}$ Potenz:

$$\{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\}^{a^{\alpha-1}}\Big[\prod_a {}_n r_\lambda\Big]^{a^{\alpha-1}} \equiv 1 \ mod\, a^\alpha$$

und also auch:

$$\{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)\}^{a^{\alpha-1}(a-n)}\Big[\prod_a {}_n r_\lambda\Big]^{a^{\alpha-1}(a-n)} \equiv 1 \ mod\, a^\alpha,$$

während analoge Congruenzen auch für jede andere Primzahlpotenz als Modul gelten.

Nach dem allgemeinen Fermat'schen Satze ist aber:

$$\Big[\prod_a {}_n r_\lambda\Big]^{a^{\alpha-1}(a-1)} \equiv 1 \ mod\, a^\alpha,$$

so dass ich die zuletzt aufgestellte Congruenz auch schreiben kann:

$$\{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\}^{a^{\alpha-1}(a-n)}\Big[\prod_a {}_n r_\lambda\Big]^{a^{\alpha-1}(a-n)} \equiv \Big[\prod_a {}_n r_\lambda\Big]^{a^{\alpha-1}(a-1)} mod\, a^\alpha,$$

*aus welcher* wiederum:

$$\left\{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\right\}^{a^{\alpha-1}(a-n)} \equiv \left[\prod_a {}_n r_\lambda\right]^{a^{\alpha-1}(n-1)} mod\ a^\alpha$$

folgt.

Durch entsprechende Potenzirung erhalte ich somit das folgende System von Congruenzen:

$$\begin{cases} \left\{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\right\}^{\varphi_n(m)} \equiv \left[\prod_a {}_n r_\lambda\right]^{a^{\alpha-1}(n-1)b^{\beta-1}(b-n)c^{\gamma-1}(c-n)\cdots} mod\ a^\alpha, \\ \left\{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\right\}^{\varphi_n(m)} \equiv \left[\prod_b {}_n r_\lambda\right]^{b^{\beta-1}(n-1)a^{\alpha-1}(a-n)c^{\gamma-1}(c-n)\cdots} mod\ b^\beta, \\ \left\{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\right\}^{\varphi_n(m)} \equiv \left[\prod_c {}_n r_\lambda\right]^{c^{\gamma-1}(n-1)a^{\alpha-1}(a-n)b^{\beta-1}(b-n)\cdots} mod\ c^\gamma, \end{cases}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

während sich wieder wie in dem besonderen Falle der Zahl $abc\ldots$ auf Grund der früher angestellten Betrachtungen:

$$\left[\prod_a {}_n r_\lambda\right]^{a^{\alpha-1}b^{\beta-1}(b-n)c^{\gamma-1}(c-n)\cdots} \equiv \Pi_n A_\lambda\ mod\ a^\alpha,$$

$$\left[\prod_b {}_n r_\lambda\right]^{b^{\beta-1}a^{\alpha-1}(a-n)c^{\gamma-1}(c-n)\cdots} \equiv \Pi_n A_\lambda\ mod\ b^\beta,$$

$$\left[\prod_c {}_n r_\lambda\right]^{c^{\gamma-1}a^{\alpha-1}(a-n)b^{\beta-1}(b-n)\cdots} \equiv \Pi_n A_\lambda\ mod\ c^\gamma$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

ergiebt, wobei $\Pi_n A_\lambda$ das Product aller in allen Gruppen an $\lambda^{\text{ter}}$ Stelle befindlichen Zahlen bedeutet.

Ersetze ich in den Congruenzen E) die rechts befindlichen Ausdrücke durch dies Product und verbinde ich sie alle mit einander, so ergiebt sich:

$$\left\{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\right\}^{\varphi_n(m)} \equiv [\Pi_n A_\lambda]^{n-1}\ mod\ m$$

als Resultat.

Für den Fall, dass die einzelnen Glieder einer jeden Gruppe um den Werth $k$ differiren, folgt aus:

$$\left\{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\right\}\prod_a {}_n r_\lambda k^{a-1} \equiv 1\ mod\ a,$$

wegen:

$$\prod_a {}_n r_\lambda k^{a-n} \equiv \prod_a {}_n r_{\lambda k},$$

und wenn ich die übrigbleibende Potenz $k^{a-1-(a-n)} = k^{n-1}$ mit in die Klammer aufnehme:

$$\left\{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\, k^{n-1}\right\}^{\varphi_n(m)} \prod_a {}_n r_\lambda \equiv 1\ mod\ a,$$

während im weiteren Gang des geführten Beweises alle Schlüsse dieselben bleiben würden.

Damit ist also der von Herrn Schemmel aufgestellte Satz:

$$\left\{\Pi_n A_{\lambda k}\right\}^{n-1} \equiv \left\{(-1)^{\lambda-1} k^{n-1}(\lambda-1)!\ (n-\lambda)!\right\}^{\varphi_n(m)}\ mod\ m$$

als richtig erwiesen.

Derselbe würde natürlich mannigfache Specialisirungen zulassen. Für $k=1$, $\lambda=1$, $n=2$ ergiebt sich, dass das Product derjenigen relativen Primzahlen, welche um 1 vergrössert wiederum zu $m$ relativ prim sind, $\equiv 1$ ist $mod\, m$.

Wir wollen schliesslich noch kurz bemerken, dass sich eine noch allgemeinere als die behandelte Function aufstellen lässt, welche ebenfalls der $\varphi$-Function ähnliche Eigenschaften zeigt.

Greift man aus der Reihe der Zahlen:

$$\begin{array}{l} 1\;\;2\;\;3\ldots a-1, \\ 1\;\;2\;\;3\ldots b-1, \\ 1\;\;2\;\;3\ldots c-1 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

beziehungsweise $a-\nu_a$, $b-\nu_b$, $c-\nu_c\ldots$ beliebige Zahlen heraus, so sagt die Gleichung:

$$\varphi_\nu(m) = a^{\alpha-1}(a-\nu_a)b^{\beta-1}(b-\nu_b)c^{\gamma-1}(c-\nu_c)\ldots,$$

wieviel es bis zu $m$ Zahlen giebt, welche zugleich einer der

$$\begin{array}{lll} a-\nu_a & \text{Individuen} & mod\, a, \\ b-\nu_b & \text{"} & \text{"}\;\; b, \\ c-\nu_c & \text{"} & \text{"}\;\; c \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

congruent sind.

---

## Erklärung.

Ich habe im zweiten Hefte des 38. Jahrganges dieser Zeitschrift einen einfachen Beweis des Euler'schen Satzes über die Pentagonalzahlen veröffentlicht, den ich für neu gehalten habe. Wie ich aus der jüngst erschienenen Abhandlung: „Beiträge zu einer additiven Zahlentheorie" von Dr. K. Th. Vahlen ersehe, ist derselbe Beweis bereits im 92. Bande der Comptes rendus von Herrn J. Franklin gegeben worden.

# XI.

# Einige metrische Eigenschaften der cubischen räumlichen Hyperbel.

Von

Dr. Ernst Heinrichs

in Köln.

Hierzu Tafel IV, Fig. 1—7.

Im Folgenden ist der Versuch gemacht worden, ausgehend von einer bestimmten, an der cubischen räumlichen Hyperbel auftretenden Ebenenconfiguration zu metrischen Eigenschaften dieser Curve zu gelangen. Die zur rascheren Begründung einzelner Resultate stellenweise mitbenutzten analytischen Hilfsmittel führten zu einer parametrischen Darstellung der Curve, welche wegen ihrer Beziehung auf orthogonale Coordinaten vielleicht geeignet ist, differentialgeometrischen Untersuchungen zum Ausgangspunkte zu dienen.

## I.

**1.** Die Raumcurve dritter Ordnung hat mit der unendlich fernen Ebene drei Punkte gemein. Die Schmiegungsebenen $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ der Curve in diesen drei Punkten, oder die Asymptotenebenen der Raumcurve schneiden sich in einem Punkte der unendlich fernen Ebene; sie umschliessen daher einen dreiseitig-prismatischen Raum $\Delta$.

Alle $\infty^4$ Raumcurven dritter Ordnung ($h^3$), welche drei in prismatischer Stellung gegebene Ebenen ($\alpha_i$) zu Asymptotenebenen haben, liegen auf demjenigen Cylinder dritter Ordnung, $\gamma^3$, der die drei Ebenen zu Wendeasymptotenebenen hat und eine Doppelerzeugende, $s$, besitzt.

Es ist nämlich eine zweifache Bedingung für jede Raumcurve, eine bestimmte Ebene zur Schmiegungsebene zu haben. Also ist es eine sechsfache Bedingung für die Curven $h^3$, die drei Ebenen $\alpha_i$ in irgend welchen Punkten zu osculiren. Die Ebene der drei Osculationspunkte $[h^3, \alpha_i]$ geht nun aber durch den unendlich fernen Schnittpunkt $A_\infty$ der Ebenen $\alpha_i$ und kann daher $\infty^2$ verschiedene Lagen annehmen. Soll sie, wie in unserem Falle, die unendlich ferne Ebene selbst sein, so erhöht die Zahl der Bedingungen für die Raumcurve sich somit um zwei. Also giebt es unter den $\infty^{12}$

cubischen Raumcurven des Raumes $\infty^4$, welche die drei Ebenen $\alpha_i$ zu Asymptotenebenen haben. Eine beliebige unter den Curven $h^3$ wird aus dem Punkte $A_\infty$ durch einen Cylinder dritter Ordnung, $\gamma^3$, projicirt, der die Ebenen $\alpha_i$ zu Wendeasymptotenebenen hat und ausserdem eine Doppelerzeugende besitzt. Derselbe ist durch die hierin liegende neunfache Gesammtbedingung (bei festliegendem Scheitelpunkte $A_\infty$) eindeutig bestimmt. Also liegen auf ihm alle $\infty^4$ Curven $(h^3)$.

2. Die Doppelerzeugende $s$ des Cylinders $\gamma^3$, oder die gemeinsame Bisekante aller Curven des Systemes $(h^3)$ ist die Schwerpunktsachse des prismatischen Raumes $\Delta$.

Beweis. Eine beliebige Ebene $\varepsilon$ schneidet den Cylinder $\gamma^3$ in einer ebenen Curve dritter Ordnung, $c^3$, seine Doppelerzeugende $s$ in dem Doppelpunkte 0 und seine Wendeasymptotenebenen $\alpha_i$ in den drei Wendeasymptoten $w_i$ dieser Curve. In einem (hier und für die Folge immer rechtwinkeligen) Coordinatensysteme der Ebene $\varepsilon$, dessen Anfangspunkt der Doppelpunkt 0 sein möge, sollen die Geraden $w_i$ durch die Gleichungen:

$$\varphi_i \equiv u_i x + v_i y - 1 = 0$$

dargestellt sein. Dann hat die Curve $c^3$ die Gleichung:

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 + \mu = 0.$$

Weil der Anfangspunkt ein Doppelpunkt der Curve ist, so haben die Coefficienten der Glieder nullter und erster Dimension in der Gleichung den Werth Null. Demnach ist:

1) $$-1 + \mu = 0,$$

also:

$$\mu = 1;$$

2) $$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

und

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0.$$

Aus der Gleichung 1) folgt als Form der Curvengleichung:

I) $$(u_1 x + v_1 y - 1)(u_2 x + v_2 y - 1)(u_3 x + v_3 y - 1) + 1 = 0;$$

aus den Gleichungen 2) ergiebt sich, dass die Coordinaten des zum Dreieck der drei Geraden $w_i$ gehörigen Schwerpunktes, nämlich:

$$x = \frac{1}{3}\left\{\frac{v_3 - v_2}{u_2 v_3 - u_3 v_2} + \frac{v_2 - v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} + \frac{v_1 - v_3}{u_3 v_1 - u_1 v_3}\right\},$$

$$y = \frac{-1}{3}\left\{\frac{u_3 - u_2}{u_2 v_3 - u_3 v_2} + \frac{u_2 - u_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} + \frac{u_1 - u_3}{u_3 v_1 - u_1 v_3}\right\},$$

den Werth Null haben. Denn die hier vorkommenden Nenner haben den *gleichen* Werth $d$, den wir später noch verwenden werden:

*II)* $$d \equiv u_1 v_2 - u_2 v_1 \equiv u_2 v_3 - u_3 v_2 \equiv u_3 v_1 - u_1 v_3.$$

Also ist der Coordinatenanfangspunkt, das heisst der Doppelpunkt der Curve $c^3$, zugleich der Schwerpunkt des Wendeasymptotendreiecks dieser Curve, und somit ist ferner, da $\varepsilon$ eine beliebige Ebene war, die Doppelerzeugende $s$ des Cylinders $\gamma^3$ die Schwerpunktsachse des Wendeasymptotenprismas $\Delta$ dieses Cylinders.

Wir nehmen für die Folge an, dass die drei Ebenen $\alpha_i$ sämmtlich reell sind. Dann sind alle Curven des Systems $(h^3)$ cubische räumliche Hyperbeln. — Die Schnittcurven $c^3$ der $\infty^3$ Ebenen des Raumes mit dem Cylinder $\gamma^3$ sind offenbar ausgeartete Curven des Systems $(h^3)$.

**3.** Eine cubische räumliche Hyperbel des Systems $(h^3)$ wird eindeutig bestimmt durch ihre in zweien der drei Asymptotenebenen beliebig gegebenen Asymptoten (Fig. 1).

Die Geraden $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$ mögen bezw. mit $p_1$, $p_2$, $p_3$ bezeichnet werden. Bestimmt man in den Ebenen $\alpha_1$ und $\alpha_2$ die Geraden $a_1$ bezw. $a_2$, welche den Strahl $p_3$ in den Punkten $A_{13}$ und $A_{23}$ schneiden mögen, zu Asymptoten einer Curve $(h^3)$ und zieht durch den Punkt $A_{23}$ die Gerade $b_1 \| a_1$ und durch $A_{13}$ die Gerade $b_2 \| a_2$, so bildet die Gesammtheit derjenigen cubischen Raumcurven, welche die Ebenen $\alpha_1$ und $\alpha_2$ zu Asymptotenebenen, die Geraden $a_1$ und $a_2$ zu Asymptoten haben, einen Bündel, für dessen Curven $(b^3)$ das durch die Ebenen $b_1a_2$, $b_2a_1$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ gebildete Tetraeder in bestimmter Zuordnung ein gemeinsames Schmiegungstetraeder ist. Ich habe nun an anderer Stelle bewiesen*, dass eine beliebige Ebene des Raumes von nur einer Curve dieses Bündels osculirt wird; und zwar liegt der Osculationspunkt auf dem in der betreffenden Ebene enthaltenen Treffstrahle der Kante $p_3$ und der dieser gegenüber liegenden, hier unendlich fernen Kante des Tetraeders. Demgemäss osculirt die Ebene $\alpha_3$ eine einzige Curve $b^3$ und zwar in einem Punkte ihrer unendlich fernen Geraden; das heisst die Ebene $\alpha_3$ ist Asymptotenebene für nur eine der Curven, welche die Asymptotenebenen $\alpha_1$ und $\alpha_2$, die Asymptoten $a_1$ und $a_2$ haben.

**4.** Die drei Strecken, welche auf den Kanten $p_i$ des prismatischen Raumes $\Delta$ von den Asymptoten einer Curve $h^3$ abgegrenzt werden, sind gleich und liegen bezw. in jeder der drei Asymptotenebenen auf entgegengesetzten Seiten der in derselben enthaltenen Asymptote (Fig. 1).

Das ergiebt sich aus der Construction der in der Ebene $\alpha_3$ enthaltenen Asymptote $a_3$ der durch ihre Asymptoten $a_1$ und $a_2$ bestimmten Curve $h^3$. Man erhält nämlich als Schnittpunkt $A_{32}$ (bezw. $A_{31}$) der Asymptote $a_3$ mit der Ebene $\alpha_1$ (bezw. $\alpha_2$) den durch den Schnittpunkt der Strahlen $p_3$ und $p_2$ (bezw. $p_1$) und den Punkt $A_{12}$ vom Punkte $B_{12} \equiv p_2 b_1$ (bezw. $B_{21} \equiv p_1 b_2$)

* In meiner Dissertation: Ueber den Bündel derjenigen cubischen Raumcurven, welche ein gegebenes Tetraeder in derselben Art zum gemeinsamen Schmiegungstetraeder haben (Münster 1887) S. 11 und 17.

harmonisch getrennten Punkt.* Da der Punkt $p_3 p_2$ (bezw. $p_3 p_1$) unendlich fern liegt, so sind die Strecken $A_{32} A_{12}$ und $A_{12} B_{12}$ bezw. $A_{31} A_{21}$ und $A_{21} B_{21}$ gleich. Wegen des Parallelismus der Geraden $a_1$ und $b_1$ bezw. $a_2$ und $b_2$ sind aber die Strecken $A_{12} B_{12}$ und $A_{21} B_{21}$ gleich der Strecke $A_{23} A_{13}$; also folgt:

$$A_{32} A_{12} = A_{13} A_{23} = A_{21} A_{31}.$$

Die im Satze angegebene Lage der drei Strecken zu den Asymptoten zeigt sich bei der Construction sofort. Wenn also drei in den Ebenen $\alpha_i$ liegende Geraden $a_i$ eine solche Lage zu einander haben, dass sie auf den Kanten des Prismas $\Delta$ gleiche Strecken abschneiden, welche in jeder der drei Asymptotenebenen auf entgegengesetzten Seiten der in dieser enthaltenen Geraden $a_i$ liegen, so sind dieselben die Asymptoten einer Curve des Systems $(h^3)$.

Wir wollen die Länge der drei auf den Kanten abgegrenzten Strecken $A_{ik} A_{lk}$ die Asymptotenweite $a$ (oder Asymptotendistanz, Asymptotenabstand) der betreffenden Curve $h^3$ nennen. Die ebenen Curven $c^3$ des Cylinders $\gamma^3$ sind solche Curven des Systems $(h^3)$, deren Asymptotenweite gleich Null ist.

5. Die durch die Mitten $M_1$, $M_2$, $M_3$ der Strecken $A_{21} A_{31}$, $A_{32}, A_{12}$, $A_{13} A_{23}$ gelegte Ebene $\mu$ halbirt offenbar auch die auf den Asymptoten $a_i$ durch die Geraden $p_i$ abgegrenzten Strecken. Die Halbirungspunkte seien $N_1$ auf $A_{12} A_{13}$, $N_2$ auf $A_{23} A_{21}$, $N_3$ auf $A_{31} A_{32}$. Der Punkt $M$, in welchem die Schwerpunktsachse $p$ des Prismas $\Delta$ die Ebene $\mu$ durchbohrt, ist der Schwerpunkt des Dreiecks $\delta \equiv M_1 M_2 M_3$. In ihm schneiden sich also die drei Geraden $M_i N_i$ (Fig. 2 und 3).

Auf jeder der drei Mittellinien $M_i N_i$ des Dreiecks $\delta$ liegt ein Punkt der Curve $h^3$, nämlich bezw. $S_1$, $S_2$, $S_3$, in derjenigen Entfernung $S_i M$ vom Schwerpunkte $M$, welche der Länge und dem Richtungssinne nach gleich $M_i N_i$ ist.

Zum Beweise dieses Satzes legen wir durch die Geraden $b_1$ und $b_2$ (vergl. Fig. 1) die zur Asymptote $a_3$ parallelen Ebenen, welche bezw. den Strahl $p_1$ in $B_1$, den Strahl $p_2$ in $B_2$ schneiden mögen. $S_{21}$ sei der Schnittpunkt der ersteren Ebene mit der Geraden $b_2$, und $S_{12}$ der Schnitt der anderen Ebene mit $b_1$. Der Strahl $S_{12} S_{21}$ ist sodann der Asymptote $a_3$ parallel, enthält also den auf letzterer befindlichen unendlich fernen Punkt der Curve $h^3$. Nun befindet sich aber, nach einem Cremona'schen Satze über das Schmiegungstetraeder, den wir auf das oben beschriebene Schmiegungstetraeder der Curve $h^3$ anwenden wollen, auf jedem der Curve $h^3$ in einem Punkte begegnenden Treffstrahle der Tetraederkanten $b_1$ und $b_2$ noch ein zweiter Punkt derselben Curve, harmonisch getrennt vom ersten durch die beiden Treffpunkte des Strahles mit $b_1$ und $b_2$.** Der erste Begegnungspunkt

* A. a. O. S. 17 (§ 11, 3).

** Cremona, Journal für Mathematik Bd. 58 S. 138.

$(S_{12}S_{21}, h^3)$ liegt unendlich fern auf $S_{12}S_{21}$, der zweite daher in der Mitte $S_3$ der Strecke $S_{12}S_{21}$. Eine einfache Betrachtung der Ebene $S_{12}S_{21}a_3$ lässt leicht erkennen, dass der Punkt $S_3$ auf der Verlängerung der Mittellinie $M_3N_3$ des Dreiecks $\delta$ liegt. Durch analoge, die Asymptoten $a_1$ bezw. $a_2$ bevorzugende Betrachtungen erhält man den Nachweis, dass auch auf den beiden anderen Mittellinien $M_1N_1$ und $M_2N_2$ je ein Punkt der Curve, $S_1$ bezw. $S_2$, sich befindet. Es ist ferner an der Figur ersichtlich:

$$S_{12}A_{13}:S_{12}B_2 = S_{12}A_{23}:S_{12}B_{12} = A_{13}A_{23}:B_2B_{12} = 1:4,$$
$$S_{21}A_{13}:S_{21}B_{21} = S_{21}A_{23}:S_{21}B_1 = A_{13}A_{23}:B_{21}B_1 = 1:4.$$

Nun ist aber auch

$$\Delta S_{12}S_{21}A_{13} \sim B_2B_{21}A_{13},$$

und

$$\Delta S_{12}S_{21}A_{23} \sim B_{12}B_1A_{23}.$$

Unter Benutzung der hieraus sich ergebenden Aehnlichkeit der Dreiecke

$$S_{12}S_{21}M_3 \text{ und } A_{32}A_{31}M_3$$

erhält man leicht:

$$S_3M_3:S_3N_3 = 1:4.$$

Folglich ist:

$$S_3M = M_3N_3,$$

und ebenso:

$$S_1M = M_1N_1, \quad S_2M = M_2N_2.$$

**6. Die in den Punkten $S_i$ an die Curve $h^3$ gelegten Tangenten $s_i$ sind parallel den gegenüber liegenden Asymptotenebenen der Curve. Die Schmiegungsebenen $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ derselben in jenen Punkten schneiden sich im Schwerpunkte $M$ des Dreiecks $\delta$, welcher somit in dem durch die Curve erzeugten linearen Nullsysteme der Nullpunkt der Ebene $\mu$ ist.**

Nach einem Satze über das Schmiegungstetraeder*, den wir wieder auf das mehrfach benutzte Schmiegungstetraeder der vorliegenden Curve $h^3$ anwenden wollen, liegt die Tangente eines Curvenpunktes in der Ebene der vom Curvenpunkte nach den Kantenpaaren $a_1$, $a_2$ und $b_1$, $b_2$ gezogenen Treffstrahlen. Wenn nun $R_1$ und $R_2$ die Schnittpunkte der durch den Strahl $S_{12}S_{21}$ parallel zur Ebene $\alpha_3$ gelegten Ebene mit den Tetraederkanten $a_1$ und $a_2$ sind, so erweisen sich leicht die Diagonalen des Parallelogramms $R_1S_{12}R_2S_{21}$ als die vom Punkte $S_3$ der Curve $h^3$ ausgehenden Treffstrahlen der genannten Kantenpaare. Die in $S_3$ an die Curve $h^3$ gezogene Tangente $s_3$ ist also parallel zur Asymptotenebene $\alpha_3$, weil sie gemäss dem angeführten Satze in der zu $\alpha_3$ parallelen Ebene $R_1S_{12}R_2S_{21}$ liegt.

Nach einem weiteren Satze über das Schmiegungstetraeder** gehen die Schmiegungsebenen der beiden Punkte der Curve $h^3$, welche auf einem Treffstrahle der Kanten $b_1$ und $b_2$ liegen, durch einen diesem zugeordneten

* Bewiesen in meiner Dissertation § 11, 5.

** A. a. O. § 23.

Treffstrahl derselben Tetraederkanten. Die Gerade $S_{12}S_{21}$ hat mit der Curve $h^3$ den Punkt $S_3$ und, weil sie zur Geraden $a_3$ parallel ist, ihren unendlich fernen Punkt gemein. Da nun die Schmiegungsebene $\alpha_3$ des letzteren Curvenpunktes die Geraden $b_1$ und $b_2$ in $B_{12}$ bezw. $B_{21}$ schneidet, so ist $S_3B_{12}B_{21}$ die Schmiegungsebene $\sigma_3$ der Curve $h^3$ im Punkte $S_3$. Die Gerade $B_{12}B_{21}$ enthält ersichtlich den Punkt $N_3$; daher geht die Ebene $\sigma_3$ durch die Mittellinie $M_3N_3$ des Dreiecks $\delta$, also auch durch dessen Schwerpunkt $M$. Die analogen Betrachtungen lehren, dass die Schmiegungsebenen der Curve in den Punkten $S_1$ und $S_2$ die beiden anderen Mittellinien des Dreiecks $\delta$ enthalten. Nebenbei zeigt sich an der Figur:

Die von der Schmiegungsebene $\sigma_i$ und der Asymptote $a_i$ auf den in der Asymptotenebene $\alpha_i$ enthaltenen Kanten des Prismas $\Delta$ abgeschnittenen Strecken werden durch die beiden anderen Asymptoten der Curven $h^3$ halbirt und sind daher gleich dem doppelten Asymptotenabstande $a$ der Curve.

Für die Folge wollen wir die Punkte $S_i$ die Scheitel, die Ebene $\mu$ die Median- oder Centralebene, die Geraden $M_iN_i$ die Medianen, den Punkt $M$ den Mittel- oder Schwerpunkt der Curve $h^3$ nennen.

Die vierfache Mannigfaltigkeit der Curven des Systems $h^3$ zeigt sich hier nochmals, indem man jeden Punkt der Schwerpunktsachse $p$ des Prismas $\Delta$ zum Mittelpunkte ($\infty^1$), jede durch ihn gelegte Ebene zur Medianebene einer Systemcurve annehmen ($\infty^2$) und dann noch die Länge der Asymptotendistanz beliebig ($\infty^1$) festsetzen kann. Dann ist die Curve bestimmt, aber zweideutig, weil die Enden der Asymptotendistanzstrecken in zweifacher Weise durch die Asymptoten verbunden gedacht werden können. Setzt man nur die Stellung der Centralebene und die Länge des Asymptotenabstandes fest, so erhält man zwei einfach unendliche Systeme unter einander congruenter Curven $h^3$.

7. Die Centralebene $\mu$ der cubischen Systemcurve $h^3$ enthält die Mittelpunkte aller ($\infty^2$) Flächen zweiter Classe, welche dem Schmiegungsebenentorsus der Curven $h^3$ einbeschrieben werden können. Die Mittelpunkte der von der Tangentendeveloppablen von $h^3$ in die Schmiegungsebenen dieser Curven eingeschnittenen Hyperbeln ($h^2$) liegen in der Centralebene $\mu$ auf derjenigen Ellipse $e^2$, welche den Mittelpunkt $M$ von $h^3$ zum Mittelpunkte hat und die Asymptotenebenen $\alpha_i$ der Curve in den Mitten $N_i$ der Seiten des Dreiecks $\delta$ berührt.

Herr Reye erwähnt in einer vor einiger Zeit erschienenen Abhandlung* eine „Centralebene $\delta$" der cubischen Raumcurve, welche dadurch charakterisirt

* „Der gegenwärtige Stand unserer Kenntniss der cubischen Raumcurven, *übersichtlich* dargestellt," in der Festschrift der mathematischen Gesellschaft in *Hamburg* 1890 S. 54.

ist, dass in ihr die Mittelpunkte der dem Schmiegungsebenentorsus der Curve einbeschriebenen Flächen zweiter Classe liegen — und zwar die Mittelpunkte der zu Kegelschnitten ausgearteten in einem Kegelschnitte, der für die cubische Hyperbel eine Ellipse ist. Wir haben daher nur noch zu beweisen, dass unsere „Medianebene $\mu$“ mit der Reye'schen „Centralebene $\delta$“ identisch ist, und dass die in ihr enthaltene Mittelpunktsellipse $e^2$ die in obigem Satze angegebene Lage hat.

Die in der Asymptotenebene $\alpha_1$ enthaltene Hyperbel $h^2$ hat die $h^3$-Asymptote $a_1$ ebenfalls zu einer Asymptote, und die Prismenkanten $p_2$ und $p_3$ sind parallele Tangenten derselben. Daher liegt der Mittelpunkt dieser Hyperbel $h^2$ in der Mitte der Strecke $A_{12}A_{13}$, also im Punkte $N_1$ auf der Medianebene $\mu$. Ebenso liegen die Mittelpunkte der in den Asymptotenebenen $\alpha_2$ und $\alpha_3$ enthaltenen Hyperbeln $h^2$ in den Punkten $N_2$ bezw. $N_3$. Folglich ist $\mu$ die von Herrn Reye als „Centralebene $\delta$“ charakterisirte Ebene.

Die Geraden $s_3$ und $B_{12}B_{21}$ sind parallele Tangenten der in der Schmiegungsebene $\sigma_3$ enthaltenen Hyperbel $h^2$, und zwar berührt letztere dieselben in den Punkten $S_3$ bezw. $N_3$ — in $N_3$, weil durch diesen Punkt die Asymptote $a_3$ der Ebene $\alpha_3$ geht. Somit liegt der Mittelpunkt der in $\sigma_3$ enthaltenen Hyperbel ($h^2$) in der Mitte $L_3$ der Strecke $S_3N_3$. Da aber, wie früher bewiesen, $S_3N_3 = 4MN_3$ ist, so ist $L_3M = MN_3$. Aehnliches lässt sich bezüglich der Mittelpunkte der in den Ebenen $\sigma_1$ und $\sigma_2$ enthaltenen Hyperbeln ($h^2$) zeigen. Diese Mittelpunkte mögen $L_1$ und $L_2$ heissen. Somit enthält die Mittelpunktsellipse $e^2$ die sechs Punkte $L_i$ und $N_i$, und der Punkt $M$ ist ihr Mittelpunkt.

Die parallelen Sehnen $N_1N_2$ und $L_1L_2$ der Ellipse $e^2$ werden, wie aus der Configuration ersichtlich, von dem Durchmesser $L_3N_3$ derselben halbirt. Daher berührt die Ellipse im Punkte $N_3$ die zu diesen Sehnen parallele Seite $M_1M_2$ des Dreieckes $\delta$. Analog lässt sich zeigen, dass sie in den Punkten $N_1$ und $N_2$ die beiden anderen Seiten des Dreiecks $\delta$ berührt.

Aus den a. a. O. von Herrn Reye angeführten Eigenschaften der Centralebene $\mu$ ergiebt sich für unsere Systemcurven noch Folgendes:

Der Mittelpunkt $M$ der Curve $h^3$ ist die reelle Mitte der beiden conjugirt imaginären Punkte, in welchen die Schwerpunktsachse $p$ des Prismas $\Delta$ der Curve $h^3$ begegnet. Die beiden imaginären Schmiegungsebenen der Curve in jenen Punkten gehen durch die unendlich ferne Gerade der Ebene $\mu$.

Die Bisecante $p$ der Curve $h^3$ ist also der unendlich fernen Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen in dem der Curve zugehörigen linearen Nullsysteme zugeordnet, und die Median-

ebene $\mu$ ist der unendlich fernen Ebene in Bezug auf die Curve $h^3$ conjugirt.*

8. Die Tangente $s_i$ der Curve $h^3$ im Scheitelpunkte $S_i$ ist zugleich Tangente des Cylinders $\gamma^3$ in demselben Punkte. Nach den Sätzen des § 6 ist daher die Tangentialebene dieses Cylinders längs derjenigen seiner Erzeugenden, welche den Punkt $S_i$ enthält, parallel zur gegenüber liegenden Ebene des Prismas $\Delta$. Die drei so bevorzugten Erzeugenden des Cylinders, welche in den die Kanten $p_i$ des Prismas mit dessen Schwerpunktsachse $p$ verbindenden Ebenen enthalten sind, wollen wir die Scheitelerzeugenden desselben nennen. Auf ihnen liegen die Scheitelpunkte aller Curven des Systems $(h^3)$. Schneiden wir das Prisma $\Delta$ und den Cylinder $\gamma^3$ durch eine beliebige Ebene, so ergiebt sich für die Schnittcurve $c^3$, die wir schon oben als ausgeartete Curve $(h^3)$ bezeichnet haben, Folgendes:

Auf jeder der drei Mittellinien des Asymptotendreiecks $\delta$ einer Curve $c^3$ (allgemein gesprochen: einer ebenen unicursalen Curve dritter Ordnung mit drei reellen Wendeasymptoten) liegt ausser dem im Schwerpunkte $M$ dieses Dreiecks befindlichen Doppelpunkte der Curve noch ein weiterer Punkt (Scheitelpunkt) $S_i$ derselben so, dass der Abstand $S_iM$ nach Länge und Richtung gleich der betreffenden Mittellinie, gemessen vom Dreieckspunkte nach der gegenüber liegenden Seite hin, ist. Die Tangente $s_i$ der Curve $c^3$ im Punkte $S_i$ ist parallel der gegenüber liegenden Wendeasymptote derselben (Fig. 4).

Die Curve $c^3$ besteht als Doppelpunktscurve dritter Ordnung aus einem einzigen Zuge. Da derselbe keine der drei Wendeasymptoten im endlichen Gebiete der Ebene durchschneiden kann, die Punkte $S_i$ aber innerhalb der Scheitelwinkel des Dreiecks $\delta$ liegen, so folgt, dass die gesammte Curve $c^3$ — abgesehen von ihrem isolirten Doppelpunkte $M$ — in drei Zweigen innerhalb dieser Scheitelwinkel liegt. Daraus ergiebt sich:

Der Cylinder $\gamma^3$, also auch jede Curve des Systems $(h^3)$ liegt innerhalb der drei zum Prisma $\Delta$ gehörigen Scheitelwinkelräume.

9. Zu jeder cubischen Raumcurve erhält man bekanntlich ein lineares Nullsystem, wenn man jeder Ebene denjenigen ihrer Punkte zuordnet, in welchem sich die drei von der Raumcurve innerhalb der Ebene osculirten Ebenen schneiden. Das Nullsystem erzeugt durch die in ihm sich selbst zugeordneten Strahlen, zu welchen u. A. die Tangenten und Schmiegungsstrahlen der Raumcurve gehören, einen linearen Complex. Die Hauptachse dieses Complexes geht durch den Nullpunkt der unendlich fernen Ebene, also durch den unendlich fernen Schnittpunkt der drei Asymptotenebenen $\alpha_i$ einer Curve $h^3$. Sie ist daher den Schnittstrahlen $p_i$ dieser

---

* *Reye* a. a. O. S. 54.

Ebenen parallel. Während somit die Richtung der Hauptachse für alle Curven unseres Systems $(h^3)$ dieselbe ist, ändert sich ihr Ort je nach der Richtung der Asymptoten $a_i$ der Curven $(h^3)$. Denn bekanntlich ist die senkrechte Entfernung $q$ der Hauptachse von einem der Leitstrahlen des Nullsystems, also speciell von den Asymptoten der Curve $(h^3)$ durch die Gleichung:

III) $$q \, tang \, \varphi = c^*$$

mit der Tangente desjenigen Winkels $\varphi$ verbunden, den der betreffende Leitstrahl mit der Richtung der Hauptachse bildet. $c$ ist eine für das Nullsystem und den Complex charakteristische Constante, mit der wir uns noch wiederholt beschäftigen werden. Wir wollen die Hauptachse des mit der vorliegenden Curve des Systems $(h^3)$ verbundenen Complexes als Hauptnullachse $h$ dieser Curve bezeichnen. Es ist also zunächst festgestellt:

Die Hauptnullachse $h$ der Curve $h^3$ ist parallel zu den Kanten und der Schwerpunktsachse des Prismas $\Delta$.

Nimmt man den Ort der Hauptachse und die Constante $c$ als gegeben an, so kann man eine zugehörige Curve des Systems $h^3$ successive entstehen lassen, sobald man einen ihrer Punkte kennt. Man legt in letzterem, auf dem Cylinder $\gamma^3$ gegebenen Punkte $P$, die Tangentialebene $\tau$ an den Cylinder, bestimmt deren Abstand $q$ von der Hauptachse $h$ und sodann nach der obigen Formel die Richtung der in $\tau$ enthaltenen Tangente $t$ der Curve $h^3$. Die Tangente liefert den nächstfolgenden Punkt, $P'$, der Curve. Von diesem gehen wir nun in derselben Weise zum zweitfolgenden Punkte über u. s. f.

Die sämmtlichen in der Tangentialebene $\tau$ des Cylinders $\gamma^3$ enthaltenen Parallelen zur Tangente $t$ sind Leitstrahlen des Nullsystems. Denn da die Ebene $\tau$ zur Hauptnullachse $h$ parallel ist, so liegt ihr Nullpunkt unendlich fern. Denkt man sich nun in der angegebeneu Weise die sämmtlichen Leitstrahlen, welche in allen Tangentialebenen des Cylinders $\gamma^3$ enthalten sind, construirt, und reiht man dann die Schnitte je zweier in benachbarten Tangentialebenen liegender Leitstrahlen fortschreitend an einander, so erhält man ausser der ersten Curve $h^3$ noch unendlich viele weitere, welche alle der ersten congruent sind (man kann sich dieselben auch durch Verschiebung der ersten Curve auf dem Cylinder in der Richtung seiner Erzeugenden entstanden denken). Da nun die Verbindungsebene zweier aufeinander folgenden Tangenten einer Raumcurve die letztere im Schnittpunkte der beiden Tangenten osculirt, und da andererseits die Tangenten hier Leitstrahlen des Nullsystems sind, ihr Schnittpunkt somit der Nullpunkt ihrer Verbindungsebene ist, so folgt:

---

* Reye, Geometrie der Lage II. Theil 10. Vortrag.

Durch das Nullsystem einer Curve des Systems $h^3$ werden auch die einfach unendlich vielen ihr congruenten Curven des Systems in sich selbst transformirt, und man kann, um das Nullsystem der ersteren Curve zu erhalten, von einer beliebigen der letzteren ausgehen.

Die Hauptnullachse kann, da ihre Richtung beim Systeme $(h^3)$ bestimmt ist, noch zweifach unendlich viele Lagen, die Constante $c$ einfach unendlich viele Werthe annehmen, und zu jedem bestimmten unter den hiernach in dreifach unendlicher Mannigfaltigkeit auftretenden Nullsystemen gehören einfach unendlich viele congruente Curven $h^3$. Damit ist nochmals erwiesen, dass es $\infty^4$ Curven $h^3$ auf dem Cylinder $\gamma^3$ giebt.

**10.** Zwischen der Länge $a$ der Asymptotenweite einer Curve $(h^3)$ und der Constante $c$ des zur Curve gehörigen Nullsystems findet die einfache Beziehung statt:

IV) $$3a.c = 2J,$$

wo $J$ den Flächeninhalt desjenigen Dreiecks bedeutet, in welchem das Prisma $\Delta$ von einer beliebigen, zu seiner Kantenrichtung **senkrechten** Ebene durchschnitten wird.

$Q$ sei ein beliebiger Punkt der Hauptnullachse $h$ einer Curve $(h^3)$, und $q_1$, $q_2$, $q_3$ seien die senkrechten Abstände dieses Punktes von den Seitenflächen des Prismas $\Delta$, den Asymptotenebenen $\alpha_i$. Das Dreieck $\varepsilon$, in welchem die Ebene der drei Lothe das Prisma schneidet, habe die Seitenlängen $l_1$, $l_2$, $l_3$. Die drei Asymptoten-Distanzstrecken (§ 4) bilden mit den von ihnen auf den Asymptoten $a_i$ selbst abgegrenzten Strecken, deren Längen wir vorübergehend mit $a_i$ bezeichnen wollen, einen geschlossenen Streckenzug. Als positiven Richtungssinn setzen wir für die Strecken $l_i$ und $a_i$ denjenigen fest, welcher sich bei der Umlaufung des Dreiecks bezw. Streckenzuges nach der Folge des Indices ergiebt; dagegen mögen die Asymptotenweiten, deren absolute Länge mit $a$ bezeichnet werden soll, bei solcher Umlaufung negativ werden. Daraus folgt dann sofort, dass die Summe der Projectionen der drei Strecken $a_i$ auf eine der Kanten des Prismas auch dem Vorzeichen nach gleich $3a$ ist:

$$a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2 + a_3 \cos\varphi_3 = 3a.$$

$\varphi_i$ sei der Winkel, welchen die Strecke $a_i$ mit den ihr anliegenden Asymptoten-Distanzstrecken bildet.

Die Strecke $q_i$ ist gleich dem Abstande der Asymptote $a_i$ von der Hauptnullachse. Daher besteht die Formel (§ 10):

$$q_i \,.\, \operatorname{tang}\varphi_i = c,$$

und wir können somit die obige Gleichung in folgende umwandeln:

$$q_1 a_1 \cos\varphi_1 \operatorname{tang}\varphi_1 + q_2 a_2 \cos\varphi_2 \operatorname{tang}\varphi_2 + q_3 a_3 \cos\varphi_3 \operatorname{tang}\varphi_3 = 3ac,$$

aus welcher sich ergiebt:

$$q_1 a_1 \sin\varphi_1 + q_2 a_2 \sin\varphi_2 + q_3 a_3 \sin\varphi_3 = 3ac,$$

oder:

$$q_1 . l_1 + q_2 . l_2 + q_3 . l_3 = 3ac.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt den doppelten Inhalt $J$ des Dreiecks $\varepsilon$ dar. Demnach haben wir:

$$2J = 3ac,$$

aus welcher Formel sich ergiebt, dass die Asymptotenweite einer Curve des Systems $(h^3)$ nur von der **Constante** des dieser Curve zugehörigen Nullsystems abhängig ist.

Denn der Inhalt des Dreiecks $\varepsilon$ ist eine für das ganze vorliegende System $(h^3)$ constante Grösse. Bei der Verwendung der gewonnenen Gleichung werden die über die Vorzeichen oben gemachten Bemerkungen zu berücksichtigen sein.

**11.** Die Curve $h^3$ wird aus ihren unendlich fernen Punkten durch drei hyperbolische Cylinder zweiter Ordnung projicirt. Die Achsen dieser drei Cylinder sollen die Centralen $a'_i$ der Curve $h^3$ genannt werden, weil die drei Schnittpunkte der Curve mit einer beliebigen durch eine solche Achse gelegten Ebene gleichen Abstand von der Achse haben.

Jede der drei Centralen $a'_i$ der Curve $h^3$ begegnet zweien von den drei Asymptoten $a_i$ der Curve. Die Treffpunkte der Centralen mit den Asymptoten theilen die von den Kanten $p_i$ des Prismas $\Delta$ auf letzteren abgegrenzten Strecken in drei gleiche Theile. Die Centrale $a'_i$ ist der Asymptote $a_i$ parallel (Fig. 5).

Beweis. Die Centrale $a'_1$ ist der Schnitt der beiden Asymptotenebenen desjenigen Cylinders, der die Curve $h^3$ aus dem unendlich fernen Punkte der Asymptote $a_1$ projicirt. Damit ist der letzte Theil des Satzes bewiesen. Jene Asymptotenebenen sind nun die durch die Asymptoten $a_2$ und $a_3$ parallel zu $a_1$ gelegten Ebenen. Die erstere derselben schneide $a_3$ in $C_{31}$, $p_2$ in $D_2$, die letztere $a_2$ in $C_{21}$, $p_3$ in $D_3$. Dann ist $C_{21}C_{31}$ die Schnittlinie der beiden Ebenen, also die Centrale $a'_1$. Betrachten wir an der Figur die Dreiecke $A_{32}D_2C_{31}$ und $A_{31}A_{21}C_{31}$, so finden wir leicht, dass

$$A_{32}D_2 = 2A_{32}A_{12} = 2A_{21}A_{31},$$

also:

$$A_{32}C_{31} = 2C_{31}A_{31},$$

und bei Betrachtung der Dreiecke $A_{23}D_3C_{21}$ und $A_{31}A_{21}C_{21}$, dass

$$A_{23}D_3 = 2A_{23}A_{13} = 2A_{31}A_{21},$$

also:

$$A_{23}C_{21} = 2C_{21}A_{21}$$

ist. Ebenso ergeben sich als die beiden anderen Centralen der Curve $h^3$ die Geraden $a'_2 \equiv C_{32}C_{12}$ und $a'_3 \equiv C_{13}C_{23}$, wo unter $C_{32}$, $C_{12}$, $C_{13}$, $C_{23}$ diejenigen auf den Asymptoten $a_i$ gelegenen Punkte zu verstehen sind, welche den Bedingungen genügen:

$$A_{31}C_{32} = 2C_{32}A_{32}, \quad A_{13}C_{12} = 2C_{12}A_{12},$$
$$A_{12}C_{13} = 2C_{13}A_{13}, \quad A_{21}C_{23} = 2C_{23}A_{23}.$$

**12.** Wenn ein ebenes Feld $\sigma$ in seiner Ebene durch eine Drehung von $180^0$ um einen beliebigen seiner Punkte in die neue Lage $\sigma'$ gebracht wird, so sind die Felder $\sigma$ und $\sigma'$ congruent und perspectivisch. Ihre Collineationsachse liegt unendlich fern und ihr Collineationscentrum, nämlich der Drehpunkt, ist die Mitte zwischen je zwei entsprechenden Punkten. Construirt man nun zu einem dem Felde $\sigma$ angehörenden Dreiecke $\delta$, dessen Schwerpunkt $M$ im Collineationscentrum liegt, das entsprechende Dreieck $\delta'$ im anderen Felde, so zeigt sich, dass die entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke parallel sind, und dass jede Seite des einen Dreiecks von den beiden sie durchschneidenden Seiten des anderen in drei gleiche Strecken zerlegt wird. Den Schwerpunkt und die Schwerpunkttransversalen haben die beiden Dreiecke gemeinsam. Wir wollen zwei in solcher gegenseitiger Lage befindliche Dreiecke $\delta$ und $\delta'$, homocentrale Dreiecke nennen. Die ebenen, unicursalen Curven dritter Ordnung $c^3$ und $c'^3$, deren Wendeasymptotendreieck $\delta$ bezw. $\delta'$ und deren Doppelpunkt $M$ ist, sollen conjugirte Curven heissen. Sie sind als entsprechende Curven der beiden Felder congruent, und auf jedem durch ihren gemeinsamen Doppelpunkt $M$ gelegten Strahle liegt der Doppelpunkt in der Mitte zwischen den beiden weiteren Schnittpunkten des Strahles mit den Curven (Fig. 4).

Durch Projection der Gesammtfigur aus einem unendlich fernen Punkte des Raumes erhalten wir zwei homocentrale Prismen, $\Delta$ und $\Delta'$, und die dazu gehörenden, zu einander conjugirten cubischen Cylinder $\gamma^3$ und $\gamma'^3$. Offenbar ist der Punkt, in welchem die gemeinsame Schwerpunktsachse $p$ der beiden Prismen von irgend einer Geraden getroffen wird, die Mitte zwischen den beiden weiteren Schnittpunkten dieser Geraden mit den Cylindern $\gamma^3$ und $\gamma'^3$. Die homocentralen Prismen und die zugehörigen conjugirten Cylinder werden von jeder Ebene in zwei homocentralen Dreiecken und den diesen zugehörigen conjugirten Curven geschnitten. — Legt man durch die Centralen $a'_i$ (§ 11) der Curve $h^3$ die zu den gegenüberliegenden Asymptotenebenen $\alpha_i$ dieser Curve parallelen Ebenen, $\alpha'_i$, so erhält man, wie aus dem in § 11 Gesagten leicht folgt, das zum Wendeasymptotenebenen-Prisma $\Delta$ der Curve $h^3$ homocentrale Prisma $\Delta'$. Auf dem zu diesem gehörigen, dem Cylinder $\gamma^3$ conjugirten Cylinder $\gamma'^3$ befindet sich das vierfach unendliche System $(h'^3)$ derjenigen cubischen räumlichen Hyperbeln, welche die Ebenen des Prismas $\Delta'$ zu Asymptotenebenen haben.

Jeder cubischen Hyperbel des einen dieser beiden Systeme ist eine cubische Hyperbel des anderen in der Art zugeordnet, dass die Centralen der ersteren Curve die Asymptoten der letzteren sind, und umgekehrt. Zwei in solcher wechselseitiger Beziehung stehende cubische Raum-Hyperbeln, welche wir *als conjugirte* bezeichnen wollen, haben dieselben unendlich

fernen Punkte und gleiche Asymptotenweite $a$. Die Schwerpunktsachse $p$ der homocentralen Prismen ist offenbar für beide eine ideelle Bisekante.

Um den Satz zu beweisen, haben wir nur die asymptotische Lage der Geraden $a'_i$ auf dem Prisma $\Delta'$ nachzuweisen.

Die Ebene $a_1 a'_2$ ist, weil $a'_1 \| a_1$ und $a_2 \| a'_2$, parallel zur Ebene $a'_1 a_2$. Die beiden Ebenen schneiden auf dem Strahle $p_3$ die von den Asymptoten $a_1$ und $a_2$ eingeschlossene Asymptotenweite der Curve $h^3$, auf dem Schnittstrahle $p'_3$ der Ebenen $\alpha'_1$ und $\alpha'_2$ des Prismas $\Delta'$ aber die von den Geraden $a'_1$ und $a'_2$ begrenzte Strecke ab. Wegen des Parallelismus der Geraden $p_3$ und $p'_3$ sind diese beiden Strecken gleich. Ebenso sind die von den Geradenpaaren $a'_2$, $a'_3$ und $a'_3$, $a'_1$ auf den Kanten $p'_1$ und $p'_2$ abgegrenzten Strecken gleich den von den Asymptotenpaaren $a_2$, $a_3$ bezw. $a_3$, $a_1$ auf den Kanten $p_1$ und $p_2$ eingeschlossenen Asymptoten-Distanzstrecken der Curve $h^3$. Da nun die drei Asymptotendistanzen der letzteren Curve gleiche Länge $a$ haben, so sind die auf den Kanten des Prismas $\Delta'$ durch die Strahlen $a'_i$ abgegrenzten Strecken untereinander und mit der Asymptotenweite $a$ gleich. Man ersieht ferner leicht an der Figur, dass jene Strecken in jeder der drei Ebenen $\alpha'_i$ auf entgegengesetzten Seiten der in denselben enthaltenen Centralen $a'_i$ liegen. Demnach haben letztere auf dem Prisma $\Delta'$ asymptotische Lage; das heisst, es giebt auf dem Cylinder $\gamma'^3$ eine cubische Raum-Hyperbel $h'^3$, deren Asymptoten sie sind. Die Asymptoten der beiden Curven $h^3$ und $h'^3$ sind paarweise parallel; also haben die genannten Curven ihre unendlich fernen Punkte gemein. Da alle hier auftretenden Beziehungen zwischen den Curven $h^3$ und $h'^3$ ersichtlich wechselseitig umkehrbare sind, so sind die Asymptoten $a_i$ der Curve $h^3$ zugleich die Centralen für die Curve $h'^3$.

**13.** Zwei conjugirte cubische Raum-Hyperbeln $h^3$ und $h'^3$ haben die Centralebene $\mu$, den Mittelpunkt $M$ und die von den Mittelpunkten der in ihren Schmiegungsebenen enthaltenen Kegelschnitte erzeugte Ellipse $e^2$ gemeinsam. Ihre sechs Scheitelpunkte liegen auf einem in der Ebene $\mu$ befindlichen, die Cylinder $\gamma^3$ und $\gamma'^3$ auf deren Scheitelerzeugenden berührenden Kegelschnitte $f^2$, der den Punkt $M$ zum Mittelpunkte hat, sich paarweise diametral gegenüber.

Es lässt sich an der im § 11 benutzten Figur 5 leicht nachweisen, dass die Centralebene $\mu$ der Curve $h^3$ durch die Mittelpunkte der Strecken $C_{13}C_{23}$, $C_{32}C_{12}$, $C_{21}C_{31}$ geht. Aus der homocentralen Lage der Prismen $\Delta$ und $\Delta'$ folgt aber, dass diese Punkte zugleich die Mittelpunkte der auf den Geraden $a'_i$ von den Strahlen $p'_i$ abgeschnittenen Strecken sind. Nach dem zu Anfang des § 5 Gesagten ist daher die Ebene $\mu$ auch die Centralebene für die Curve $h'^3$, und der Spurpunkt $M$ der gemeinsamen Schwerpunktsachse der beiden Prismen in der Ebene $\mu$ ist der gemeinsame Mittel-

punkt der beiden conjugirten Raum-Hyperbeln. Die drei somit ebenfalls in der Ebene $\mu$ liegenden Scheitel der Curve $h'^3$ mögen mit $S'_i$ bezeichnet werden. Aus der homocentralen Lage der beiden Dreiecke:

$$\delta \equiv M_1 M_2 M_3 \quad \text{und} \quad \delta' \equiv M'_1 M'_2 M'_3,$$

in welchen die Ebene $\mu$ von den Prismen $\Delta$ und $\Delta'$ geschnitten wird, ergiebt sich sodann unter Berücksichtigung des im § 5 über die Scheitelpunkte Gesagten leicht, dass die sechs Scheitel $S_i$ und $S'_i$ paarweise den Punkt $M$ in die Mitte nehmen. Legen wir daher durch die drei Punkte $S_i$ den Kegelschnitt $f^2$, der den Punkt $M$ zum Centrum hat, so nimmt derselbe auch die Punkte $S'_i$ auf. Die Tangente des Kegelschnittes $f^2$ in einem der ersteren Scheitelpunkte, etwa in $S_1$, ist nun bekanntlich parallel den Sehnen von $f^2$, welche auf dem Durchmesser $S_1 S'_1$ des Kegelschnittes ihren Mittelpunkt haben. Zu diesen Sehnen gehören ersichtlich die zu den Ebenen $\alpha_1$ und $\alpha'_1$ parallelen Geraden $S_2 S_3$ und $S'_2 S'_3$. Demnach sind die Tangenten des Kegelschnittes $f^2$ in den Punkten $S_1$ und $S'_1$ parallel zu den gegenüber liegenden Asymptotenebenen der Raumcurven; sie liegen in den Scheitelberührungsebenen der beiden Cylinder $\gamma^3$ und $\gamma'^3$ — folglich berührt auch der Kegelschnitt selbst die Cylinder in den Scheitelpunkten $S_1$ und $S'_1$, und ebenso in den vier anderen Scheitelpunkten von $h^3$ und $h'^3$.

**14.** Die Osculationsebenen $\sigma_i$ und $\sigma'_i$ gegenüber liegender Scheitel der beiden conjugirten cubischen Hyperbeln $h^3$ und $h'^3$ fallen zusammen und die Tangenten der Curven in diesen Punkten sind parallel. Daher werden die beiden Curven aus ihrem gemeinsamen Mittelpunkte $M$ durch ein und denselben Kegel dritter Ordnung, $k^3$, der die gemeinsame Schwerpunktsachse $p$ der Prismen $\Delta$ und $\Delta'$ zur isolirten Doppelgeraden hat, projicirt.

Die Schmiegungsebene der Curve $h^3$ im Scheitelpunkt $S_1$ ist nach § 5 diejenige die Mittellinie $M_1 N_1$ des Dreiecks $\delta$ enthaltende Ebene, welche mit der Asymptote $a_1$ auf den von letzterer getroffenen Kanten $p_2$ und $p_3$ des Prismas $\Delta$ Strecken von der doppelten Länge des Asymptotenabstandes abschneidet. Die so bestimmte Ebene $\sigma_1$ geht, weil sie die Linie $M_1 N_1$ enthält, welche unter der Bezeichnung $M'_1 N'_1$ zugleich Mittellinie des Dreiecks $\delta'$ der Ebene $\mu$ ist, durch den Mittelpunkt der auf der Asymptote $a'_1$ von den Kanten $p'_2$ und $p'_3$ des Prismas $\Delta'$ abgeschnittenen Strecke. Da nun die Asymptote $a'_1$ parallel der Asymptote $a_1$ ist, und da die auf den Kanten $p'_2$ und $p_3$ (oder auf $p'_3$ und $p_2$) gelegenen Asymptoten-Distanzstrecken gleiche Länge und, von den Asymptoten $a_1$ und $a'_1$ aus gerechnet gleiche Richtung haben, so schneidet die Ebene $\sigma_1$ auch auf den Kanten $p'_2$ und $p'_3$ mit der Asymptote $a'_1$ Strecken von der doppelten Länge der *Asymptoten*weite ab. Sie ist daher auch die Schmiegungsebene $\sigma'_1$ des auf

der Mittellinie $M'_1 N'_1$ gelegenen Scheitelpunktes $S'_1$ der Curve $h'^3$. Analoges gilt von den beiden anderen Scheitelosculationsebenen der Curve $h^3$. — Die sechs, zu je zweien zusammenfallenden Schmiegungsebenen $\sigma_i$ und $\sigma'_i$ schneiden sich alle im gemeinsamen Mittelpunkte $M$ der beiden conjugirten Hyperbeln. Nun wird aber der Kegel dritter Ordnung, welcher eine der beiden Curven aus dem Mittelpunkte $M$ projicirt, durch die Bedingungen, die drei Ebenen $\sigma_i \equiv \sigma'_i$ längs der Mittellinien des Dreiecks $\delta$ zu Wendeberührungsebenen zu haben, und einen Doppelstrahl zu besitzen, eindeutig bestimmt. Daher ist er der Projectionskegel für die Curven $h^3$ und $h'^3$ zugleich.

Auf jeder Erzeugenden des gemeinschaftlichen Projectionskegels der beiden conjugirten cubischen Raum-Hyperbeln liegt der Mittelpunkt $M$ in der Mitte zwischen den von der Erzeugenden getroffenen Curvenpunkten.

Die Tangenten $s_i$ und $s'_i$ der Curven $h^3$ und $h'^3$ in den gegenüber liegenden Scheitelpunkten derselben sind die Schnitte der Ebene $\sigma_i \equiv \sigma'_i$ mit den parallelen Berühungsebenen der Cylinder $\gamma^3$ und $\gamma'^3$ längs gegenüber liegender Scheitelerzeugender der letzteren. Daher sind sie selbst parallel.

(Schluss folgt.)

# XII.

# Eine neue Ableitung des Satzes von Cayley-Brill über Punktsysteme auf einer algebraischen Curve.

Von

Benedict Sporer

in Stuttgart.

In folgender Arbeit geben wir auf Grund einfacher geometrischer Betrachtungen eine neue Ableitung des oben genannten Satzes über Punktsysteme auf algebraischen Curven*. Wir gehen dabei wesentlich davon aus, dass wir irgend eine Curve als einem Büschel angehörig ansehen und die Untersuchung auf Punktsysteme auf den Curven eines Büschels ausdehnen. Wir erhalten dadurch geometrische Oerter, deren Schnitte mit einer einzelnen der Curven uns dann auf die gewünschten Resultate führen.

## I.

Die Punkte einer Ebene seien so aufeinander bezogen, dass jedem Punkt $X$ derselben die Punkte einer Curve vom Grade $r$, $Y^r$ entsprechen, und dass umgekehrt jedem Punkte $Y$ wieder die Punkte $X$ einer Curve vom Grade $s$, $X^s$ zugeordnet sind.

Lassen wir den Punkt $X$ eine Curve vom Grade $n$ und dem Geschlecht $p$, $C^n_p$, durchlaufen, so werden die Punkte dieser Curve einander so zugeordnet sein, dass jedem Punkte $X$ der Curve $r.n-\gamma$ Punkte $Y$ und jedem Punkte $Y$ wieder $s.n-\gamma$ Punkte $X$ entsprechen, wobei $\gamma$ angiebt, wie viele Punkte die zu den Punkten $X$ und $Y$ gehörigen Curven $Y^r$ und $X^s$ in den Punkten $X$ und $Y$ selbst mit der Curve $C^n_p$ gemein haben. Weiter mögen unter den obigen $r.n-\gamma$ und $ns-\gamma$ Punkten noch $a$ und $b$ feste Punkte der Curve $C^n_p$ sein, durch die alle Curven $Y^r$ resp. $X^s$ für Pole auf $C^n_p$ hindurchgehen. Sind also:

$$r.n-\gamma-a=\alpha, \quad s.n-\gamma-b=\beta,$$

so entsprechen jedem Punkte $X$ auf $C^n_p$ $\alpha$ veränderliche Punkte $Y$ und ebenso jedem Punkte $Y$ wieder $\beta$ veränderliche Punkte $X$, oder auf der

* Den Satz fand Cayley durch Induction (Comptes rendus Bd. 62 S. 658). Herr Brill bewies ihn zuerst (Mathem. Annalen Bd. 6 S. 33; Bd. 7 S. 607 und Bd. 31 S. 374). Betreffs der weiteren Literatur verweisen wir auf Herrn Zeuthen's Abhandlung über diesen Satz in Mathem. Annalen Bd. 40 S. 99. Zu dieser Arbeit selbst wurden wir, was wir nicht unerwähnt lassen wollen, von Herrn Brill angeregt.

Curve selbst ist, wie wir uns kurz ausdrücken wollen, eine Correspondenz $(\alpha, \beta)$ von Punkten $X$ und $Y$ bestimmt.

Ausserdem können wir annehmen, dass die Curven $Y^r$ und $X^s$ allemal die zugehörigen Punkte $X$ und $Y$ zu $\gamma$fachen Punkten haben. Wäre dem nicht so, so könnten wir nämlich z. B. jede Curve $Y^r$ durch eine solche vom Grade $r + r_1$, $Y^{r+r_1}$, mit $X$ als $\gamma$fachem Punkte, ersetzen, die jetzt auf der Curve $C^n_p$ dieselben veränderlichen und festen Punkte bestimmen würde, wie $Y^r$, aber ausserdem noch durch $n.r_1$ weitere feste Punkte derselben ginge, die zudem noch auf einer festen Curve vom Grade $r_1$, $Y^{r_1}$ gelegen wären*. Und zwar ist dies immer möglich, indem wir nur $r_1$ hinreichend gross zu wählen haben.

Weiter wollen wir festsetzen, dass sich dies Entsprechen nicht auf die Punkte einer einzelnen Curve allein beziehe, sondern dass diese Zuordnung auf die sämmtlichen Curven eines Büschels ausgedehnt sei, und dass also jedem Punkte $X$ der Ebene durch eine ihm zugehörige Curve $Y^r$ $\alpha$ Punkte, $Y$ der durch $X$ gehenden Curve $C^n$ des Büschels und umgekehrt ebenso jedem Punkte $Y$ wieder $\beta$ Punkte $X$ entsprechen.

## II.

Ein Punkt $X$ bewege sich auf einer Geraden $G$, dann bestimmt allemal die zu jedem Punkt $X$ gehörige Curve $Y^r$ auf einer zweiten Geraden $H$ $r$ Punkte $Y_0$ und durch jeden Punkt $X$ sind also auch $r$ Geraden $XY_0$ bestimmt, die im Allgemeinen von $G$ verschieden sind. Die Gerade $XY_0$ kann aber auch auf die Gerade $G$ selbst zu liegen kommen und zwar geschieht dies für jeden Punkt $X_0$, der dem Schnittpunkte $A$ von $G$ und $H$ als Punkt $Y$ entspricht. Da es $s - \gamma$ solche Punkte giebt, so fällt also $XY_0$ auch $(s - \gamma)$mal auf $G$ selbst. Ebenso kommt $XY_0$ auch $r - \gamma$mal auf $H$ zu liegen und zwar ebenfalls für den Punkt $A$, aber diesen Punkt als Punkt $X$ angesehen. Durch jeden Punkt $X$ auf $G$ gehen also immer $(r + s - \gamma)$ Geraden $XY_0$, von denen aber nur $r$ von $G$ selbst verschieden sind, während die übrigen auf $G$ zu liegen kommen.

Wir erhalten also den Satz:

Der Ort der Geraden $XY_0$ ist eine Curve von der Classe $(r + s - \gamma)$ mit den Geraden $G$ und $H$ als $(s - \gamma)$- und $(r - \gamma)$fachen Tangenten.

Drehen wir jetzt die Gerade $H$ um den Schnittpunkt $A$ mit $G$, so wird sich zwar der Ort der Geraden $XY_0$ verändern, aber die Classe derselben wird unverändert bleiben. Dies wird auch dann noch so sein, wenn der Winkel beider Geraden sehr klein wird, oder aber, wenn er ganz verschwindet. Nun treten aber zwei Fälle auf, je nachdem $\gamma = 0$, $\gamma > 0$ ist.

* Vergl. auch Zeuthen, Mathem. Annalen Bd. 40 S. 106.

I. Fall: $\gamma = 0$. Die Curve zerfällt in lauter Curven der ersten Classe oder in $r+s$ Punkte, die alle auf $G$ liegen. Für jeden solchen Punkt geht aber die Curve $Y^r$, die ihm als Punkt $X$ zugehört, durch ihren Pol $X$ selbst, oder wir finden für diesen Fall:

Ist $\gamma = 0$, so liegen auf jeder Geraden $G$ $r+s$ Punkte $X$, für die die Curve $Y^r$ durch ihren Pol $X$ selbst geht, oder der Ort der Punkte $X$ (oder $Y$), für welche die Curven $Y^r$ (oder $X^s$) durch den Punkt $X$ (oder $Y$) selbst gehen, ist eine Curve vom Grade $r+s$, $R^{r+s}$.

II. Fall: $\gamma > 0$. Die durch jeden Punkt $X$ auf $G$ gehenden Geraden $XY_0$ werden theils zu Tangenten an die $\gamma$ durch den Punkt $X$ gehende Zweige der Curve $Y^r$ und zwar ist die Anzahl derselben gleich $\gamma$, theils aber fallen sie mit $G$ selbst zusammen. Durch jeden Punkt $X$ auf $G$ gehen also nur noch $\gamma$ von $G$ verschiedene Geraden $XY_0$, während die übrigen $r+s-2\gamma$ auf $G$ selbst zu liegen kommen; und wir erhalten also den Satz:

Bewegt sich ein Punkt $X$ auf einer Geraden $G$ und ziehen wir an jeden der $\gamma$ durch ihn gehenden Zweige der ihm zugeordneten Curve $Y^r$ die Tangenten, so ist der Ort dieser Tangente eine Curve von der Classe $r+s-\gamma$, $R^{r+s-\gamma}$, mit $G$ als $(r+s-2\gamma)$facher Tangente.

## III.

Ziehen wir in den $n$ Schnitten einer Curve $C^n$, welche einem Büschel von Curven durch $n^2$ Grundpunkte angehört, mit einer Geraden $G$ an die Curve $C^n$ die Tangenten, so ist der Ort dieser Tangenten allemal eine Curve der $(2n-1)^{\text{ten}}$ Classe $G^{2n-1}$, mit $G$ als $(2n-2)$facher Tangente*. Diese Curve hat mit der oben genannten Curve $R^{r+s-\gamma}$ ausser der Geraden $G$ selbst noch

$$(2n-1)(r+s-\gamma)-(2n-2)(r+s-2\gamma) = r+s+\gamma(2n-3)$$

Tangenten gemein. Einer jeden solchen Tangente entspricht aber eine Curve $Y^r$, die von der durch den Pol $X$ gehenden Curve $C^n$ des Büschels längs eines der $\gamma$ Zweige von $Y^r$ berührt wird. Auf jeder Geraden liegen also auch $r+s-\gamma(2n-3)$ solche Punkte, oder wir erhalten:

Soll die Curve $Y^r$ in dem zugehörigen Punkte $X$ die durch diesen Punkt gehende Curve des Büschels mit einem Zweige berühren, so ist der Ort dieses Berührungspunktes eine Curve vom Grade $r+s+\gamma(2n-3)$, $R^{r+s+\gamma(2n-3)}$.

Wählen wir den Punkt $X$ so, dass er in einen der Grundpunkte des Büschels zu liegen kommt, so wird jeder der $\gamma$ Zweige der Curve $Y^r$, die zu diesem Punkte $X$ gehört, im Grundpunkte von einer Curve des Büschels berührt, oder:

* Vergl. diese Zeitschrift Bd. 37 S. 69.

Jeder Grundpunkt des Büschels ist $\gamma$facher Punkt des Ortes $R^{r+s+\gamma(2n-3)}$.

Fällt auf die Gerade $G$ ein Doppelpunkt einer einzelnen Curve des Büschels, so zerfällt für diese Gerade die obige Curve $G^{2n-1}$ in diesen Doppelpunkt und eine Curve von der Classe $2n-2$, $G^{2n-2}$. In dem Doppelpunkt wird nämlich jede durch ihn gehende Gerade zur Tangente an die Curve $C^n$, welche diesen Doppelpunkt enthält, und zwar zählt dieser Punkt als Curve erster Classe nur einfach, was schon ein bestimmtes Beispiel, etwa $n=2$, zeigt. Die so erhaltene Curve $G^{2n-2}$ hat mit der obigen Curve $R^{r+s-\gamma}$ ausser der Geraden $G$ selbst noch

$$(r+s-\gamma)(2n-2)-(r+s-2\gamma)(2n-3)=r+s+\gamma(2n-4)$$

Tangenten gemein. Durch den Doppelpunkt sind also $\gamma$ solcher Tangenten absorbirt worden, oder wir finden:

Die Ortscurve $R^{r+s+\gamma(2n-3)}$ hat die $3(n-1)^2$ Doppelpunkte einzelner Curven des Büschels zu $\gamma$fachen Punkten.

Da weiter jeder mehrfache Punkt als Grenzfall einer bestimmten Anzahl von Doppelpunkten aufgefasst werden kann, so folgt auch noch, dass in ihm die zugehörige Curve $C^n$ mit der Ortscurve auch $2\gamma$mal soviel Punkte gemein hat, als er Doppelpunkte vertritt. Ist ebenso ein Punkt der Geraden $G$ ein Rückkehrpunkt einer einzelnen Curve $C^n$ des Büschels, so ist ausserdem jede der $\gamma$ durch ihn gehenden Tangenten an die $\gamma$ Zweige eine der Curve $Y^r$, die dem Rückkehrpunkt als Punkt $X$ zugehört, einmal als eigentliche Tangente einer $C^n$ mitzuzählen, wenn das unten gegebene Theorem allgemein giltig sein soll, da jetzt die Ortscurve die Rückkehrtangente mit $\gamma$ Zweigen berührt.

Hierbei haben wir bis jetzt stillschweigend vorausgesetzt, dass $\gamma>0$ ist, indem wir für $\gamma=0$ das hierher gehörige Resultat bereits in II. ausgesprochen haben.

## IV.

## Der Satz von Cayley-Brill.

Durch die Curven $Y^r$ und $X^s$ ist auf einer Curve $C^n_p$ vom Grade $n$ und vom Geschlecht $p$ eine Correspondenz $(\alpha, \beta)$ von Punkten $X$ und $Y$ bestimmt und es kommt dann allemal

$$\alpha+\beta+2\gamma p \text{ mal}$$

vor, dass ein Punkt $X$ mit einem seiner conjugirten Punkte $Y$ zusammenfällt.

Beweis. I. Fall $\gamma=0$. Wir sahen in II., dass für diesen Fall der Ort der Punkte $X$, für die die zugehörige Curve $Y^r$ durch den Punkt $X$ selbst geht, eine Curve vom Grade $r+s$, $R^{r+s}$ ist. Diese Curve hat mit irgend einer Curve $C^n_p$ des Büschels $n(r+s)$ Punkte gemein, und jedem solchen Punkt $X$ entspricht ein Punkt $Y$, der mit $X$ zusammenfällt.

Geht die Curve $Y^r$ durch einen festen Punkt der Curve $C^n{}_p$, so geht für diesen Punkt als Punkt $X$ auch die zu ihm gehörige Curve $Y^r$ durch denselben oder dieser Punkt gehört ebenfalls der Ortscurve $R^{r+s}$ an, und zwar ist dieser Punkt als uneigentliche Lösung von den $n(r+s)$ Punkten abzuziehen. Da es $a$ solche Punkte auf der Curve giebt, und ebenso auch $b$ Punkte, durch welche alle Curven $X^s$ für Punkte $Y$ auf $C^n{}_p$ gehen, so ist die Anzahl der obigen Punkte nur noch:

$$nr + ns - a - b = \alpha + \beta.$$

II. Fall: $\gamma > 0$. Die oben gefundene Curve $R^{r+s+\gamma(2n-3)}$ hat mit jeder einzelnen Curve $C^n{}_p$ des Büschels von Curven $C^n$ durch $n^2$ Grundpunkte ausser den Grundpunkten und den $\delta$ Doppelpunkten noch

$$n(r+s) + n\gamma(2n-3) - \gamma n^2 - 2\gamma\delta = (nr-\gamma) + (ns-\gamma)$$
$$+ \gamma(n^2 - 3n + 2 - 2\delta) = \alpha + \beta + 2\gamma p$$

Punkte gemein, wobei wir $nr - \gamma = \alpha$, $ns - \gamma = \beta$ gesetzt haben. Geht auch hier die Curve $Y^r$ durch einen festen Punkt der Curve $C^n{}_p$, so haben wir nur den Punkt $X$ sich dem festen Punkte nähern zu lassen, bis er mit ihm zuletzt zusammenfällt; wodurch ohne Weiteres folgt, dass in diesem Punkt die Curven $Y^r$ und $C^n{}_p$ $(\gamma+1)$ Punkte gemein haben; oder aber, dass dieser Punkt ebenfalls auf der Ortscurve gelegen und dass für ihn die obige Anzahl $\alpha + \beta + 2\gamma p$ um eins zu verkleinern ist. Und zwar ist es gleichgiltig, ob der Punkt von Anfang an ein fester Punkt der Curven $Y^r$ war, oder ob er es erst durch die in I. erwähnten Aenderungen geworden ist. Gleiches gilt für feste Punkte der Curve $C^n{}_p$, durch welche die Curven $X^s$ gehen müssen, das heisst, die obige Formel hat auch ihre Giltigkeit, wenn die Anzahlen der veränderlichen Punkte $X$ und $Y$, die sich gegenseitig entsprechen,

$$\alpha = nr - \gamma - a, \quad \beta = ns - \gamma - b$$

sind.

## V.

Wir erhielten die Anzahl $\alpha + \beta + 2\gamma p$ zusammenfallender Punkte $X$ und $Y$ als Schnitte der Curve $C^n{}_p$ mit einer Ortscurve vom Grade $r + s + \gamma(2n-3)$, welche die Grundpunkte des Büschels zu $\gamma$fachen Punkten hatte und auch durch die Doppelpunkte einer einzelnen Curve $C^n{}_p$ ging. Die Grundpunkte der Curven $C^n$ können wir aber als auf $\gamma$ anderen Curven des Büschels gelegen ansehen, das heisst, wir finden, dass die $n^2\gamma$ gemeinsamen Punkte der Ortscurve mit der Curve $C^n{}_p$ in den $n^2$ Grundpunkten als auf einer Curve vom Grade $n.\gamma$ gelegen angesehen werden können. Daraus folgt jedoch, dass die übrigen $nr + ns + n\gamma(n-3)$ gemeinsamen Punkte der Curve $C^n{}_p$ mit der Ortscurve allemal auf einer *Curve vom* Grade $r + s + \gamma(n-3)$ gelegen sind; oder:

Die erhaltenen $\alpha+\beta+2p\gamma$ Punkte $X$, die mit einem Punkte $Y$ zusammenfallen, liegen mit den $a$ und $b$ festen Punkten auf der Curve $C^n_p$ und deren Doppelpunkte allemal auf Curven vom Grade $r+s+\gamma(n-3)$*.

## VI.

Die Punkte $X$ und $Y$ einer Ebene seien einander in der oben festgesetzten Art durch Curven $Y^r$ und $X^s$ mit den zugehörigen Punkten $X$ und $Y$ als $\gamma$fachen Punkten zugeordnet. Ebenso seien die Punkte $X$ und $Z$ derselben Ebene einander durch Curven $Z^{r_1}$ und $X^{s_1}$ mit den Punkten $X$ und $Z$ als $\gamma_1$fachen Punkten conjugirt. Irgend einem Punkte $X$ entsprechen alsdann zwei Curven $Y^r$ und $Z^{r_1}$ mit dem Punkte $X$ als $\gamma$- und als $\gamma_1$fachem Punkte. Ausser dem Punkte $X$ selbst haben beide Curven noch weiter $r.r_1-\gamma.\gamma_1$ Punkte gemein. Nehmen wir wieder zwei Gerade $G$ und $H$ an und lassen den Punkt $X$ sich auf der Geraden $G$ bewegen, so bestimmt die zu ihm gehörige Curve $Y^r$ auf der Geraden $H$ allemal $r$ Punkte $Y_0$, und der Ort der Geraden $XY^0$ ist jetzt eine Curve von der Classe $(r+s-\gamma)$, $R^{r+s-\gamma}$, mit $G$ und $H$ als $(s-\gamma)$- und als $(r-\gamma)$fachen Tangenten. Ebenso bestimmen die zum Punkte $X$ auf $G$ gehörigen Curven $Z^{r_1}$ auf $H$ Punkt $Z_0$, so dass der Ort der Geraden $XZ_0$ eine Curve von der Classe $r_1+s_1-\gamma_1$, $R^{r_1+s_1-\gamma_1}$ ist mit $G$ und $H$ als $(s_1-\gamma_1)$- und $(r_1-\gamma_1)$fachen Tangenten. Beide Curven haben ausser der Geraden $G$ und $H$ selbst noch

$$(r+s-\gamma)(r_1+s_1-\gamma_1)-(r-\gamma)(r_1-\gamma_1)-(s-\gamma)(s-\gamma_1)=rs_1+r_1s-\gamma\gamma_1$$

Tangenten gemein. Auf jeder Geraden $H$ liegen also auch $rs_1+r_1s-\gamma\gamma_1$ Punkte, welche zugleich auf je einer Curve $Y^r$ und einer Curve $Z^{r_1}$ liegen, die einem und demselben Punkte $X$ auf $G$ conjugirt sind, oder wir finden:

Bewegt sich ein Punkt $X$ auf einer Geraden $G$, so ist der Ort der übrigen $(rr_1-\gamma\gamma_1)$ Schnittpunkte (ausser $X$ selbst) der beiden ihm conjugirten Curven $Y^r$ und $Z^{r_1}$ eine Curve vom Grade $rs_1+r_1s-\gamma\gamma_1$, $R^{rs_1+r_1s-\gamma\gamma_1}$.

Halten wir umgekehrt die Gerade $H$ fest und lassen die Lage der Gerade $G$ sich verändern, so folgt in ganz gleicher Weise:

Bestimmen wir zu jedem Punkte der Geraden $H$ die zu ihm gehörigen Curven $X^s$ und $X^{s_1}$, so ist der Ort der übrigen $(ss_1-\gamma\gamma_1)$ Schnitte beider Curven eine Curve vom Grade $rs_1+r_1s-\gamma\gamma_1$, $R^{rs_1+r_1s-\gamma\gamma_1}$, indem auf irgend einer beliebigen Geraden $G$ so viele gemeinsame Punkte solcher Curven $X^s$ und $X^{s_1}$ für dieselben Pole auf $H$ gelegen sind.

Die so erhaltene Curve hat mit irgend einer Curve des $n^{ten}$ Grades $n(rs_1+r_1s-\gamma\gamma_1)$ Punkte gemein, oder, lassen wir den Punkt $X$ auf einer

* Mathem. Annalen Bd. 7 S. 616.

Curve des $n^{\text{ten}}$ Grades $C^n$ sich bewegen, so liegen auf irgend einer Geraden $H$ auch $n(rs_1 + r_1 s - \gamma\gamma_1)$ Punkte, die zugleich als Punkte $Y$ und $Z$ denselben Punkten auf $C^n$ entsprechen; das heisst wir finden:

Bewegt sich ein Punkt $X$ auf einer Curve des $n^{\text{ten}}$ Grades $C^n$, so haben die zu ihm gehörigen Curven $Y^r$ und $Z^{r_1}$ ausser dem Punkt $X$ noch allemal $(rr_1 - \gamma\gamma_1)$ Punkte gemein und der Ort dieser Punkte ist eine Curve vom Grade $n(rs_1 + r_1 s - \gamma\gamma_1)$, $R^{n(rs_1 + r_1 s - \gamma\gamma_1)}$.

VII.

Wie wir oben sahen ist der Ort der Tangenten an die $\gamma$ Zweige der zu einem Punkte $X$ gehörigen Curve $Y^r$ für Punkte $X$ auf einer Geraden $G$ eine Curve von der Classe $(r + s - \gamma)$, $R^{r+s-\gamma}$, mit $G$ als $(r + s - 2\gamma)$-facher Tangente. Ganz ebenso gehört zu dem System von Curven $Z^{r_1}$ für Punkte $X$ auf derselben Geraden eine Curve der Classe $(r_1 + s_1 - \gamma_1)$, $R^{r_1+s_1-\gamma_1}$, mit $G$ als $(r_1 + s_1 - 2\gamma_1)$facher Tangente. Diese beiden Curven haben jedoch ausser der Geraden $G$ allemal noch

$$(r + s - \gamma)(r_1 + s_1 - \gamma_1) - (r + s - 2\gamma)(r_1 + s_1 - 2\gamma_1) = \gamma_1(r + s) + \gamma(r_1 + s_1) - 3\gamma\gamma_1$$

Tangenten gemein. Jeder solchen gemeinsamen Tangente entspricht aber ein solcher Punkt $X$ auf $G$, in dem die zu ihm gehörigen Curven $Y^r$ und $Z^{r_1}$ sich mit je einem Zweige berühren, oder in dem sie $\gamma\gamma_1 + 1$ Punkte mit einander gemein haben, oder wir finden:

Soll in einem Punkte $X$ die zu ihm gehörige Curve $Y^r$ die zu demselben Punkte gehörige Curve $Z^{r_1}$ mit einem Zweige berühren, so ist der Ort des Punktes $X$ eine Curve vom Grade $\gamma_1(r + s) + \gamma(r_1 + s_1) - 3\gamma\gamma_1$, $R^{\gamma_1(r+s)+\gamma(r_1+s_1)-3\gamma\gamma_1}$.*

VIII.

Setzen wir ferner zunächst wieder voraus die Curven $Y^r$, $X^s$, $Z^{r_1}$ und $X^{s_1}$ gehen für Punkte $X$, $Y$ und $Z$ auf einer Curve des $n^{\text{ten}}$ Grades $C^n$, durch keine festen Punkte auf dieser Curve und diese selbst habe keine mehrfachen Punkte, dann ist allemal:

$$\alpha = nr - \gamma, \quad \beta = ns - \gamma,$$

und

$$\alpha_1 = nr_1 - \gamma_1, \quad \beta_1 = ns_1 - \gamma_1.$$

Die in VI. gefundene Ortscurve $R^{n(rs_1+r_1s-\gamma\gamma_1)}$ schneidet nun die Curve $C^n_p$ in

$$n^2(rs_1 + r_1 s - \gamma\gamma_1)$$

Punkten; die sich aus folgenden Punktgruppen zusammensetzen, nämlich:

---

* Es ist dies eine der Curven, welche in Clebsch-Lindemann: „Vorlesungen über Geometrie" mit $X_\nu$ bezeichnet werden (Bd. 1 S. 733), während die *in VI. gefundene* Curve $R^{n(rs_1+r_1s-\gamma\gamma_1)}$ dort $M_\nu$ heisst.

1. $$n[\gamma(r_1+s_1)+\gamma_1(r+s)-3\gamma\gamma_1]$$

Punkten $X_0$, in denen je die zugehörige Curve $Y^r$ die Curve $Z^{r_1}$ mit je einem ihrer Zweige berührt, und zwar sind dies die Schnittpunkte der Curve $R^{\gamma(r_1+s_1)+\gamma_1(r+s)-3\gamma\gamma_1}$ mit $C^n{}_p$. (VII.)

2. $$(nr-\gamma)(ns_1-\gamma_1)+(nr_1-\gamma_1)(ns-\gamma)-2\gamma\gamma_1(n^2-3n+2)$$
$$=\alpha\beta_1+\alpha_1\beta-2\gamma\gamma_1 p$$

weiteren Punkten, womit die Anzahl gemeinsamer Punkte beider Curven gerade erschöpft ist. Dies giebt uns folgenden Satz:

Liegen auf einer algebraischen Curve $C^n{}_p$ (zunächst ohne Doppelpunkte) zwei Correspondenzen $(\alpha\beta)$ und $(\alpha_1\beta_1)$ von Punkten $X$ und $Y$ resp. $X$ und $Z$, so kommt es allemal

$$(\alpha\beta_1+\alpha_1\beta-2\gamma\gamma_1 p)\text{mal}$$

vor, dass ein Punktepaar $(X, Y)$ mit einem Punktepaar $(XZ)$ zusammenfällt.*

Geht die Curve $Y^r$ durch einen festen Punkt auf der Grundcurve $C^n{}_p$, so fällt $(s_1 n-\gamma_1)$mal ein Punkt $Y$ in ihn, der mit einem Punkte $Z$ vereinigt ist, und die beide demselben Punkte $X$ auf der Basis zugehören, und zwar ist dies der Fall für die Punkte $X$, welche $X^{s_1}$ für den festen Punkt als Punkt $Z$ auf der Curve $C^n{}_p$ ausser dem festen Punkt selbst noch ausschneidet. Für jeden festen Punkt auf $C^n{}_p$, durch den die Curven $Y^r$ gehen müssen, verkleinert sich also obige Anzahl um $(ns_1-\gamma)$ Einheiten; das heisst, die obige Formel ist auch noch giltig, wenn wir für $\alpha$ einen Werth einsetzen, der gleich der Anzahl von veränderlichen Punkten $Y$ ist, welche $X$ entsprechen. Analoges gilt auch für den Fall, dass die anderen Curven $X^s$, $Z^{r_1}$, $X^{s_1}$ durch feste Punkte auf der Curve $C^n{}_p$ gehen.

Hat die Curve $C^n{}_p$ einen mehrfachen Punkt, und zwar zunächst einen Doppelpunkt, so wird durch diesen kein Einfluss auf obige Formel ausgeübt und es ist also, wenn die Bedeutung von $p$ aufrecht erhalten werden soll, für jeden Doppelpunkt $2\gamma\gamma_1$ abzuziehen, oder die Formel geht für diesen Fall über in

$$\alpha\beta_1+\alpha_1\beta-2\gamma\gamma_1 p-2\gamma\gamma_1\delta.^{**}$$

In einem Doppelpunkte der Curve $C^n{}_p$ ist nämlich im Allgemeinen kein Punkte $Y$ mit einem Punkt $Z$, die denselben Punkten $X$ entsprechen, vereinigt, indem wir nicht annehmen können, dass demselben als Punkt $Y$ resp. als Punkt $Z$ zwei Curven $X^s$ und $X^{s_1}$ entsprechen, die einen weiteren Schnittpunkt auf $C^n{}_p$ haben. Will man aber doch die obige Formel:

---

* Brill a. a. O.

** Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen über Geometrie" Bd. 1 S. 732 u. 739.

$$\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta - 2\gamma\gamma_1 p$$

aufrecht erhalten, so muss man in jedem Doppelpunkte $2\gamma\gamma_1$ Punktepaare $XY$ fallen lassen, die in ihm mit $2\gamma\gamma_1$ Punktepaaren $XZ$ vereinigt sind, also als uneigentliche Lösungen für ihn mitzählen. Gleiches gilt für mehrfache Punkte auf $C^n_p$.

Ist $\gamma = 0$, oder $\gamma_1 = 0$, so erleidet die Ableitung des zweiten Satzes unwesentliche Aenderungen.

---

Hiermit haben wir die uns gestellte Aufgabe erledigt; eine weitere daran sich anknüpfende Kritik der einzelnen möglichen Fälle, die auftreten können, anzuschliesen, unterlassen wir, da dieselbe doch nur auf Wiederholungen bereits bekannter Betrachtungen führen würde.

Stuttgart, im Februar 1893.

## XIII.

# Ueber die Darstellung der Fundamental-Invarianten eines Systems linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit eindeutigen Coefficienten.

Von

Dr. E. GRÜNFELD

in Nikolsburg (Mähren).

---

Das Problem, die sogenannten „Fundamental-Invarianten" der linearen Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$1)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0,$$

das ist die Coefficienten der nach Potenzen von $\omega$ geordneten, zu dieser Differentialgleichung gehörigen Fundamentalgleichung:

$$2)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega & \alpha_{12} & \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \omega \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

als Functionen der Coefficienten $p_1, \ldots, p_n$ darzustellen, ist für den Fall, dass diese letzteren eindeutige Functionen der unabhängig Veränderlichen $x$ sind, zuerst von Herrn Hamburger (Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 83 und 84) und später von Herrn Poincaré (Acta mathematica t. 4) behandelt worden. In neuerer Zeit hat sich Herr Mittag-Leffler mit demselben Gegenstande beschäftigt (Acta mathematica t. 15) und für die erwähnte Darstellung der Fundamental-Invarianten als Functionen der Differentialgleichung 1) zwei Methoden angegeben, welche gewisse Beschränkungen, unter denen die Methode der Herren Hamburger und Poincaré Giltigkeit hatten, beseitigen und als allgemeine Lösungen des erwähnten Problems betrachtet werden können.

Die analoge Aufgabe, die Fundamental-Invarianten eines Systems linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit eindeutigen Coefficienten:

3) $$a(x)\frac{du_i}{dx} = a_{i1}(x)u_1 + a_{i2}(x)u_2 + \cdots + a_{in}(x)u_n \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

welchem bekanntlich gleichfalls eine Fundamentalgleichung von der Art der vorstehenden 2) zugehört, als Functionen der Coefficienten

$$a(x),\ a_{i1}(x), \ldots, a_{in}(x)$$

darzustellen, ist von mir im XXXVI. Bande dieser Zeitschrift insoweit behandelt worden, als ich nach der erwähnten Methode des Herrn Hamburger gezeigt habe, wie die in der Fundamentalgleichung 2) vorkommenden Grössen

$$\alpha_{ik}(i=1, \ldots, n;\ k=1, \ldots, n)$$

als Functionen der Coefficienten $a_{ik}(x)$ für die Punkte eines gewissen Bereiches dargestellt werden können. Die Giltigkeit dieser Darstellung war jedoch an gewisse Bedingungen geknüpft, denen der Radius dieses Bereiches genügen musste. Im Folgenden will ich nun zeigen, wie man sich von diesen Beschränkungen befreien und eine, für alle Punkte eines Kreisringes giltige Darstellung sowohl der Grössen $\alpha_{ik}$, als auch der von diesen in ganzer rationaler Weise abhängenden Fundamental-Invarianten erhalten kann, wenn man ein Verfahren anwendet, welches der zweiten von Herrn Mittag-Leffler angegebenen Methode analog ist.

Die Coefficienten $a(x)$ und $a_{ik}(x)$ von 3) sind, wie erwähnt, eindeutige Functionen der unabhängig Veränderlichen:

4) $$x = \varrho e^{i\varphi} \quad |x| = \varrho$$

und insbesondere sei:

$$a(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\mu),$$

so dass

5) $$a_1 = \varrho_1 e^{\varphi_1}, \quad a_2 = \varrho_2 e^{i\varphi_2}, \ldots, a_\mu = \varrho_\mu e^{i\varphi_\mu}$$

die singulären Punkte des Differentialgleichungs-Systems 3) vorstellen.

Es bezeichne $C$ einen Kreisring, der von zwei Kreisen begrenzt ist, die, vom Punkte $x=0$ aus beschrieben, durch einen oder mehrere der singulären Punkte 5) hindurch gehen, ohne dass einer dieser Punkte innerhalb $C$ selbst liegt.

Es sei $x_0$ ein beliebiger Punkt im Innern von $C$. Auf der Geraden, die durch diesen Punkt und den Punkt $x=0$ geht, nehme man innerhalb $C$ zwei Punkte $x_1$, $x_2$ an, so dass $|x_1| < |x_0| < |x_2|$. Man kann dann setzen:

6) $$x_1 = x_0 e^{-h}, \quad x_2 = x_0 . e^h,$$

also:

$$x_0 = \sqrt{x_1 x_2},$$

wo $h$ die positive Grösse bezeichnet:

7) $$h = \frac{1}{2} \log \frac{x_2}{x_1}.$$

Es bezeichne ferner $X$ einen Kreisring, begrenzt von zwei Kreisen, die vom Punkte $x=0$ aus mit beziehungsweise den Halbmessern $|x_1|$ und $|x_2|$ beschrieben werden, und welcher daher ganz innerhalb $C$ liegt.

Setzt man:

8) $$x = x_0 e^w$$

so wird der Kreisring $X$ der $x$ Ebene auf einen Streifen $S$ in der $w$ Ebene abgebildet, der von zwei parallelen Geraden gebildet wird, die in den Abständen $h$ und $-h$ vom Ursprunge auf der reellen $w$ Achse senkrecht stehen. Jedem Punkte $w$ im Innern oder auf der Grenze von $S$ entspricht ein und nur ein Werthepaar $\varrho$, $\varphi$, durch welches ein Punkt $x$ im Innern oder auf der Grenze von $X$ bestimmt wird, und umgekehrt: Jedem Werthepaare $\varrho$, $\varphi$, welches einen Punkt $x$ im Innern oder auf der Grenze von $X$ bestimmt, entspricht ein einziger Punkt im Innern oder auf der Grenze von $S$. Dem Punkte:

9) $$x = x_0 = \varrho_0 e^{\varphi_0 i}$$

insbesondere entspricht der Punkt $w = 0$ und umgekehrt.

Das durch die Substitution 8) in $w$ transformirte Differentialgleichungs-System 3) besitzt in der Umgebung des Punktes $w = 0$ eine Lösung (siehe diese Zeitschrift Bd. XXXVI S. 22):

10) $$u_1 = \sum_0^\infty {}_\lambda \left(\frac{d^\lambda u_1}{dw^\lambda}\right)_{w=0} \frac{w^\lambda}{\lambda!}, \ldots, \quad u_n = \sum_0^\infty {}_\lambda \left(\frac{d^\lambda u_n}{dw^\lambda}\right)_{w=0} \frac{w^\lambda}{\lambda!},$$

so dass

11) $$(u_1)_{w=0} = c_1, \ldots, \quad (u_n)_{w=0} = c_n,$$

wo $c_1, \ldots, c_n$ beliebig gegebene Werthe bezeichnen, und es ist ferner:

12) $$u_i(w, x_0) = c_1 u_{i1}(w, x_0) + c_2 u_{i2}(w, x_0) + \cdots + c_n u_{in}(w, x_0)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

wo:

13) $$u_{ik}(w, x_0) = \sum_0 {}_\lambda f^\lambda{}_{ik}(x_0) \frac{w^\lambda}{\lambda!} \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

ein System von $n$ linear unabhängigen Lösungen desselben Differentialgleichungs-Systems vorstellt. In demselben sind die $f^\lambda{}_{ik}(x_0)$ Quotienten, deren Zähler additiv und multiplicativ aus den Ausdrücken:

$$x_0 a'_{ik}(x_0), \quad x^2_0 a''_{ik}(x_0), \ldots, x^\lambda_0 a^\lambda{}_{ik}(x_0) \qquad a^\lambda{}_{ik}(x_0) = \left(\frac{d^\lambda a_{ik}(x)}{dx^\lambda}\right)_{x=x_0}$$

zusammengesetzt sind, und deren Nenner eine Potenz von $a(x_0)$ ist; überdies ist:

14) $$f^0{}_{ii}(x_0) = 1 \quad \text{und} \quad f^0{}_{ik}(x_0) = 0, \quad \text{wenn} \quad i \gtrless k \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Da innerhalb des Streifens $S$ kein singulärer Punkt sich befindet, so ist der Radius des Convergenzkreises der Reihen 13) die Grösse 7):

7') $$h = \frac{1}{2} \log \frac{x_2}{x_1},$$

vorausgesetzt jedoch, dass von den beiden Punkten $x_1$ und $x_2$ wenigstens der eine auf der Grenze des Ringes $C$ liegt. Dieser Radius ändert sich

nicht, wenn $x_0 e^{ui}$ statt $x_0$ gesetzt wird, wo $u$ eine beliebige reelle Grösse bezeichnet. Wird aber $x_0 e^{ui}$ an Stelle von $x_0$ gesetzt, so verwandelt sich der aus 8) sich ergebende Werth von

$$w = log \frac{x}{x_0} \text{ in } w' = log \frac{x}{x_0} - iu = w - iu,$$

woraus hervorgeht, dass auch die Ausdrücke:

$$15) \qquad u_{ik}(w - iu, \; x_0 e^{iu}) \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

ein System linear unabhängiger Lösungen des in $w$ transformirten Gleichungssystems 3) bilden.

Es ist selbstverständlich, dass sowohl die Ausdrücke:

$$13') \qquad u_{ik}\left(log \frac{x}{x_0}, \quad x_0\right),$$

wo $log \frac{x}{x_0} = 1$ für $\varrho = \varrho_0$ und $\varphi = \varphi_0$, als auch:

$$15') \qquad u_{ik}\left(log \frac{x}{x_0 e^{iu}}, \quad x_0 e^{iu}\right),$$

wo $log \frac{x}{x_0 e^{iu}} = 1$ für $\varrho = \varrho_0$ und $\varphi = \varphi_0 + u$ ist, je ein System linear unabhängiger Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems 3) repräsentiren.

Es bezeichne nunmehr $g$ eine ganze positive Zahl, die hinlänglich gross ist, auf dass

$$16) \qquad \frac{2\pi}{g} < h$$

sei, wo $h$ durch Gleichung 7') bestimmt ist.

Alsdann liegt der Punkt $w = \frac{2\pi i}{g}$ jedenfalls noch im Convergenzgebiete der Reihen 13) und es ist daher:

$$17) \qquad u_{ik}\left(\frac{2\pi i}{g}, \; x_0\right) = \sum_0^\infty {}_\lambda \frac{f^\lambda{}_{ik}(x_0)}{\lambda!} \left(\frac{2\pi i}{g}\right)^\lambda = \beta_{ik};$$

ferner ist zufolge der Gleichungen 12):

$$u_1\left(\frac{2\pi i}{g}, \; x_0\right) = c_1 \beta_{11} + \cdots + c_n \beta_{1n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n\left(\frac{2\pi i}{g}, \; x_0\right) = c_1 \beta_{n1} + \cdots + c_n \beta_{nn}.$$

Bewegt sich daher die unabhängig Veränderliche vom Punkte $w = 0$ bis $w = \frac{2\pi i}{g}$, so finden die den Beziehungen 12) analogen statt:

$$u_1\left(w+\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{-\frac{2\pi i}{g}}\right)=(c_1\beta_{11}+\cdots+c_n\beta_{1n})u_{11}+\cdots$$
$$+(c_1\beta_{n1}+\cdots+c_n\beta_{nn})u_{1n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n\left(w+\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{-\frac{2\pi i}{g}}\right)=(c_1\beta_{11}+\cdots+c_n\beta_{1n})u_{n1}+\cdots$$
$$+(c_1\beta_{n1}+\cdots+c_n\beta_{nn})u_{nn}$$

oder:

$$18)\quad\begin{cases} u_1\left(w+\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{-\frac{2\pi i}{g}}\right)=(\beta_{11}u_{11}+\cdots+\beta_{n1}u_{1n})c_1+\cdots \\ \qquad\qquad +(\beta_{1n}u_{n1}+\cdots+\beta_{nn}u_{1n})c_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n\left(w+\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{-\frac{2\pi i}{g}}\right)=(\beta_{11}u_{n1}+\cdots+\beta_{n1}u_{nn})c_1+\cdots \\ \qquad\qquad +(\beta_{1n}u_{n1}+\cdots+\beta_{nn}u_{nn})c_n. \end{cases}$$

Andererseits folgt aus den Gleichungen 12):

$$19)\quad\begin{cases} u_1\left(w+\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{-\frac{2\pi i}{g}}\right)=c_1u_{11}\left(w+\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{-\frac{2\pi i}{g}}\right)+\cdots \\ \qquad\qquad +c_nu_{1n}\left(w+\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{-\frac{2\pi i}{g}}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n\left(w+\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{-\frac{2\pi i}{g}}\right)=c_1u_{n1}\left(w+\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{-\frac{2\pi i}{g}}\right)+\cdots \\ \qquad\qquad +c_nu_{nn}\left(w+\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{-\frac{2\pi i}{g}}\right), \end{cases}$$

ıer gelten zufolge 18) und 19) die Beziehungen:

$$u_{ik}\left(w+\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{-\frac{2\pi i}{g}}\right)=\beta_{1k}u_{i1}(w,x_0)+\cdots+\beta_{nk}u_{in}(w,x_0)$$
$$(i=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots,n).$$

Setzt man $x_0 e^{-\frac{2\pi i}{g}}$ anstatt $x_0$ und daher $w-\frac{2\pi i}{g}$ anstatt $w$, so gehen se Beziehungen, wenn noch statt der $\beta_{ik}$ ihre Werthe aus 17) gesetzt rden, über in:

$$20)\quad\begin{cases} u_{ik}(w,x_0)=u_{1k}\left(\frac{2\pi i}{g}\ \ x_0\right)u_{i1}\left(w-\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{\frac{2\pi i}{g}}\right) \\ \qquad +u_{2k}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0\right)u_{i2}\left(w-\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{\frac{2\pi i}{g}}\right)+\cdots \\ \qquad +u_{nk}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0\right)u_{in}\left(w-\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{\frac{2\pi i}{g}}\right) \\ \qquad\qquad (i=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots,n). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich unmittelbar die folgenden:

$$21)\begin{cases} u_{ik}\left(w-\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{\frac{2\pi i}{g}}\right)=u_{1k}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{\frac{2\pi i}{g}}\right)u_{i1}\left(w-2\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{2\frac{2\pi i}{g}}\right)+\\ \qquad +u_{nk}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{\frac{2\pi i}{g}}\right)u_{in}\left(w-2\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{2\frac{2\pi i}{g}}\right),\\ u_{ik}\left(w-2\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{2\frac{2\pi i}{g}}\right)=u_{1k}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{2\frac{2\pi i}{g}}\right)u_{i1}\left(w-3\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{3\frac{2\pi i}{g}}\right)+\\ \qquad +u_{nk}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{2\frac{2\pi i}{g}}\right)u_{in}\left(w-3\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{3\frac{2\pi i}{g}}\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ u_{ik}\left(w-(g-1)\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{(g-1)\frac{2\pi i}{g}}\right)=u_{1k}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{(g-1)\frac{2\pi i}{g}}\right)u_{i1}\left(w-2\pi i,\ x_0 e^{2\pi i}\right)+\\ \qquad +u_{nk}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{(g-1)\frac{2\pi i}{g}}\right)u_{in}\left(w-2\pi i,\ x_0 e^{2\pi i}\right)\end{cases}$$

$$(i=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots\ n).$$

Setzt man:

$$w-2\pi i=w'$$

und bemerkt, dass wegen $x_0 e^{2\pi i}=x_0$, $f^{\lambda}{}_{ik}(x_0 e^{2\pi i})=f^{\lambda}{}_{ik}(x_0)$, also, wie aus 13) hervorgeht:

$$u_{ik}(w',\ x_0 e^{2\pi i})=u_{ik}(w',\ x_0),$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen 20) und 21), wenn wieder $w$ statt $w'$ geschrieben wird, die Beziehung:

$$22)\begin{cases} u_{ik}(w+2\pi i,\ x_0)=\alpha_{1k}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0\right)u_{i1}(w,x_0)+\alpha_{2k}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0\right)u_{i2}(w,x_0)+\cdots\\ \qquad +\alpha_{nk}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0\right)u_{in}(w,x_0)\qquad (i=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots,n).\end{cases}$$

In derselben bedeuten die Grössen $\alpha_{ik}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0\right)$ die Coefficienten derjenigen Substitution, welche erhalten wird, wenn man nach einander die Substitutionen, deren Coefficienten:

$$u_{ik}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0\right),\quad u_{ik}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{\frac{2\pi i}{g}}\right),$$

$$u_{ik}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{2\frac{2\pi i}{g}}\right),\ldots,u_{ik}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{(g-1)\frac{2\pi i}{g}}\right)$$

sind, anwendet; es ist also, wenn $S_\varkappa$ die Substitution:

$$\left\{\begin{matrix} u_{11}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{\varkappa\frac{2\pi i}{g}}\right),\ldots,u_{1n}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{\varkappa\frac{2\pi i}{g}}\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ u_{n1}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{\varkappa\frac{2\pi i}{g}}\right),\ldots,u_{nn}\left(\frac{2\pi i}{g},\ x_0 e^{\varkappa\frac{2\pi i}{g}}\right)\\ \varkappa=0,\ 1,\ldots g-1\end{matrix}\right\}$$

*und* $S_\alpha$ die Substitution:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0\right), \ldots, \alpha_{1n}\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0\right) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{n1}\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0\right), \ldots, \alpha_{nn}\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0\right) \end{array}\right\}$$

bezeichnet:

$$S_a = S_0 S_1 \ldots S_{g-1}.$$

Da aber, wenn die Variable $w$ vom Punkte $w=0$ zum Punkte $w=\frac{2\pi i}{g}$, vom Punkte $w=\frac{2\pi i}{g}$ nach $w=2\frac{2\pi i}{g}$, von da nach $w=3\frac{2\pi i}{g}$ u. s. w. und schliesslich zum Punkte $w=g\cdot\frac{2\pi i}{g}=2\pi i$ sich bewegt, die Variable $x$ vom Punkte $x_0$ ausgehend einen geschlossenen Umkreis $K$ beschreibt, der vollständig innerhalb des Kreisringes $C$ liegt und daher dieselben singulären Punkte wie dieser umfasst, so folgt, dass die Elemente der Lösungen 13'):

$$U_{i1}(x) = u_{i1}\left(\log\frac{x}{x_0}, x_0\right), \quad U_{i2}(x) = u_{i2}\left(\log\frac{x}{x_0}, x_0\right), \ldots,$$
$$U_{in}(x) = u_{in}\left(\log\frac{x}{x_0}, x_0\right),$$

die dem Punkte $x=x_0$ für $x_0=\varrho_0 e^{i\varphi_0}$ entsprechen, sich bei diesem Umlaufe von $x$ in andere Elemente mit Hilfe der Substitution $S_a$ verwandeln. Die Coefficienten dieser Substitution: $\alpha_{ik}\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0\right)$ können, da wie aus 17) sich ergiebt:

$$u_{ik}\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0 e^{\varkappa\frac{2\pi i}{g}}\right) = \sum_0^\infty{}_\lambda \frac{f^\lambda_{ik}\left(x_0 e^{\varkappa\frac{2\pi i}{g}}\right)}{\lambda!}\left(\frac{2\pi i}{g}\right)^\lambda$$
$$(\varkappa = 0, 1, \ldots, g-1)$$

ist, in der Form dargestellt werden:

$$\text{23)} \qquad \alpha_{ik}\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0\right) = \sum_0^\infty{}_\lambda \varphi^\lambda_{ik}(x_0)\left(\frac{2\pi i}{g}\right)^\lambda,$$

wo die $\varphi^\lambda_{ik}(x_0)$ in unmittelbar ersichtlicher Weise aus den $f^\lambda_{ik}\left(x_0 e^{\varkappa\frac{2\pi}{g}}\right)$ hervorgehen.

Diese Grössen $\alpha_{ik}$ dienen zum Aufbau der dem Umkreise $K$ entsprechenden Fundamentalgleichung (siehe diese Zeitschrift Bd. XXXVI S. 25):

$$\left|\begin{array}{l} \alpha_{11}\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0\right) - \omega \ldots \alpha_{1n}\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0\right) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{n1}\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0\right) \quad \ldots \alpha_{nn}\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0\right) - \omega \end{array}\right| = 0.$$

Schreibt man letztere in der Form:

$$\omega^n + A_1\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0\right)\omega^{n-1} + A_2\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0\right)\omega^{n-2} + \cdots + A_n\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0\right) = 0,$$

so sind die Coefficienten:

$$A_1\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0\right) = A_1\left(\frac{2\pi i}{g}\right), \ldots, \quad A_n\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0\right) = A_n\left(\frac{2\pi i}{g}\right)$$

die eingangs erwähnten „Invarianten", und diese können, wie aus 23) hervorgeht, in der Form dargestellt werden:

$$24) \qquad A_\mu\left(\frac{2\pi i}{g}\right) = \sum_0^\infty{}_\lambda F^\lambda{}_{g\mu}(x_0)\left(\frac{2\pi i}{g}\right)^\lambda \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die $F^\lambda{}_{g\mu}(x_0)$ unmittelbar aus den $\varphi^\lambda{}_{ik}(x_0)$ erhalten werden.

Für $g = 1$ fallen die Ausdrücke 23) für die Substitutions-Coefficienten $\alpha_{ik}$ mit denjenigen zusammen, welche ich auf Seite 24 des citirten Aufsatzes nach der Methode des Herrn Hamburger entwickelt habe. Diese letzteren convergiren aber nur dann, wenn die Grösse $h$ in 7′) hinlänglich gross ist, auf dass man in 16) $g = 1$ annehmen kann. Und das ist es, wodurch die Allgemeinheit der dortigen Entwickelungen der $\alpha_{ik}$ beschränkt wird.

Da die $A_\mu\left(\frac{2\pi i}{g}\right)$ von $x_0$ unabhängig sind, so hat man zur Berechnung der $F^\lambda{}_{g\mu}(x_0)$ von den Grössen $\alpha_{ik}\left(\frac{2\pi i}{g}, x_0\right)$, daher auch von den $\varphi^\lambda{}_{ik}(x_0)$ und den $f^\lambda{}_{ik}\left(x_0 e^{\varkappa\frac{2\pi i}{g}}\right)$ nur die von $x_0$ freien Glieder beizubehalten, denn hierdurch fallen alle mit $x_0$ multiplicirten Glieder in den $F^\lambda{}_{g\mu}(x_0)$ weg und es reduciren sich diese letzteren Grössen auf die von $x_0$ freien Glieder derselben. Werden diese mit $F^\lambda{}_{gk}(0)$ bezeichnet, so ist also:

$$A_\mu\left(\frac{2\pi i}{g}\right) = \sum_0^\infty{}_\lambda F^\lambda{}_{gk}(0)\left(\frac{2\pi i}{g}\right)^\lambda \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

die eingangs erwähnte Darstellung der Invarianten. In derselben bezeichnet $g$ eine ganze positive Zahl, die blos der Bedingung unterliegt:

$$\frac{2\pi}{g} < \frac{1}{2}\log\frac{R_2}{R_1},$$

wo $R_2 = |x_2|$ und $R_1 = |x_1|$ die Halbmesser der beiden den Kreisring $C$ bildenden Kreise bezeichnen.

---

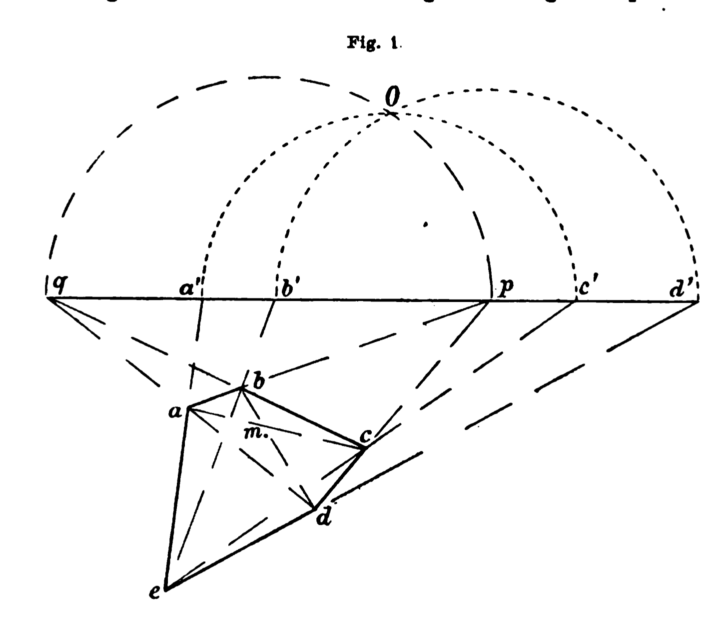
# Kleinere Mittheilungen.

## XIII. Ueber die Kegelschnitte um und in ein Fünfeck.

(Zur Ergänzung des Artikels auf S. 117 des 39. Jahrg.)

I. Die von mir angegebene Construction des durch fünf Punkte $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ bestimmten Kegelschnitts kommt darauf hinaus, das Fünfeck $abcde$ in das Viereck $abcd$ und in das Dreieck $ace$ zu zerlegen und die Figur so zu projiciren, dass $ABCD$ ein Rechteck und $ACE$ ein bei $E$ rechtwinkliges Dreieck wird. Des Folgenden wegen empfiehlt es sich,

Fig. 1.

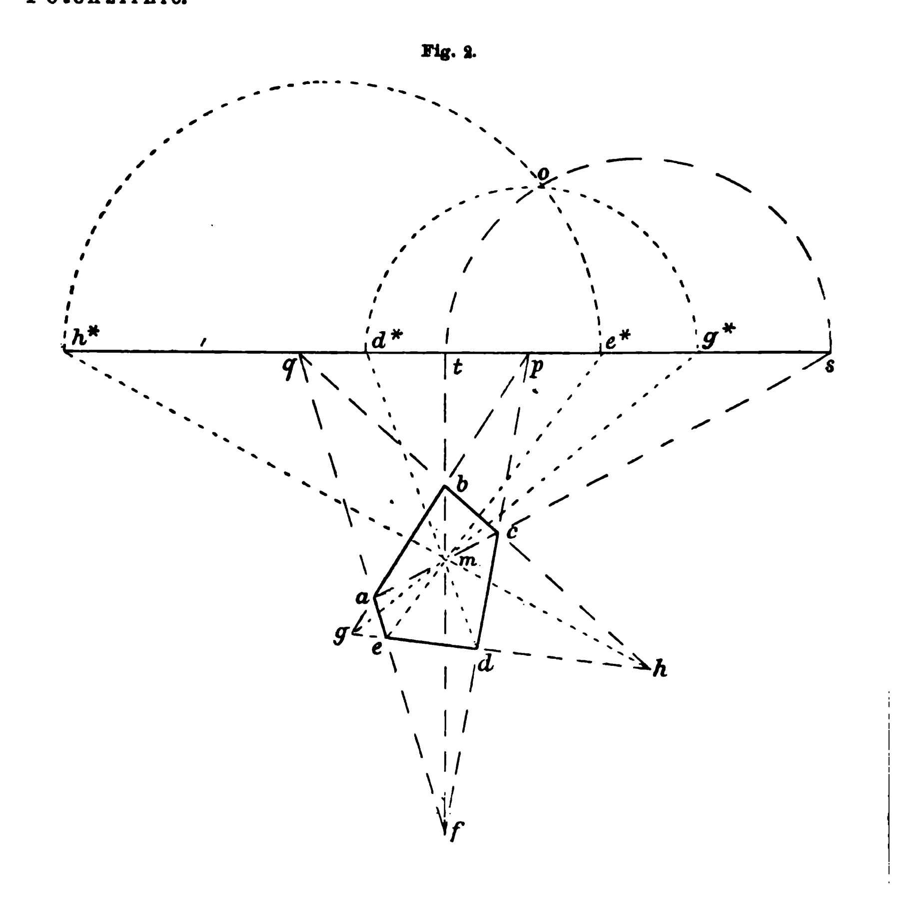



die Durchschnitte der Gegenseiten von $abcd$ mit $p$ und $q$, die Schnitte von $pq$ mit $ea$ und $ec$ durch $a'$ und $c'$ zu bezeichnen (Fig. 1), so dass der Durchschnitt der Halbkreise über $pq$ und $a'c'$ das Projectionscentrum $O$ giebt.

Statt des Dreiecks $ace$ über der Vierecksdiagonale $ac$ kann man auch das über der anderen Diagonale $bd$ stehende Dreieck $bde$ nehmen, dessen Seiten $eb$ und $ed$ die Polare $pq$ in $b'$ und $d'$ treffen; das Projectionscentrum ist dann der Durchschnitt der Halbkreise über $pq$ und $b'd'$. Da nun die Aufgabe nur eine Lösung hat, so müssen die Halbkreise über $pq$, $a'c'$ $b'd'$ durch einen und denselben Punkt gehen.

Dieses Ergebniss lässt sich in der folgenden bemerkenswerthen Form aussprechen: Wenn das Viereck *abcd* zu einem Vierseit mit den Diagonalen *ac*, *bd*, *pq* ergänzt wird, und wenn die Ecken *a*, *b*, *c*, *d* mittelst eines beliebigen Projectionscentrums *e* auf *pq* projicirt werden, wodurch die Punkte *a'*, *b'*, *c'*, *d'* entstehen, so besitzen die Kreise über *pq*, *a'c'*, *b'd'* eine gemeinschaftliche Potenzlinie.

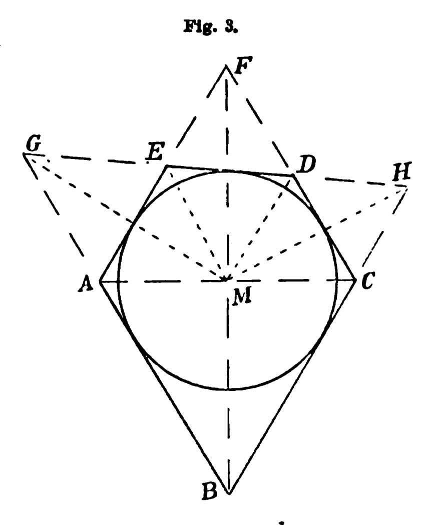
Fig. 2.




II. Um in das Fünfeck *abcde* (Fig. 2) den angehörigen Kegelschnitt zu construiren, möge wie früher durch Verlängerung von *ae* und *cd* das Viereck *abcf* gebildet werden, dessen Gegenseiten sich in *p* und *q* schneiden, und dessen Diagonalen *ac* und *bf* der Geraden *pq* in *s* und *t* begegnen. Nimmt man *pq* zum Horizont und wählt das Projectionscentrum willkürlich auf dem Halbkreise über *st*, so entspricht dem Vierecke *abcf* der Rhombus *ABCF* (Fig. 3). Um weiter zu kommen, habe ich auf S. 120 den Berührungspunkt der Tangente *de* und des eingeschriebenen Kegelschnitts bestimmt und dazu einen Specialfall des Brianchon-

schen Satzes benutzt; nach einer brieflichen Bemerkung des Herrn Professor Pelz (an der technischen Hochschule in Graz) lässt sich aber die Construction viel einfacher zu Ende führen mit Hilfe des elementaren Satzes: „Werden an einen um den Mittelpunkt $M$ beschriebenen Kreis zwei parallele Tangenten gelegt und diese von einer dritten Tangente in den Punkten $X$, $Y$ geschnitten, so stehen $MX$ und $MY$ senkrecht auf einander.“ Als parallele Tangenten kann man zunächst die Rhombusseiten $AB$, $CF$ betrachten und als Transversaltangente die Fünfecksseite $DE$, welche jene Tangenten in $D$ und $G$ schneidet; das Perspectivbild des rechten Winkels $DMG$ ist dann $dmg$. Bezeichnen $d^*$ und $g^*$ die Punkte, in welchen $md$ und $mg$ den Horizont treffen, so muss das Projectionscentrum auf dem Halbkreise über $d^*g^*$ liegen, also der Durchschnitt der Halbkreise über $st$ und $d^*g^*$ sein. Dem analog lassen sich $AF$ und $BC$ als Paralleltangenten ansehen, welche von $ED$ in $E$ und $H$ geschnitten werden. Im Perspectivbilde mögen nun $me$ und $mh$ den Horizont in $e^*$ und $h^*$ schneiden, der Durchschnitt der Halbkreise über $st$ und $e^*h^*$ giebt dann das Projectionscentrum $O$.

Fig. 3.




Dieses Resultat gestattet auch folgende Fassung:

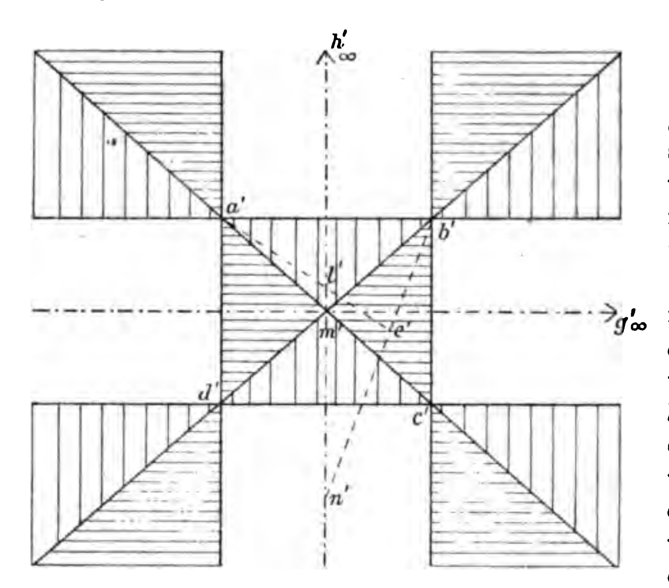
Wenn durch das Viereck $abcf$, dessen Diagonalen sich in $m$, und dessen Gegenseiten sich in $p$ und $q$ schneiden, eine Transversale gelegt wird, die $af$ in $e$, $cf$ in $d$, $ab$ in $g$ und $bc$ in $h$ begegnet, und wenn ferner die Gerade $pq$ mit den Strahlen $ma$, $mb$, $md$, $me$, $mg$, $mh$ der Reihe nach die Durchschnitte $s$, $t$, $d^*$, $e^*$, $g^*$, $h^*$ bildet, so besitzen die Kreise über den Durchmessern $st$, $d^*g^*$, $e^*h^*$ eine gemeinschaftliche Potenzlinie.

Schlömilch.

## XIV. Ueber die Projection von fünf Punkten einer Ebene in fünf Punkte eines Kreises.

Von der im Titel bezeichneten Aufgabe hat der Herr Herausgeber dieser Zeitschrift auf Seite 118 dieses Jahrganges eine ausserordentlich einfache und besonders dadurch ausgezeichnete Lösung gegeben, dass sie gar keine Lehrsätze aus der Theorie der Kegelschnitte voraussetzt. Einer Aufforderung des Herrn Herausgebers entsprechend, will ich die Ausführungen desselben durch den Beweis vervollständigen, dass jene Construction bei

jeder Lage der fünf Punkte durchführbar sei. Sind nämlich $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ die fünf Punkte, $g=(ab, cd)$, $h=(ad, bc)$, $i=(ae, gh)$ und $k=(ce, gh)$, so wird die Aufgabe durch diejenige Perspective gelöst, bei welcher einer der beiden Schnittpunkte der Kreise über $gh$ und $ik$ als Durchmessern Projectionscentrum, $gh$ Horizontlinie und irgend eine dieser parallele Gerade Grundlinie ist; denn sie verwandelt $abcd$ in ein Rechteck und $aec$ in ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse $ac$ eine Diagonale des Rechtecks ist. Soll aber diese Lösung eine reelle sein, so ist hierfür nothwendig und hinreichend, dass die Punkte $g$ und $h$ der Horizontlinie durch $i$ und $k$ getrennt werden. Das wird bei beliebiger Annahme und Anordnung der gegebenen fünf Punkte nicht immer der Fall sein, wie wir sogleich sehen werden. Verwandeln wir nämlich mit Hilfe irgend einer Perspective, bei welcher $gh$ Horizont und irgend ein Punkt auf dem Kreise über $gh$ als Durchmesser Projectionscentrum ist, das Viereck $abcd$ in ein Rechteck $a'b'c'd'$, wobei $g$ und $h$ nach $g'_\infty$ und $h'_\infty$ fallen, so werden $i$ und $k$ dann und nur dann durch $g$ und $h$ getrennt sein, wenn das Bild $e'$ von $e$




in einen der vier äusseren Flächenräume fällt, welche an die Seiten des Rechtecks anstossen; denn dann und nur dann werden, wie aus der Figur leicht ersichtlich ist, die Strahlen $e'a'$ und $e'c'$ in Beziehung auf die Parallelen $e'g'_\infty$ und $e'h'_\infty$ durch $e'$ zu den Seiten des Rechtecks in Nebenwinkeln liegen. Liegt aber $e$ z. B. innerhalb des Dreiecks $m'b'c'$, wo $m'$ die Mitte des Rechtecks ist, so schneidet $e'a'$ die $m'h'_\infty$ immer oberhalb von $m'$ in $l'$, $e'b'$, dagegen unterhalb in $n'$. Es sind demnach auch in der ursprünglichen Figur $m$ und $h$ durch $l$ und $n$ getrennt, die beiden Kreise über $mh$ und $ln$ als Durchmessern werden sich in zwei Punkten treffen, und jede Perspective, deren Projectionscentrum einer dieser Punkte und deren Horizontlinie $mh$ ist, wird das Viereck $abcd$ in ein Rechteck und das Dreieck $eab$ in ein rechtwinkliges verwandeln, dessen Hypotenuse eine *Diagonale* des Rechtecks ist. Ganz ebenso kann man verfahren, wenn $e'$

innerhalb des Dreiecks $a'm'd$, und der Scheitelwinkel der Winkel dieser beiden Dreiecke bei $b'$, $c'$, $d'$ und $a'$ liegt, wie das in der Figur durch Schraffirung angedeutet ist. Liegt endlich $e'$ innerhalb der beiden Dreiecke $a'b'm'$ und $c'd'm'$ oder der Scheitelwinkel ihrer Winkel bei $a'$, $b'$, $c'$ und $d'$, so wird man das Viereck $abcd$ in ein Rechteck und das Dreieck $ebc$ in ein rechtwinkliges verwandeln können, dessen Hypotenuse eine Diagonale des Rechtecks ist. In jedem Falle also wird man der Lage des Punktes $e$ entsprechend die übrigen vier Punkte so anordnen können, dass die von Herrn Schlömilch angegebene Construction ausführbar ist. Es ist natürlich nicht schwer, die jedem der Felder, in welche die Ebene durch die sechs Seiten des vollständigen Vierecks $abcd$ eingetheilt wird, entsprechende Anordnung dieser Punkte direct anzugeben, doch glaubten wir durch obige Reduction grössere Anschaulichkeit erreichen zu können.

Aachen. F. Schur.

---

### XV. Bestimmung des Näherungswerthes bez. Grenzwerthes eines Productes.

Es soll der Näherungswerth des Productes $U$:

$$1)\qquad U = a^{-\frac{m}{a-1}}\,U',$$

$$2)\qquad U' = \left(\frac{m-1}{1}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{m-2}{2}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{m-3}{3}+\frac{1}{a}\right)\cdots\left(\frac{1}{m-1}+\frac{1}{a}\right),$$

worin $a$ eine beliebige positive Zahl $\overline{\gtrless} 2$ und $m$ eine ganze positive Zahl ist, für grosse Werthe von $m$ gefunden werden.

Wir setzen:

$$3)\qquad \frac{1}{a}=\frac{1-\alpha}{2},\quad \frac{\alpha}{1+\alpha}=\beta,$$

so dass $\alpha$ und $\beta$ positive echte Brüche sind, dann ist:

$$\frac{m-k}{k}+\frac{1}{a}=\frac{2m-k}{2k}(1+\alpha)\left(1-\beta\frac{2m}{2m-k}\right);$$

dadurch nimmt $U'$, welches $m-1$ Factoren besitzt, die Form an:

$$4)\qquad U' = (1+\alpha)^{m-1}\,U''\,U''',$$

wo

$$5)\qquad U'' = \frac{(2m-1)(2m-2)\ldots(m+1)}{2\,.\,4\qquad\ldots(2m-2)},$$

$$6)\qquad U''' = \left(1-\frac{2\beta m}{2m-1}\right)\left(1-\frac{2\beta m}{2m-2}\right)\cdots\left(1-\frac{2\beta m}{m+1}\right).$$

Heben wir im Zähler und Nenner von $U''$ die gleichen Factoren fort und multipliciren dann oben und unten mit $1\,.\,3\,.\,5\ldots m$, falls $m$ ungerade, und mit $1\,.\,3\,.\,5\ldots(m-1)$, falls $m$ gerade ist, so erhalten wir in beiden Fällen:

7) $$U'' = 2^m \cdot \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots(2m)}.$$

und folglich, wie durch speciellere Betrachtung des **Wallis**'schen Productes sich ergiebt*:

8) $$U'' = 2^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \left(1 + \frac{1}{8m} - \frac{\vartheta}{8m^2}\right) \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Ferner ist, da Gleichung 3) zufolge, für alle endlichen Werthe von $v$, $\beta < \frac{1}{2}$, $2\beta < 1$ ist:

9) $$lg\, U''' = -\sum_1^{\infty} {}_k \frac{(2\beta m)^k}{k} \left(\frac{1}{(m+1)^k} + \frac{1}{(m+2)^k} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)^k}\right),$$

aber der präcisirten **Mac Laurin**'schen Summenformel gemäss erhält man nach Addition und Subtraction von $\frac{1}{m^k} + \frac{1}{(2m)^k}$:

$$\frac{1}{(m+1)^k} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)^k} = \int_m^{2m} \frac{dx}{x^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m^k} + \frac{1}{(2m)^k}\right)$$
$$+ \frac{1}{12} \frac{k}{m^{k+1}} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) - \frac{\Theta_k}{720} \frac{k(k+1)(k+2)}{m^{k+3}} \left(1 - \frac{1}{2^{k+3}}\right);$$
$$0 < \Theta_k < 1;$$

---

* Bezeichnen wir mit $Q$ den Bruch in 7) und mit $\sigma$ eine sogleich zu definirende Zahl, grösser als 1, so ist:

a) $$Q^2(2m+1) = \frac{2}{\pi}\sigma$$

und

$$\sigma = \frac{(2m+2)(2m+2)(2m+4)(2m+4)\ldots}{(2m+1)(2m+3)(2m+3)(2m+5)\ldots}$$

b) $$= \left(1 + \frac{1}{(2m+1)(2m+3)}\right)\left(1 + \frac{1}{(2m+3)(2m+5)}\right)\cdots$$

Sind nun $c_1 c_2 \ldots$ positive Zahlen, deren Summe $s$ kleiner als 1 ist, so ist das Product $P$:

c) $$P = (1+c_1)(1+c_2)\ldots$$

grösser als $1+s$, aber, da $1+c_1 < e^{c_1}$ etc. ist:

$$P < e^s = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \cdots$$

und da, für $s < 1$,

$$\frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!} + \cdots < \frac{s^2}{4},$$

so ist $P < 1 + s + \frac{3}{4}s^2$; wir können also, unter $\delta$ einen positiven echten Bruch verstehend,

d) $$P = 1 + s + \frac{3}{4}\delta s^2$$

setzen. Für das Product $\sigma$ ist, wie leicht zu erkennen,

$$s = \frac{1}{2(2m+1)},$$

oder, wenn wir unter $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$ Zahlen verstehen, welche sich, nach der *kleineren* Seite hin, wenig von $\frac{1}{m}$ unterscheiden:

worin:
$$\int\limits_m^{2m}\frac{dx}{x^k}=\begin{cases} lg\,2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{für } k=1,\\ \frac{1}{k-1}\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)\frac{1}{m^{k-1}} \quad \text{für } k\gtreqless 2.\end{cases}$$

Somit ist:

$$10)\quad \begin{cases} lg\,U'''=-m\left\{2\beta\,lg\,2+\sum_2^\infty{}_k\frac{(2\beta)^k-2\beta^k}{k(k-1)}\right\}+\frac{1}{2}\sum_1^\infty{}_k\frac{(2\beta)^k+\beta^k}{k}\\ \quad -\frac{1}{12m}\sum_1^\infty{}_k\left((2\beta)^k-\frac{1}{2}\beta^k\right)+\frac{\Theta'}{720m^3}\sum_1^\infty{}_k(k+1)(k+2)\left((2\beta)^k-\frac{1}{8}\beta^k\right),\end{cases}$$

worin $\Theta'$ ein Mittelwerth der $\Theta_k$ ist. Die erste der in 10) vorkommenden Summen hat wegen

$$\sum_2^\infty{}_k\frac{x^k}{k(k-1)}=x+(1-x)\,lg(1-x)$$

den Werth: $(1-2\beta)\,lg(1-2\beta)-2(1-\beta)\,lg(1-\beta)$; die anderen lassen sich ebenfalls leicht finden, und wir erhalten, wenn wir nun von $lg\,U'''$ zu $U'''$ übergehen und

---

$$s=\frac{1}{4m}-\frac{1}{8m^2}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{2}\right)$$

$$s^2=\frac{1}{16m^2}(1-\varepsilon_2)$$

und daher nach d):

$$\sigma=1+\frac{1}{4m}-\left\{\left(1\quad\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)-\frac{3}{8}\vartheta(1-\varepsilon_2)\right\}\frac{1}{8m^2}.$$

Hier liegt der Werth der $\{\}$ zwischen 1 und einer Grenze sehr nahe $\frac{5}{8}$ (indem $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ vernachlässigt werden); eine derartige Grösse möge mit $\varphi$ bezeichnet werden, dann ist, wegen

$$(1+a)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}a-\frac{a^2}{8}\left(1-\frac{\vartheta'}{2}a\right),\quad 0<\vartheta'<1$$

$$\sigma^{\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{1}{4m}-\frac{\varphi}{8m^2}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{8m}\left(1-\frac{\varphi}{2m}\right)-\frac{1}{128m^2}\left(1-\frac{\varphi}{2m}\right)^2\left(1-\frac{\varepsilon_3}{8}\right)$$
$$=1+\frac{1}{8m}-\frac{1}{16m^2}\left[\varphi+\frac{1}{8}\left(1-\varepsilon_4-\frac{\varepsilon_3}{8}\right)\right].$$

Der obere Grenzwerth der Klammer liegt unter $\frac{9}{8}$, und der untere etwas unter $\frac{6}{8}$, aber sicher über $\frac{5}{8}$, es ist also:

$$\sigma^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{8m}-\frac{\varphi'}{8m^2},\quad \frac{9}{16}>\varphi'>\frac{5}{16}$$

und durch Substitution dieses Werthes in die radicirte a) ergiebt sich unmittelbar der im Text angegebene Werth von $U''$, nur dass das Intervall, innerhalb dessen $\vartheta$ liegt, von 0 bis 1 auf $\frac{5}{16}$ bis $\frac{9}{16}$ beschränkt werden kann.

$$p = \frac{\beta(3-2\beta)}{24(1-\beta)(1-2\beta)}, \quad q = \frac{1}{720}\left(\frac{2}{(1-2\beta)^3} - \frac{1}{4(1-\beta)^3} - \frac{7}{4}\right)$$

setzen:

$$11)\quad U''' = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)(1-2\beta)}}\left(\frac{2^{2\beta}(1-2\beta)^{1-2\beta}}{(1-\beta)^{2(1-\beta)}}\right)^{-m} e^{-\frac{p}{m}+\frac{\Theta' q}{m^2}}$$

und mit Rücksicht auf 1), 4), 8):

$$\left\{\begin{aligned} U &= \frac{\sqrt{2}}{(1+\alpha)\sqrt{(1-\beta)(1-2\beta)\pi}}(2[1+\alpha])^m \\ &\times\left(\frac{2^{2\beta}(1-2\beta)^{1-2\beta}}{(1-\beta)^{2(1-\beta)}}\,a^{\frac{1}{a-1}}\right)^{-m}\left(1+\frac{1}{8m}-\frac{\Theta}{8m^2}\right)\cdot\frac{e^{-\frac{p}{m}+\frac{\Theta' q}{m^2}}}{\sqrt{2m+1}}.\end{aligned}\right.$$

Setzt man jetzt für $\alpha$ und $\beta$ die aus 3) folgenden Werthe:

$$\alpha = \frac{a-2}{a}, \quad \beta = \frac{a-2}{2(a-1)}$$

ein, so ergiebt sich, dass die Basis zum Exponenten $m$ mit der Basis zum Exponenten $(-m)$ denselben Werth $\frac{4(a-1)}{a}$ besitzt, dass das Product dieser Factoren also die Einheit ist; der constante Factor wird $\sqrt{\frac{a}{\pi}}$ und die Werthe von $p$ und $q$ vereinfachen sich zu:

$$12)\quad p = \frac{(a-2)(2a-1)}{24a}, \quad q = \frac{p}{120}\left\{4\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - 2\left(a+\frac{1}{a}\right) - 5\right\};$$

es wird demnach:

$$13)\quad U = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\left(1+\frac{1}{8m}-\frac{\Theta}{8m^2}\right)\frac{e^{-\frac{p}{m}+\frac{\Theta' q}{m^2}}}{\sqrt{2m+1}}, \quad 0 < \left\{\begin{matrix}\Theta\\ \Theta'\end{matrix}\right\} < 1,$$

womit die gestellte Aufgabe gelöst ist. — Dies Resultat gewinnt mit wachsendem $m$ an Genauigkeit, verliert solche aber mit wachsendem $a$. Ist jedoch $a \overline{\lessgtr} 14$, so ist $p < 1$ und $q:p < 6\frac{1}{8}$ und in diesem Falle erhalten wir folgende bezüglich der Schätzung des Fehlers übersichtlichere Gleichung:

$$14)\quad \left\{\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{a}{\pi}}\left[1+\left(\frac{1}{8}-p\right)\cdot\frac{1}{m}+\frac{\Theta''}{m^2}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{2m+1}}. \\ &\frac{3}{8} > \Theta'' > -\frac{17}{128}; \quad a \overline{\lessgtr} 14.\end{aligned}\right.$$

Z. B. folgt durch directe Berechnung und Vergleich mit Gleichung 14) für $a = e$ (wofür Verfasser der Formel zunächst bedurfte) und $m = 7$: $\Theta'' = -0{,}05586$ und für $a = 10$, $m = 18$: $\Theta'' = 0{,}14256$. — Aus 13) folgt für jedes endliche $a(\gtrless 2)$ der Grenzwerth:

$$15)\quad \lim_{m=\infty}\left\{a^{-\frac{m}{a-1}}\left(\frac{m-1}{1}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{m-2}{2}+\frac{1}{a}\right)\cdots\left(\frac{1}{m-1}+\frac{1}{a}\right)\cdot\sqrt{2m+1}\right\} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}.$$

*Königsberg*, im October 1893.

LOUIS SAALSCHÜTZ.

## XVI. Neue Herleitung des Additionstheorems für die elliptischen Integrale erster Gattung.

Im XVII. Jahrgang der Zeitschrift für Mathematik und Physik findet sich auf Seite 508 ein Artikel von Heinrich Schröter: „Bemerkung zu dem Sturm'schen Beweise des Additionstheorems für die elliptischen Integrale erster Gattung." Schröter giebt dabei verschiedene Methoden zur Auffindung des integrirenden Factors der Differentialgleichung:

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{\delta\psi}{\Delta\psi}=0$$

an, diese Methoden stimmen sämmtlich darin überein, dass die für den zu suchenden Factor $M$ aufgestellte partielle Differentialgleichung in zwei Theile zerlegt wird, indem die rationalen Glieder, ebenso wie die irrationalen Glieder unter sich, gleichgesetzt werden. Dass die beiden dabei für $M$ sich ergebenden Werthe unter einander übereinstimmen, erscheint mehr als Zufall, während zugleich zu bemängeln ist, dass bei jeder der Schröter'schen Methoden, auch bei der ersten die zu integrirende Differentialgleichung selbst vor der Hinzufügung des Factors $M$ in einer den Charakter des Kunstgriffs tragenden Weise verändert wird.

Die im Nachstehenden dargelegte Methode zur Auffindung des integrirenden Factors darf vielleicht den Vorzug einer grösseren Natürlichkeit für sich in Anspruch nehmen. Sie weicht von vornherein von dem Schröter'schen Verfahren insofern ab, als sie die elliptische Differentialgleichung nicht in der von Schröter benutzten trigonometrischen Form, sondern in der algebraischen Gestalt:

$$1)\qquad \frac{dx}{f(x)}+\frac{dy}{f(y)}=0$$

verwendet, bei der

$$f(x)=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

also:

$$f'(x)=\frac{-(1+k^2)x+2k^2x^3}{f(x)}$$

ist.

Für die Integralgleichung der Gleichung 1) wird durch die Analogie mit den entsprechenden, auf die trigonometrischen Functionen bezüglichen Gleichungen die Form nahegelegt:

$$2)\qquad M[xf(y)+yf(x)]=constans,$$

der Factor $M$ soll dann dadurch bestimmt werden, dass er als nothwendig symmetrische Function von $x$ und $y$ in seiner Abhängigkeit von den einfachsten symmetrischen Functionen dieser Grössen $x+y$ und $xy$ aufgefasst wird.

Zunächst ergiebt die Differentiation der Gleichung 2), wie leicht zu sehen:

$$0=\frac{dx}{f(x)}\left\{[xf(y)+yf(x)]\frac{dM}{dx}f(x)+M[f(y)+yf'(x)]f(x)\right\}$$
$$+\frac{dy}{f(y)}\left\{[yf(x)+xf(y)]\frac{\partial M}{\partial y}f(y)+M[f(x)+xf'(y)]f(y)\right\},$$

woraus wegen der Gleichung 1) folgt, dass die beiden mit

$$\frac{dx}{f(x)} \text{ und } \frac{\partial y}{f(y)}$$

multiplicirten Ausdrücke unter sich gleich sein müssen. Die Gleichsetzung derselben liefert bei leichter Umformung die Gleichung:

$$3)\left\{\begin{aligned}\frac{d\lg M}{dx}f(x)\{xf(y)+yf(x)\}+yf(x)f'(x)=\frac{\partial\lg M}{\partial y}f(y)\{yf(x)+xf(y)\}\\ +xf(y)f'(y).\end{aligned}\right.$$

Setzt man nun $x+y=u$, $xy=v$, so ist:

$$\frac{d\lg M}{\partial x}=\frac{d\lg M}{du}+y\frac{\partial\lg M}{dv},\quad \frac{d\lg M}{dy}=\frac{d\lg M}{du}+x\frac{\partial\lg M}{\partial v},$$

also:

$$4)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d\lg M}{du}[f(x)-f(y)][xf(y)+yf(x)]\\ &\qquad+\frac{\partial\lg M}{\partial v}[y^2\overline{f(x)}^2-x^2\overline{f(y)^2}]+yf(x)f'(x)-xf(y)f'(y)=0,\end{aligned}\right.$$

$$5)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d\lg M}{du}[f(x)-f(y)][xf(y)+yf(x)]\\ &\qquad+\frac{\partial\lg M}{\partial v}(x^2-y^2)(-1+k^2x^2y^2)+2k^2xy(x^2-y^2)=0,\end{aligned}\right.$$

$$6)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\lg M}{\partial u}[f(x)-f(y)][xf(y)+yf(x)]\\ &\qquad+(x^2-y^2)\left\{\frac{\partial\lg M}{\partial v}(-1+k^2v^2)+2k^2v\right\}=0.\end{aligned}\right.$$

Dieser Gleichung wird offenbar genügt durch die mit einander harmonirenden Annahmen:

$$7)\qquad \frac{d\lg M}{\partial u}=0\quad \frac{\partial\lg M}{\partial v}=\frac{2k^2v}{1-k^2v^2}.$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt dann, wenn man die Integrations-Constante mit $g$ bezeichnet, ohne Weiteres der bekannte Werth:

$$8)\qquad M=\frac{1}{g(1-k^2v^2)}=\frac{1}{g(1-k^2x^2y^2)}.$$

**Nordhausen.** F. PIETZKER, Gymnasialprofessor.

## XVII. Preisaufgaben der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft in Leipzig.

Für das Jahr 1894.

Die von Leverrier ausgeführte Bestimmung der säcularen Störungen der Bahnen, namentlich der inneren Planeten, hat bekanntlich unbefriedigende Resultate ergeben, insofern die Glieder der zweiten Näherung, welche nur ungenau und unter Umständen selbst grösser als die Glieder der ersten Näherung gefunden wurden, sich für die Berechnung der Störungen als unbrauchbar erwiesen haben. Dieses unbefriedigende Ergebniss, das in seinen weiteren Folgen mit gewissen Anomalien in der Bewegung des Mercur beziehungsweise seines Perihels zusammenzuhängen scheint, ist Leverrier* geneigt, der bisher befolgten Behandlungsweise zuzuschreiben, bei welcher in erster Näherung die Differentialgleichungen des Problems als linear betrachtet werden. Die Gesellschaft wünscht demgemäss

> eine neue Bestimmung der säcularen Störungen, wenigstens der Bahnen von Mercur, Venus, Erde und Mars, unter Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung,

mittelst einer einwurfsfreien Methode, bei welcher die von Leverrier angetroffene Schwierigkeit, welche gegen die Brauchbarkeit der erhaltenen Resultate sprechen würde, als beseitigt betrachtet werden kann.

Preis 1000 Mark.

Für das Jahr 1897.

Die von Monge, Ampère und Darboux herrührenden Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung finden bekanntlich nur für solche Gleichungen Anwendung, die mit anderen Gleichungen Lösungen gemein haben, welche nicht nur von arbiträren Constanten abhängen. Es geht andererseits aus Lie's Untersuchungen über unendliche Gruppen hervor, dass Gleichungen, die eine unendliche Gruppe von Berührungs-Transformationen gestatten, im Allgemeinen zu anderen Gleichungen in der soeben besprochenen Beziehung (Involutionsbeziehung) stehen**. Die Gesellschaft wünscht,

> dass die aus dieser Bemerkung fliessenden Integrations-Methoden entwickelt und an möglichst instructiven und vollständig durchgeführten Beispielen illustrirt werden.

Preis 1000 Mark.

---

* Recherches astronomiques Chap. IX art. 16 und Additions III S. 51.

** Vergl. Darboux, Journal de l'école normale 1870. — Lie, Berichte der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1891—1894.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Umschlage begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1894: Prof. Dr. H. Lipsius, Weststrasse Nr. 89) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die „Leipziger Zeitung" im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

**W. Roscher**, Präses.
**H. Lipsius. F. Zirkel. W. Scheibner. R. Leuckart.**
**W. Hankel. A. Leskien. E. Sievers. K. Lamprecht.**

---

**Berichtigung.**

In der Formel II (3. Heft S. 186) ist $\nu$ durch $m$ und in der Formel IV (3. Heft S. 187) ist $\varrho$ durch $m$ zu ersetzen.

XIV.

# Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.

Von

Dr. W. Heymann

in Chemnitz.

## II. Theil.

### Ergänzende Erörterungen.

In vorliegendem zweiten Theil sollen, wie schon in der Einleitung zum ersten Theil erwähnt, einige allgemeinere Erörterungen folgen, welche zur Vervollständigung der früheren Angaben dienen.

### A. Gleichungen mit binomischer Discriminante.

#### 1. Ueber den Ansatz im Allgemeinen.

Trinomische Gleichungen haben stets eine zweigliedrige Discriminante. Bezeichnet man letztere mit $\nabla$, so ist für

$$y^n + y^{n-s} + x = 0, \qquad \nabla = n^n(n-s)^{n-s}x^s - (-1)^n s^s,$$
$$y^n + xy^{n-s} + 1 = 0, \qquad \nabla = n^n(n-s)^{n-s} - (-1)^n s^s x^n.$$

Bei den quadrinomischen Gleichungen ist die Sache bedeutend complicirter; wir beschränken uns daher auf die Behandlung nachstehenden Falles:

$$1) \qquad [v^{2n} + 2(2n+p)av^n + (2n+p)b]v^p = x = \varphi(v), \quad p \gtrless 0.$$

Diese Gleichung ist in den Coefficienten zunächst ganz allgemein, in den Exponenten aber derartig specialisirt, dass die abgeleitete Gleichung

$$\varphi'(v) = \frac{dx}{dv} = 0$$

nach Art der quadratischen Gleichungen gelöst werden kann, ein Umstand, der grosse Vereinfachung herbeiführt.

Behufs Herstellung der Discriminante setze man $\varphi'(v) = 0$, also:

$$2) \qquad [v^{2n} + 2(n+p)av^n + bp]v^{p-1} = 0,$$

und nun ist aus 1) und 2) die Grösse $v$ zu eliminiren. Führt man den Werth von $v^{2n}$, wie er der letzten Klammergrösse entnommen wird, in 1) ein, so entsteht:

$$x = 2n(av^n + b)v^p$$

oder:

3) $$x^n = (2n)^n(at + b)^n t^p,$$

wobei $v^n = t$ gesetzt wurde. Da nun wegen 2) die quadratische Gleichung

4) $$t^2 + 2(n + p)at + bp = 0$$

vorliegt, so können $t^2, t^3, \ldots$, überhaupt alle Potenzen mit ganzen Exponenten linear in $t$ ausgedrückt werden, also muss sich 3) auf die Form

5) $$x^n = (2n)^n(At + B)$$

bringen lassen, wo $A$ und $B$ von $t$ unabhängig sind. Aber das Verhältniss $b : a^2 = \mu$, welches in die Coefficienten $A$ und $B$ eingeht, kann so bestimmt werden, dass $A = 0$, und auf diese Weise ist in der That $t$, also auch $v$ eliminirt.

Die Discriminante von 1) wird hierdurch binomisch; sie lautet bis auf einen numerischen Factor

6) $$\nabla = x^{p-1}[x^n - (2n)^n B]^2.$$

Der Factor $x^{p-1}$ muss mit Rücksicht auf die $p-1$ verschwindenden Wurzeln der Gleichung 2) hinzugefügt werden, und der zweite Factor zählt doppelt, weil das annullirte $A$ mit dem zweideutigen $t$ in Verbindung stand.

Die Gleichung 1) erscheint jetzt in den Coefficienten nicht mehr allgemein, weil $b = \mu a^2$ und $\mu$ rein numerisch ist; ausserdem bemerke man, dass jene Gleichung durch die Substitution

$$v = a^{\frac{1}{n}} w$$

in eine solche mit nur einem Parameter $x : a^{2+\frac{p}{n}}$ übergeht. Für $p$ kann man auch negative ganze Zahlen zulassen. In diesem Falle ändert der Parameter $x$ seine Stellung in der geordneten Gleichung, er tritt an $v^p$, während in der Discriminante 6) der Factor $x^{p-1}$ zu unterdrücken ist. Noch anders wird die Stellung von $x$ in der Gleichung 1), wenn wir $\frac{1}{w}$ an Stelle von $v$ setzen, dann geht der Parameter als Factor zur höchsten Potenz von $w$.

Was die Herstellung der Form 5) anlangt, so muss also die Identität

$$t^p(at + b)^n = At + B$$

durch stetes Zurückgreifen auf die Gleichung 4) erzeugt werden. Man kann dabei ganz elementar verfahren, d. h. linker Hand die höheren Potenzen so lange mittelst 4) herabdrücken, bis ein linearer Ausdruck erscheint. Uebersichtlicher wird der Vorgang auf folgende Art.

Es seien $t_1$ und $t_2$ die beiden Wurzeln von 4), dann muss

$$At_1 + B = t_1^p(at_1 + b)^n$$

sich: $$At_2 + B = t_2^p(at_2 + b)^n,$$

und

$$7)\quad \begin{cases} A = \dfrac{t_1^p(at_1+b)^n - t_2^p(at_2+b)^n}{t_1 - t_2} \\ B = -\dfrac{t_1^p t_2(at_1+b)^n - t_1 t_2^p(at_2+b)^n}{t_1 - t_2}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke enthalten nach Ausscheidung von $t_1 - t_2$ nur noch symmetrische Functionen der Wurzeln der Gleichung 4), sie sind also rational, und die Rechnung wird auch im Falle negativer $p$ nicht gestört.

Die Gleichung $A = 0$ hat, wie man sich leicht überzeugt, unter anderen stets die Wurzel:

$$8)\qquad bp = (n+p)^2 a^2,$$

und das zugehörige $B$ wird:

$$9)\qquad B = (-1)^p n^n p^{-n} (n+p)^{n+p} a^{2n+p}.$$

Es entspricht das dem Fall $t_1 = t_2$. Eine besondere Discussion der an sich interessanten Gleichung $A = 0$ würde an dieser Stelle zu weit führen. Wir wollen uns auf solche Fälle beschränken, in denen jene Gleichung den dritten Grad nicht übersteigt und also mit Verwendung der a priori bekannten Wurzel bequem gelöst werden kann.

Endlich sei noch eines Specialfalles der Gleichung 1) gedacht, welcher in unserem Ansatz nicht mit enthalten ist. Für

$$b = (2n+p)a^2$$

wird nämlich die Klammergrösse in Nr. 1) zu einem vollständigen Quadrat. Zieht man die Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung und setzt $v = w^2$, falls $p$ ungerade ist, so entsteht eine trinomische Gleichung, und folglich ist wieder eine zweigliedrige Discriminante vorhanden. Die Gleichung 2) hat in diesem Falle rationale Lösungen, nämlich:

$$t_1 = -pa, \quad t_2 = -(2n+p)a.$$

### 2. Specielle Fälle.

a) Fall $n = 2$, $p = -1$.

Die Gleichung 1) lautet:

$$v^4 + 6av^2 + 3b = xv$$

und die Gleichung 4):

$$t^2 + 2at - b = 0,$$

ausserdem wird

$$A = a^2 + b, \quad B = 4ab.$$

Die Gleichung $A = 0$ liefert:

$$b = -a^2, \text{ also } B = -4a^3,$$

vergl. auch Nr. 8) und 9).

Sonach ergiebt sich als gesuchte Gleichung mit binomischer Discriminante:

$$v^4 + 6av^2 - 3a^2 = xv \text{ mit } \nabla = (x^2 + 2^6 a^3)^2,$$

d. h. die Jacobi'sche Gleichung vierten Grades.

b) Fall $n = 1$, $p = 2$.

Die gesuchte Gleichung lautet:

$$v^4 + 8av^3 + 18a^2v^2 = x \text{ mit } \nabla = x(x - 3^3a^4)^2.$$

c) Fall $n = 2$, $p = 1$.

Die Gleichung 1) lautet:

$$v^5 + 10av^3 + 5bv = x$$

und die Gleichung 4):

$$t^2 + 6at + b = 0,$$

ausserdem wird

$$A = 36a^4 - 13a^2b + b^2, \quad B = 2ab(3a^2 - b).$$

Die Gleichung $A = 0$ liefert

$$b_1 = 9a^2 \text{ (vergl. Nr. 8)}, \quad b_2 = 4a^2,$$

wozu

$$B_1 = -108a^5, \qquad B_2 = -8a^5$$

gehört. Die beiden gesuchten Gleichungen sind daher:

$$v^5 + 10av^3 + 45a^2v = x \text{ mit } \nabla = (x^2 + 12^3a^5)^2$$

$$v^5 + 10av^3 + 20a^2v = x \text{ mit } \nabla = (x^2 + 2^7a^5)^2.$$

Wir haben in der ersten die Resolvente von Brioschi (vergl. Theil I dieser Abhandlung) vor uns, in der zweiten die Moivre'sche Gleichung, von welcher die Fünftheilung des Winkels abhängt. Setzt man in dieser letzten Gleichung $\frac{a}{2}$ an Stelle von $a$, so wird sie einfacher:

$$v^5 + 5av^3 + 5a^2v = x \text{ mit } \nabla = (x^2 + 2^2a^5)^2.$$

d) Fall $n = 1$, $p = 3$.

Die Gleichung 1) lautet:

$$v^5 + 10av^4 + 5bv^3 = x$$

und die Gleichung 4):

$$t^2 + 8at + 3b = 0,$$

ausserdem wird

$$A = -512a^4 + 112a^2b - 3b^2, \quad B = 3ab(11b - 64a^2).$$

Die Gleichung $A = 0$ liefert:

$$b_1 = \frac{16}{3}a^2, \quad b_2 = 32a^2.$$

Es erscheint zweckmässig, im ersten Fall den Buchstaben $a$ mit $\frac{3}{2}a$, im zweiten $a$ mit $\frac{a}{2}$ zu vertauschen, dann kommt man zu den Gleichungen:

$$v^5 + 15av^4 + 60a^2v^3 = x \text{ mit } \nabla = x^2(x + 6^4a^5)^2,$$

$$v^5 + 5av^4 + 40a^2v^3 = x \text{ mit } \nabla = x^2(x - 12^3a^5)^2.$$

Setzt man noch $v = \frac{1}{w}$, so entsteht:

$$xw^5 - 60a^2w^2 - 15aw - 1 = 0$$

$$xw^5 - 40a^2w^2 - 5aw - 1 = 0,$$

und das sind im Wesentlichen jene Resolventen, die wir in Theil I bei [illegible] Lösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades benutzt haben.

Die erste derselben geht für $x = -h$, $a = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, $w = \eta$ in unsere Resolvente der $\eta$ über; die zweite verwandelt sich für $x = -\frac{1}{H^2}$, $a = -\frac{f}{H}$, $w = W$ in die Gordan-Klein'sche Resolvente der $W$.

e) Fall $n = 3$, $p = -1$.

Die Gleichung 1) lautet:

$$v^6 + 10av^3 + 5b = xv$$

und die Gleichung 4):

$$t^2 + 4at - b = 0,$$

ausserdem ist

$$A = (b + 4a^2)(b - a^2) = 0, \quad B = ab(a^2 + 7b).$$

Dem Werthe $b = -4a^2$ (vergl. Nr. 8) entsprechend entsteht, wenn $a$ mit $\frac{a}{2}$ vertauscht wird:

$$v^6 + 5av^3 - 5a^2 = xv \text{ mit } \nabla = (x^3 - 3^6a^5)^2.$$

Dem Werthe $b = a^2$ entsprechend entsteht:

$$v^6 + 10av^3 + 5a^2 = xv \text{ mit } \nabla = (x^3 - 12^3a^5)^2,$$

d. h. die reducirte Jacobi'sche Gleichung sechsten Grades.

f) Fall $n = 1$, $p = 4$.

Die Gleichung 1) lautet:

$$v^6 + 12av^5 + 6bv^4 = x$$

und die Gleichung 4):

$$t^2 + 10at + 4b = 0,$$

ausserdem wird

$$A = 8a(1250a^4 - 275a^2b + 12b^2), \quad B = 16b(250a^4 - 45a^2b + b^2).$$

Die Gleichung $A = 0$ liefert:

$$b_1 = \frac{25}{4}a^2, \quad b_2 = \frac{50}{3}a^2,$$

und wenn im ersten Falle $a$ durch $2a$, im zweiten $a$ durch $\frac{a}{2}$ ersetzt wird, so gelangt man zu den Gleichungen:

$$v^6 + 24av^5 + 150a^2v^4 = x \text{ mit } \nabla = x^3(x - 10^5a^6)^2,$$

$$v^6 + 6av^5 + 25a^2v^4 = x \quad \text{mit } \nabla = x^3\left(x + \frac{2^4.5^5}{27}a^6\right)^2,$$

welche durch die Substitution $v = \frac{1}{w}$ in eine zweckmässigere Form gebracht werden können.

g) Fall $n = 3$, $p = 1$.

Die Gleichung 1) lautet:

$$v^7 + 14av^4 + 7bv = x$$

und die Gleichung 4):

$$t^2 + 8at + b = 0,$$

ausserdem wird

$$A = (b - 16a^2)(b^2 - 11a^2b + 32a^4), \quad B = -ab(64a^4 - 25a^2b + 3b^2).$$

Aus $A = 0$ folgt:

$$b_1 = 16a^2, \qquad \left.\begin{matrix} b_2 \\ b_3 \end{matrix}\right\} = \frac{11 \pm \sqrt{-7}}{2} a^2,$$

wozu

$$B_1 = -\, 2^8 . 3^3 a^7, \qquad \left.\begin{matrix} B_2 \\ B_3 \end{matrix}\right\} = -\, 4a^7(13 \pm 7\sqrt{-7})$$

gehört. Mithin sind die gesuchten Gleichungen:

$$v^7 + 14av^4 + 112a^2v = x \quad \text{mit} \quad \nabla = (x^3 + 2^{11} . 3^6 a^7)^2$$

und

$$v^7 + 14av^4 + \frac{7}{2}(11 \pm \sqrt{-7})a^2v = x$$

mit

$$\nabla = [x^3 + 2^5 . 3^3 . (13 + 7\sqrt{-7})a^7]^2.$$

Vertauscht man in der ersten $a$ mit $\frac{a}{2}$, so entsteht

$$v^7 + 7av^4 + 28a^2v = x \quad \text{mit} \quad \nabla = (x^3 + 2^4 . 3^6 a^7)^2;$$

vertauscht man in der zweiten

$$a \text{ mit } -\frac{1}{4}a(1 \pm \sqrt{-7}),$$

so entsteht genau jene Gleichung, welche Herr Klein unter ganz anderen Gesichtspunkten als Resolvente der Modulargleichung achten Grades gefunden hat*.

h) Fall $n = 2$, $p = 3$.

Die Gleichung 1) lautet:

$$v^7 + 14av^5 + 7bv^3 = x$$

und die Gleichung 4):

$$t^2 + 10at + 3b = 0,$$

ausserdem wird

$$A = (25a^2 - 3b)(400a^4 - 68a^2b + b^2) = 0,$$

$$B = 12ab(250a^4 - 65a^2b + 4b^2).$$

Die gesuchten Gleichungen sind daher:

$$v^7 + 14av^5 + \frac{175}{3}a^2v^3 = x,$$

$$v^7 + 14av^5 + 14(17 \pm 3\sqrt{21})a^2v^3 = x,$$

und sie besitzen eine binomische Discriminante:

$$\nabla = x^2(x^2 - 2^4 . \beta a^7)^2,$$

wo $\beta$ den entsprechenden numerischen Factor bezeichnet.

i) Fall $n = 1$, $p = 5$.

Die Gleichung 1) lautet:

$$v^7 + 14av^6 + 7bv^5 = x$$

und die Gleichung 4):

$$t^2 + 12at + 5b = 0,$$

ausserdem wird:

* Math. Annalen XIV. Bd.: „Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen" S. 458 Nr. 52. Vergl. auch: Hermite in Tortolini's Annali -atica II p. 59: „Sur l'abaissement de l'équation modulaire du huitième degré."

$$A = -12^5a^6 + 32 . 12^3a^4b - 12 . 15 . 17a^2b^2 + 25b^3,$$
$$B = -5ab(12^4a^4 - 27 . 12^2a^2b + 5 . 29b^2).$$

Nach Nr. 8) muss $A = 0$ die Wurzel

$$b_1 = \frac{36}{5}a^2$$

besitzen, wozu

$$B_1 = -\frac{6^6}{5}a^7$$

gehört. Nach Ausscheidung jener Wurzel verbleibt noch die quadratische Gleichung:

$$4 . 12^3a^4 - 4 . 12^2a^2b + 5b^2 = 0,$$

und diese ergiebt:

$$\left.\begin{matrix} b_2 \\ b_3 \end{matrix}\right\} = \frac{48}{5}a^2(6 \pm \sqrt{21}).$$

Hiernach hat man drei Gleichungen, welche für $v = \frac{1}{w}$ in der gemeinsamen Form

$$xw^7 - 7bw^2 - 14aw - 1 = 0$$

enthalten sind und denen eine binomische Discriminante

$$\nabla = x^4(x - 2\beta a^7)^2$$

zukommt, wo $\beta$ den entsprechenden numerischen Factor bezeichnet.

Indem wir uns mit diesen Beispielen begnügen, wollen wir noch eine Andeutung machen, wie sich unser Verfahren auf mehrgliedrige Gleichungen ausdehnen lässt.

### 3. Behandlung des Falles

1) $[v^{3n} + 3(3n + p)av^{2n} + 3(3n + p)bv^n + (3n + p)c]v^p = x = \varphi(v).$

Behufs Herstellung der Discriminante bilden wir

2) $\varphi'(v) = (3n + p)[v^{3n} + 3(2n + p)av^{2n} + 3(n + p)bv^n + cp]v^{p-1} = 0$

und führen den Werth von $v^{3n}$, wie er der letzten Klammer entnommen wird, in 1) ein, dann ergiebt sich:

$$x = 3n(av^{2n} + 2bv^n + c)v^p,$$

oder

3) $$x^n = (3n)^n(at^2 + 2bt + c)^n t^p,$$

wobei $v^n = t$ gesetzt wurde. Nun kann mit Rücksicht auf

4) $$t^3 + 3(2n + p)at^2 + 3(n + p)bt + cp = 0$$

die Identität

$$t^p(at^2 + 2bt + c)^n = At^2 + 2Bt + C,$$

wo $A$, $B$, $C$ von $t$ unabhängige Grössen sind, erzeugt werden. Die Grössen $A$ und $B$ können zum Verschwinden gebracht werden, und hierbei ergiebt sich:

$$b = \mu a^2, \quad c = \nu a^3,$$

wobei $\mu$ und $\nu$ aus den Exponenten $n$ und $p$ zusammengesetzt und also numerisch sind. Indem sich nun 3) einfach auf

$$x^n = (3n)^n . C$$

reducirt, erhält man für die specialisirte Gleichung 1) folgende binomische Discriminanten:

5) $$\nabla = x^{p-1}[x^n - (3n)^n C]^3, \text{ resp. } \nabla = [x^n - (3n)^n C]^3,$$

je nachdem $p$ eine positive oder negative Zahl ist. Man vergl. Abschnitt A, 1.

Zur Berechnung der Grössen $A$, $B$, $C$ hat man

6) $$t_i^p(at_i^2 + 2bt_i + c)^n = At_i^2 + 2Bt_i + C,$$

unter $t_i$, $(i = 1, 2, 3)$ die Wurzeln der Gleichung 4) verstanden. Man achte hierbei wie früher auf das Eintreten gleicher Wurzeln.

Als Beispiel behandeln wir den

Fall $n = 2$, $p = -1$.

Die Gleichung 1) lautet:

$$v^6 + 15av^4 + 15bv^2 + 5c = xv$$

und die Gleichung 4):

$$t^3 + 9at^2 + 3bt - c = 0,$$

ausserdem wird

$$A = -9a^3 + 4ab + c, \quad B = -3a^2b + 11ac + 4b^2, \quad C = c(a^2 + 7b).$$

Die Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ liefern:

$$c = 9a^3 - 4ab,$$

$$B = 99a^4 - 47a^2b + 4b^2 = 0,$$

folglich:

$$b_1 = 9a^2, \quad b_2 = \frac{11}{4}a^2$$

und dem entsprechend

$$c_1 = -27a^3, \quad c_2 = -2a^3; \quad C_1 = -12^3a^5, \quad C_2 = -\frac{81}{2}a^5.$$

Vertauscht man noch im ersten Falle $a$ mit $\frac{a}{3}$, im zweiten $a$ mit $2a$, so gelangt man zu folgenden quintinomischen Gleichungen:

$$v^5 + 5av^4 + 15a^2v^3 - 5a^3 = xv \quad \text{mit } \nabla = (x^2 + 2^8a^5)^3,$$

$$v^5 + 30av^4 + 165a^2v^3 - 80a^3 = xv \quad \text{mit } \nabla = (x^2 + 6^6a^5)^3.$$

Die erste dieser Gleichung ist die **Malfatti'sche** Resolvente der Gleichung:

$$y^5 - 5\alpha y + \beta = 0, \quad (\alpha = a, \ \beta = \sqrt[12]{\nabla}.)$$

Die cubische Gleichung für $t$ reducirt sich in obigen Specialfällen auf

$$(t + a)^3 = 0 \text{ resp. } (t + a)^2(t + 16a) = 0.$$

Wie diese Untersuchungen fortgesetzt werden können, ist wohl ersichtlich. Gelegentlich kann man den Ansatz von vornherein passend wie nachfolgendes Beispiel zeigt.

### 4. Specialfall einer sextinomischen Gleichung.

Wir legen uns die Gleichung:

$$v^8 - 14av^6 + \frac{7}{3}(25a^2 + 2b)v^4 - 70abv^2 - 7b^2 = xv$$

vor, in welcher die Coefficienten so gewählt sind, dass

$$\frac{dx}{dv} = \frac{7}{v^2}(v^4 - 5av^2 + b)^2.$$

Setzt man, zwecks Bildung der Discriminante, diesen Ausdruck gleich Null, entnimmt dann $v^4$, so muss auf Grund der vorgelegten Gleichung $x^2$ in der Form:

$$x^2 = Av^2 + B$$

darstellbar sein. Hierbei ergiebt sich:

$$A = \frac{64}{9}(a^2 - b)(25a^2 - 4b)^2$$

$$B = \frac{64}{9}ab(-125a^4 + 160a^2b + 208b^2),$$

also, wenn $A$ annullirt wird,

$$b_1 = a^2 \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{25}{4}a^2,$$

wozu

$$B_1 = 12^3a^7 \text{ und } B_2 = 2^7.5^6a^7$$

gehört, während

$$\nabla = (x^2 - B)^4.$$

Die gesuchten Gleichungen lauten:

$$v^8 - 14av^6 + 63a^2v^4 - 70a^3v^2 - 7a^4 = xv \quad \text{mit } \nabla = (x^2 - 12^3a^7)^4$$

$$v^8 - 28av^6 + 350a^2v^4 - 3500a^3v^2 - 7.625a^4 = xv \text{ mit } \nabla = (x^2 - 2^{14}.5^6a^7)^4.$$

In der zweiten Gleichung ist $2a$ an Stelle von $a$ gesetzt worden. Die erste Gleichung kommt mit der Klein'schen Modulargleichung achten Grades der elliptischen Functionen überein. Vergl. die bereits erwähnte Abhandlung von Klein in den Math. Annalen XIV. Bd. S. 452.

### 5. Anwendungen.

Es mag noch eine Andeutung folgen, wie die bisher gefundenen Resultate in der Integralrechnung verwerthet werden können.

Führt man in die Discriminante $\nabla = \nabla(x)$ das Gleichungspolynom

$$x = \varphi(v)$$

ein, so muss das so entstehende Polynom aus bekannten Gründen rational zerlegbar sein, und ein Factor muss mindestens doppelt zählend (in zweiter Potenz) auftreten. Ebenderselbe Factor muss aber auch in $\frac{dx}{dv} = \varphi'(v)$ enthalten sein. Hieraus ergiebt sich, dass die Gleichung $x = \varphi(v)$ bei der Transformation gewisser Transcendenten von der Form:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[m]{\nabla(x)}}$$

gebraucht werden kann.*

Nehmen wir als Beispiel die Jacobi'sche Gleichung vierten Grades (Abschnitt 2 Fall a):

$$v^4 + 6av^2 - 3a^2 = xv \text{ mit } \nabla(x) = (x^2 + 2^6a^3)^2.$$

Hier ist

$$x^2 + 64a^3 = \frac{1}{v^2}(v^2 + a)^3(v^2 + 9a)$$

und folglich:

$$\frac{dx}{[x^2 + 64a^3]^{\frac{2}{3}}} = \frac{3dv}{[v(v^2 + 9a)]^{\frac{2}{3}}}.$$

Für $v = w^2$ ergiebt eine nochmalige Differentiation:

$$(x^2 + 64a^3)\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{4}{3}x\frac{dw}{dx} - \frac{1}{12}w = 0,$$

d. h. die Differentialresolvente der Jacobi'schen Gleichung, welche schon Herr Brioschi aufgestellt hat.**

Setzt man in obigen Differentialen:

$$x^2 + 64a^3 = 64a^3t^3, \quad v(v^2 + 9a) = v^3w^3,$$

so entsteht:

$$\frac{dt}{2\sqrt{t^3 - 1}} = -\frac{dw}{\sqrt{w^3 - 1}},$$

während die zugehörige Gleichung in

$$w^4 - 4tw^3 + 8w + 4t = 0$$

übergeht und durch Zweitheilung der elliptischen Functionen aufgelöst werden kann.

Ein anderes Beispiel bietet die Moivre'sche Gleichung

$$v^5 + 5av^3 + 5a^2v = x \text{ mit } \nabla(x) = (x^2 + 2^2a^5)^2$$

dar. (Vergl. Abschnitt 2 Fall c.) Hier wird

$$x^2 + 4a^5 = (v^2 + 4a)(v^4 + 3av^2 + a^2)^2$$

und demnach:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4a^5}} = \frac{5dv}{\sqrt{v^2 + 4a}}.$$

Mittelst Integration könnte man jetzt die Auflösung der Moivre'schen Gleichung sowohl durch Wurzelzeichen, als auch durch Fünftheilung des Winkels bewerkstelligen.*** Differenzirt man nochmals, nachdem zuvor

---

* Vergl. die „Studien" des Verf. XIII: Beiträge zur Transformation der hyperelliptischen Differentiale" S. 108, oder auch: Diese Zeitschr. Jahrg. XXXIII.

** Brioschi: „Die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade". Math. Annalen XIII. Bd. S. 126.

*** Vergl. die Abhandl. des Verf.: „Zur Integration der Differentialgleichungen." Diese Zeitschr. XXIX. Jahrg.

beide Seiten obiger Differentialgleichung quadrirt sind, so gelangt man zur entsprechenden Differentialresolvente, nämlich:

$$(x^2+4a^5)\frac{d^2v}{dx^2}+x\frac{dv}{dx}-\frac{1}{25}v=0.$$

Am Schluss seien noch die Fälle d) und e) aus Abschnitt 2 herbeigezogen. Für die Gleichung:

$$v^5+5av^4+40a^2v^3=x \text{ mit } \nabla(x)=x^2(x-12^3a^5)^2$$

wird

$$x-1728a^5=(v-3a)(v^2+4av+24a^2)^2,$$

folglich:

$$\frac{dx}{\sqrt{x(x-1728a^5)}}=\frac{5v\,dv}{\sqrt{v(v-3a)(v^2+5av+40a^2)}}.$$

Das letzte Differential ist also pseudoelliptisch.

Für die Jacobi'sche Gleichung sechsten Grades

$$v^6+10av^3+5a^2=xv \text{ mit } \nabla(x)=(x^3-12^3a^5)^2$$

wird

$$x^3-1728a^5=\frac{1}{v^3}(v^6+22av^3+125a^2)(v^6+4av^3-a^2)^2,$$

mithin:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^3-1728a^5}}=\frac{5dv}{\sqrt{v(v^6+22av^3+125a^2)}}.$$

## B. Bemerkungen zu den Reihen und den Differentialresolventen.

Die Auflösung der algebraischen Gleichungen durch Transcendenten, d. h. durch Reihen, Kettenfunctionen, elliptische Functionen u. s. f. hat keineswegs blos eine praktische Bedeutung. Sie dient nicht etwa nur der numerischen Berechnung, sondern sie lässt auch Schlüsse über die Natur der Wurzeln im Allgemeinen zu. Ich erlaube mir, betreffs dieses Punktes, auf einige Resultate aufmerksam zu machen, die ich in meinen „Studien“ veröffentlicht habe.* Es gelingt, wie dort gezeigt wird, die Wurzeln einer Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades in der Form:

$$1)\qquad y=A_0+A_1\varepsilon+A_2\varepsilon^2+\cdots+A_{n-1}\varepsilon^{n-1}$$

darzustellen. Für $\varepsilon$ hat man nach und nach sämmtliche Wurzeln der Gleichung:

$$\varepsilon^n=1$$

einzutragen, und die $A_i$ hängen in übersichtlicher Weise von den Coefficienten der vorgelegten Gleichung ab.

Der Ausdruck 1) lässt sich in bequemster Art potenziren, wobei der Exponent einfach in die $A_i$ eingeht. Infolge dessen kann man die Existenz der Lösung 1) durch directes Eintragen derselben in die Gleichung dar-

* Drittes Kapitel St. XIX: „Theorie der trinomischen Gleichungen“ und St. XX: „Transcendente Auflösung der allgemeinen Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades.“ — Vergl. auch Math. Annalen XXVIII. Bd.

thun. Ebenso lässt sich mittelst 1) die Girard-Waring'sche Formel für die Potenzsummen der Wurzeln mühelos anschreiben.

Am Einfachsten gestaltet sich die Sache bei den trinomischen Gleichungen. Für diese sind die $A_i$ hypergeometrische Reihen $n^{ter}$ Ordnung, und man ist daher in der Lage, für die trinomischen Gleichungen sofort die zugehörigen Differentialresolventen angeben zu können, die eben nichts anderes als die wohlbekannten Differentialgleichungen sind, denen jene hypergeometrischen Reihen genügen.

Was die trinomischen Formen:

$$2)\qquad y^5 + 5\beta y + \gamma = 0$$

$$3)\qquad y^5 + 5\alpha y^2 + \gamma = 0$$

anlangt, so sind die zugehörigen Differentialresolventen hypergeometrische Differentialgleichungen vierter Ordnung. Die Ordnung fällt nämlich von 5 auf 4, weil die lineare Beziehung:

$$\sum_\nu y_\nu = 0$$

statt hat. Aber die Ordnung jener Differentialgleichungen lässt sich noch weiter herabdrücken, denn das allgemeine Integral erweist sich als das Product der vollständigen Integrale zweier Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Hierzu sei Folgendes bemerkt. Schon Liouville* hat gezeigt, dass ein Ausdruck

$$4)\qquad y = (c_1 v_1 + c_2 v_2)^\mu,$$

in welchem $v_1$ und $v_2$ ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind, einer linearen Differentialgleichung $(\mu + 1)^{ter}$ Ordnung genügt, und dass deren allgemeines Integral die Form:

$$5)\qquad y = C_1 v_1^\mu + C_2 v_1^{\mu-1} v_2 + \cdots + C_{\mu+1} v_2^\mu$$

besitzt. Herr Fuchs** fügt hinzu, dass auch die Integrale $v_1^\mu, v_1^{\mu-1}v_2, \ldots$ ein Fundamentalsystem bilden, und dass die Differentialgleichung $(\mu+1)^{ter}$ Ordnung keine anderen singulären Punkte haben kann, als jene Gleichung zweiter Ordnung.

Diese Fragen lassen sich auf Producte von Integralen ausdehnen. Als einfachsten Fall setze man:

$$6)\qquad y = (c_1 v_1 + c_2 v_2)(c_1' w_1 + c_2' w_2),$$

unter $v_1, v_2$ und $w_1, w_2$ Fundamentalsysteme von Integralen zweier linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung verstanden. Man findet, dass der

* Journal des mathematiques (1839) t. IV p. 429.

** Journal f. d. r. u. a. Mathematik 81. Bd.: „Ueber die linearen Differentialgleichungen ... Ordnung etc." Vergl. S. 129—131.

Ausdruck 6) einer linearen Differentialgleichung vierter Ordnung genügt, deren allgemeines Integral die Form:

$$7)\qquad y = C_1 v_1 w_1 + C_2 v_2 w_1 + C_3 v_1 w_2 + C_4 v_2 w_2$$

besitzt. Umgekehrt kann man durch ein blosses Eliminationsverfahren die Frage zur Entscheidung bringen: Wie müssen die Coefficienten einer linearen Differentialgleichung beschaffen sein, damit ihr allgemeines Integral in der geschilderten Art reducibel sei?

Erinnert man sich nun, dass die Auflösung jeder Hauptgleichung fünften Grades:

$$8)\qquad y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0$$

in der Form:

$$9)\qquad y_\nu = \varepsilon^{4\nu}\lambda_1\mu_1 - \varepsilon^{3\nu}\lambda_2\mu_1 + \varepsilon^{2\nu}\lambda_1\mu_2 + \varepsilon^{\nu}\lambda_2\mu_2$$

ausdrückbar ist, so liegt es sehr nahe, die Differentialresolventen vierter Ordnung der Gleichungen 2) und 3) auf ihre Reducibilität hin zu prüfen. In der That ergiebt sich, dass die in Betracht kommenden hypergeometrischen Reihen vierter Ordnung in das Product je zweier hypergeometrischen Reihen zweiter Ordnung zerfallen. Die entsprechenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung erweisen sich nach gehöriger Transformation als die Differentialresolventen des Ikosaeders.*

* Es dürfte angemessen sein, an dieser Stelle auf die entsprechenden Verhältnisse bei den Gleichungen vierten Grades hinzuweisen. Setzt man die Lösung einer solchen in der Form:

$$y_\nu = A_1\varepsilon_\nu + A_2\varepsilon_\nu^2 + A_3\varepsilon_\nu^3 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3),\ \varepsilon^4 = 1$$

voraus, so ist $\sum_\nu y_\nu = 0$. Damit auch

$$\sum_\nu y_\nu^2 = 4(A_2^2 + 2A_1A_3)$$

verschwinde, wähle man

$$A_1 = z_1^2,\quad A_2 = z_1 z_2\sqrt{2},\quad A_3 = -z_2^2,$$

dadurch wird

$$\sum_\nu y_\nu^3 = 12f\sqrt{2},\quad \sum_\nu y_\nu^4 = 4H,$$

wobei

$$f = z_1 z_2(z_1^4 + z_2^4),\quad H = z_1^8 - 14z_1^4z_2^4 + z_2^8,$$

und $y_\nu$ stellt nun die Wurzeln einer Hauptgleichung vierten Grades:

$$y^4 - 4\sqrt{2}fy - H = 0$$

vor. — Bekanntlich repräsentirt $f$ ein Oktaeder, $H$ einen Würfel. $H$ erweist sich als Hesse'sche Determinante von $f$, und diesen Formen gesellt sich als Functional-Determinante, gebildet aus beiden, noch eine dritte Form $T$ vom zwölften Grade zu, die mit den vorigen durch

$$T^2 = H^3 + 108f^4$$

verknüpft ist. Man hat hier also ganz ähnliche Verhältnisse wie früher und kann genau wie im Theil I Abschnitt 11 eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung aufstellen, welcher jene $z_1$ und $z_2$ genügen. Die Differentialresolvente dritter Ordnung der $y_\nu$ aber muss so beschaffen sein, dass sie durch die Substitution $y = z^2$ auf die zweite Ordnung herabgesetzt werden kann. — Man vergl. auch die diesbezüglichen Bemerkungen bei Klein: Ikosaeder S. 256 u. 257 und bei Gordan: Vorlesungen S. 161 u. 162.

Der hiermit angedeutete Vorgang ist in der Ausführung ziemlich umständlich. Herr D. Besso* hat die Rechnung für die Gleichung:

$$y^5 + y^2 - x = 0$$

mitgetheilt. Es zerfällt die zugehörige Differentialresolvente vierter Ordnung in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche in der gemeinsamen Form:

$$\varphi^2 y'' + \varphi \,.\, (ax^2 + bx + c)y' + (fx^4 + gx^3 + hx^2 + kx + l)y = 0,$$

wo

$$\varphi = (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3), \quad \beta_1 \gtrless \beta_2 \gtrless \beta_3$$

enthalten sind. Dabei stellen sich noch die Bedingungen:

$$4f + 2a - a^2 = 0 \text{ und } 2g + 2b - ab = 0$$

ein. Nun untersucht er obige Gleichung und findet, dass selbige unter den nämlichen Bedingungen auf die gewöhnliche hypergeometrische Differentialgleichung reducirt werden kann. — Was dieses letzte Resultat anlangt, so muss ich bemerken, dass ich dasselbe schon vor längerer Zeit gefunden und auch veröffentlicht habe.**

Selbstverständlich kann man, wie auch früher (vergl. Theil I Abschnitt 12 dieser Arbeit) erwähnt wurde, das Verfahren umkehren und von der Differentialresolvente des Ikosaeders nach Anwendung einer Transformation zweiter resp. dritter Ordnung zur Differentialresolvente vierter Ordnung kommen, also auch zu den entsprechenden Reihen. Aber ich erlaube mir, hier eine Ansicht auszusprechen, zu der mich meine früheren und neueren Untersuchungen mehr und mehr hingedrängt haben: Die trinomischen Gleichungen jeden Grades bilden eine Gattung von Gleichungen für sich, die eine durchaus gemeinsame Behandlung als zweckmässig erscheinen lassen.*** Es ist schon für den fünften Grad nicht zu empfehlen, die trinomische Form als Specialfall einer mehrgliedrigen Form anzusetzen. Der Einwand, dass die Lösung einer trinomischen Gleichung fünften Grades in dem einen Falle aus hypergeometrischen Reihen zweiter Ordnung, im anderen aus solchen vierter Ordnung gebildet und also weniger einfach sei, ist vielleicht unter gewissen Gesichtspunkten berechtigt, im Allgemeinen aber nicht.

Die Darstellung der Wurzeln einer Gleichung fünften Grades durch Reihen vierter Ordnung ist übrigens nicht nur für die trinomische Form

* Rom. Acc. L. Rend. II, 593 - 597: „Sopra una classe d'equazioni differenziali lineari del second' ordine e sull' equazione del quinto grado“ (1886).

** Diese Zeitschrift XXIX. Jahrg. S. 151: „Ueber Differentialgleichungen, welche durch hypergeometrische Functionen integrirt werden können“ (1884).

*** Vergl. die Arbeit des Verfassers: „Die trinomische und quadrinomische Gleichung in elementarer Behandlungsweise.“ Diese Zeitschrift XXXVII. Jahrg. [illegible] 92).

angezeigt, sondern auch für eine grosse Anzahl anderer Gleichungen. Bemerken wir zunächst ganz allgemein, dass die Reihen, welche den trinomischen Formen:

$$y^n + y^{n-s} + x = 0 \text{ und } y^n + xy^{n-s} + 1 = 0$$

genügen, ihren Charakter nicht ändern, d. h. hypergeometrische Reihen $n^{ter}$ Ordnung bleiben, wenn sie potenzirt oder nach dem Parameter $x$ differenzirt resp. integrirt werden. Eben diese Processe gestatten aber, aus der trinomischen Gleichung neue algebraische Gleichungen desselben Grades abzuleiten (für $y^m = z$, $\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = z$ u. s. f.), denen dann die veränderten Reihen genügen.

Erwähnen wir einige Beispiele.

a) Die Gleichung: $$z^5 - 5az = b$$
giebt quadrirt und für $z^2 = t$:

$$t^5 - 10at^3 + 25a^2t - b^2 = 0,$$

und dieser letzteren genügen direct hypergeometrische Reihen vierter Ordnung. Die äussere Aehnlichkeit dieser Gleichung mit der Resolvente von Brioschi kann nach dem Ergebniss von Abschnitt 1 Theil I Veranlassung werden, auch hier die Substitution:

$$t = \frac{1 + k\eta}{\eta}\sqrt{a}$$

zu versuchen, und es zeigt sich, dass, wie dort, bei passender Wahl von $k$ zwei Coefficienten der transformirten Gleichung gleichzeitig annullirt werden können. Man findet:

$$h\eta^5 - 20k\eta^3 + 5k\eta + 1 = 0,$$

wo

$$h = 16k - \frac{b}{\sqrt{a^5}}, \quad k = \pm 1, \quad \eta = \frac{\sqrt{a}}{t - k\sqrt{a}},$$

und diese Gleichung ist sonach rückwärts auf die trinomische Form reducirbar

b) Die Gleichung: $$z^5 = 5az^2 + b$$
giebt quadrirt und für $z^2 = y$:

$$y^5 - 25a^2y^2 - 10aby - b^2 = 0,$$

also eine Hauptgleichung:

$$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0,$$

mit der Bedingung:

$$4\alpha\gamma - 5\beta^2 = 0.$$

Offenbar würde für diese Gleichung die allgemeine Auflösungsmethode sehr unzweckmässig sein.

c) Die Gleichung: $$z^5 - 5z + 4x = 0$$
giebt nach $x$ differenzirt und für $\frac{dz}{dx} = \frac{v}{5}$:

$$v = \frac{4}{1 - z^4} = \frac{z}{x - z}, \text{ d. h. } z = \frac{xv}{v + 1}.$$

Eliminirt man hieraus und aus der ursprünglichen Gleichung $z$, so entsteht:

$$x^4 v^5 - (v-4)(v+1)^4 = 0,$$

und dieser genügt abermals direct eine hypergeometrische Reihe vierter Ordnung, nämlich:

$$v = 5\frac{dz}{dx},$$

unter $z$ die ursprüngliche Reihe verstanden.

Uebungsbeispiel: Wie löst man mittelst hypergeometrischer Reihen direct die Gleichung $u(u-1)v^5 + 10uv^3 + 5v + 16 = 0$?

Diese Beispiele, welche noch reichlich vermehrt werden könnten, zeigen, dass man bei Gleichungen fünften Grades durch Anwendung allgemeiner Methoden sehr auf Umwege gerathen kann.

Für Gleichungen mit zwei und mehreren wesentlichen Parametern tritt nun die Frage auf, ob es nicht angezeigt ist, direct transcendente Lösungen zu construiren, die der vorgelegten Gleichung genügen, also etwa Reihen, welche nach Potenzen eines Coefficienten oder einer bestimmten Verbindung der Coefficienten fortschreiten.* Schon Herr Kronecker hat auf diesen Umstand Gewicht gelegt, um accessorische Irrationalitäten zu vermeiden. Jene Reihen müssen sich, wofern sie die Lösung einer Hauptgleichung fünften Grades darstellen, in die hypergeometrischen Reihen des Ikosaeders spalten lassen, und das dürfte ein erstes Mittel abgeben, um über die Convergenzbedingungen, über die Eigenschaften der zugehörigen Differentialresolventen u. s. f. Aufschluss zu erhalten.

---

* Vergl. die Reihenentwickelungen in den citirten Arbeiten des Verfassers.

(Schluss folgt.)

# XV.

# Einige metrische Eigenschaften der cubischen räumlichen Hyperbel.

Von

Dr. Ernst Heinrichs

in Köln.

Schluss.

## II.

**15.** Schneidet man den zum Prisma $\Delta$ der drei Asymptotenebenen $\alpha_i$ einer cubischen räumlichen Hyperbel $h^3$ gehörigen cubischen Cylinder $\gamma^3$ (§ 1) durch eine beliebige Ebene, so entsteht in dieser eine ausgeartete ebene Curve $c^3$ des Systems der auf dem Cylinder $\gamma^3$ enthaltenen cubischen Raumhyperbeln, sowie deren Wendeasymptotendreieck $\delta$. Es ist gezeigt worden, dass die Curve $c^3$ aus drei Zweigen besteht, welche in den Scheitelwinkelräumen des Dreiecks $\delta$ liegen. Als Doppelpunkt der Curve haben wir den Schwerpunkt $M$ des Dreiecks $\delta$ erkannt, und als Scheitelpunkte derselben sind ihre auf den Mittellinien dieses Dreiecks ausser $M$ noch liegenden Punkte $S_i$ bezeichnet worden. Der Abstand eines jeden der Punkte $S_i$ vom Doppelpunkte $M$ ist beziehungsweise gleich derjenigen Mittellinie des Dreiecks $\delta$, auf deren Verlängerung der betreffende Punkt $S_i$ liegt und die Tangente $s_i$ der Curve in einem ihrer Scheitelpunkte ist der gegenüberliegenden Wendeasymptote parallel. Die drei Wendeasymptoten mögen mit $w_i$, die ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte des Dreiecks $\delta$ mit $M_i$ und die Fusspunkte der Mittellinien desselben mit $N_i$ bezeichnet werden (siehe Heft 4 Taf. IV, Fig. 4 u. 6).

Wenn man die Curve $c^3$ mit einem um den unendlich fernen Punkt $W_i^\infty$ der Asymptote $w_i$ sich drehenden Strahle schneidet, so erzeugen die Strahlenpaare, welche den Doppelpunkt $M$ mit den beiden variabelen Schnittpunkten $X_k$ und $X_l$ verbinden, bekanntlich eine Strahleninvolution. Die Doppelgeraden der Involution sind der vom Doppelpunkte $M$ zum Punkte $W_i^\infty$ und der von ihm zum Scheitel $S_i$ gezogene Strahl, nämlich die Mittellinie $m_i$ des Dreiecks $\delta$. Wenn nun $Y_k$ und $Y_l$ die Schnittpunkte der Geraden $X_kX_l$ mit den Seiten $w_k$ und $w_l$ des Dreiecks $\delta$ sind, während der Schnittpunkt derselben Gerade mit der Mittellinie $m_i$ durch $Z$ bezeichnet werden möge, so folgt aus den Eigenschaften der Involution, dass der

Punkt $Z$ die Mitte der Strecke $X_k X_l$, aus den Eigenschaften der Mittellinie aber, dass er auch die Mitte der Strecke $Y_k Y_l$ ist. Demgemäss ist:

$$Y_k X_k = X_l Y_l.$$

Es ergiebt sich daher folgender Satz, in welchem wir unter den Fluren der Curve $c^3$ die drei Flächenstücke verstehen wollen, welche einerseits von je einem Zweige der Curve, andererseits von dem diesen einschliessenden Asymptotenpaare begrenzt werden:

Die zwei Strecken, in welchen eine zu einer Wendeasymptote der Curve $c^3$ parallele Gerade eine oder zwei von den Fluren der Curve durchschneidet, sind gleich.

Zieht man die der Geraden $X_k X_l$ unendlich nahe Parallele, so sind die beiden unendlich schmalen Paralleltrapeze, welche von den zwei Parallelen aus den Fluren der Curve ausgeschnitten werden, inhaltsgleich, weil die parallelen Seiten des einen gleich den parallelen Seiten des anderen sind. Daraus folgt durch Aneinanderlegen unendlich vieler von diesen Paralleltrapezen:

Die beiden endlichen Flächenstücke, welche zwei zu einer Wendeasymptote der Curve $c^3$ parallele (das Dreieck $\delta$ nicht einschliessende) Geraden aus der einen oder den zwei von ihnen durchzogenen Fluren der Curve ausschneiden, sind inhaltsgleich.

Lässt man die eine der beiden Parallelen unendlich fern werden, die andere aber mit der ihr parallelen Wendeasymptote der Curve, oder, wenn beide nur eine Flur durchschneiden, mit der zunächstliegenden Ecke des Dreiecks zusammenfallen, so folgt:

Je zwei, also alle drei Fluren der Curve $c^3$ sind inhaltsgleich und jede derselben wird von der sie durchschneidenden Mittellinie des Wendeasymptoten-Dreiecks $\delta$ halbirt.

**16.** Die Gleichung der Curve $c^3$, bezogen auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen Mittelpunkt im Doppelpunkte der Curve liegt, war folgende (§ 2):

$$\text{1)} \quad (u_1 x + v_1 y - 1)(u_2 x + v_2 y - 1)(u_3 x + v_3 y - 1) + 1 = 0,$$

wobei für die $u_i$ und $v_i$ die Bedingungsgleichungen galten:

$$\text{II)} \quad \begin{cases} 1) \quad u_1 + u_2 + u_3 = 0, \\ 2) \quad v_1 + v_2 + v_3 = 0, \end{cases}$$

aus welchen sich auch noch ergab:

$$\text{II)} \quad 3) \quad \delta \equiv u_1 v_2 - u_2 v_1 \equiv u_2 v_3 - u_3 v_2 \equiv u_3 v_1 - u_1 v_3.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$u_i x + v_i y \equiv t_i,$$

so können wir die Bedingungsgleichungen II) 1) und 2) durch die ihnen äquivalente Identität:

II) $\quad$ 4) $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \equiv 0$

ersetzen. Mit deren Hilfe lässt sich die Gleichung 1):

in die Form:

$$(\tau_1 - 1)(\tau_2 - 1)(\tau_3 - 1) + 1 = 0,$$
$$\tau_1 \tau_2 \tau_3 - \tau_1 \tau_2 - \tau_2 \tau_3 - \tau_3 \tau_1 = 0$$

bringen. Setzt man nun:

II) $\quad$ 5) $\frac{y}{x} = \lambda,\ u_i + v_i \lambda \equiv t_i;$ also $\tau_i \equiv x \,.\, t_i,$

so ergiebt sich folgende parametrische Darstellung der Curve $c^3$:

V)
$$\begin{cases} x = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}, \\ y = \frac{\lambda}{t_1} + \frac{\lambda}{t_2} + \frac{\lambda}{t_3}. \end{cases}$$

Die parametrische Darstellung für die zur Curve $c^3$ (nach § 12) conjugirte Curve $c'^3$ ist offenbar:

VI)
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_3}, \\ y = -\frac{\lambda}{t_1} - \frac{\lambda}{{}_2} - \frac{\lambda}{t_3}. \end{cases}$$

Die obigen Identitäten II) 1) bis 4) bestehen für beide Curven. Es lassen sich aus denselben folgende mehrfach zu verwendende weitere Identitäten leicht herleiten:

II)
$$\begin{cases} 6) \quad t_1 + t_2 + t_3 \equiv 0, \\ 7) \quad t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \equiv -2\,(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1), \\ 8) \quad (t_1^2 + {}_2^2 + t_3^2)^2 \equiv 4(t_1^2 t_2^2 + t_2^2 t_3^2 + t_3^2 t_1^2), \\ 9) \quad t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 \equiv 3 t_1 t_2 t_3, \\ 10) \quad t_i^3 - t_k^3 \equiv (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)(t_k - t_i). \end{cases}$$

Die Coordinaten der Ecken $M_i$ des Wendeasymptoten-Dreieckes $\delta$ sind:

VII)
$$\begin{cases} x_1 = \frac{v_3 - v_2}{d}, \quad y_1 = \frac{u_2 - u_3}{d}, \\ x_2 = \frac{v_1 - v_3}{d}, \quad y_2 = \frac{u_3 - u_1}{d}, \\ x_3 = \frac{v_2 - v_1}{d}, \quad y_3 = \frac{u_1 - u_2}{d}; \end{cases}$$

wo $d$ den in Gleichung II) 3) angegebenen Werth hat.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\delta$ ist somit, gemäss der Determinantenformel:

$$2F = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$$

für rechtwinklige Coordinaten, die wir ein für allemal annehmen:

$$\text{VIII)} \qquad F = \frac{9}{2d}.$$

Der Inhalt desjenigen Dreiecks $\delta$, welches durch eine beliebige Ebene aus dem Prisma der Wendeasymptotenebenen einer cubischen räumlichen Hyperbel $h^3$ ausgeschnitten wird, ist nicht zu verwechseln mit dem für das ganze vorliegende Curvensystem $(h^3)$ constanten Werthe $J$, welcher durch die Formel IV) (des § 10) dargestellt wird. Bei der später herzuleitenden parametrischen Darstellung der cubischen Raumcurve $h^3$ selbst jedoch werden wir als $xy$-Ebene eine (zunächst beliebige) zur Kantenrichtung des Prismas $\Delta$ normale Ebene annehmen. Für diese ist sodann der Werth $F$ mit dem Werthe $J$ identisch, und wir erhalten somit durch Verbindung der Formeln IV) und VIII) die Relation:

$$\text{IX)} \qquad a \,.\, c \,.\, d = 3.$$

**17.** Wenn wir in den Gleichungen V) die Brüche vereinigen, sodann auf den Zähler die Identität II) 7) anwenden, so erhält die parametrische Darstellung der Curve $c^3$ die neue Form:

$$\text{X)} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{t_1 t_2 t_3}, \\[2ex] y = -\dfrac{\lambda}{2} \cdot \dfrac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{t_1 t_2 t_3}. \end{cases}$$

Nun ist die Entfernung $PM$ des Punktes $P \equiv (xy)$ der Curve $c^3$ vom Anfangspunkte $M$ bestimmt durch die Gleichung:

$$PM^2 = x^2 + y^2,$$

oder nach den Gleichungen X):

$$PM^2 = \frac{1}{4}(1 + \lambda^2) \cdot \frac{(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)^2}{t_1^2 t_2^2 t_3^2}.$$

Durch Umformung des Zählers gemäss der Identität II) 8) erhalten wir:

$$PM^2 = \frac{1 + \lambda^2}{t_1^2} + \frac{1 + \lambda^2}{t_2^2} + \frac{1 + \lambda^2}{t_3^2}.$$

Der Strahl $PM$ möge die Wendeasymptoten $w_i$ in den Punkten $P_i$ durchschneiden. Der Punkt $P_i$ hat dann die Coordinaten:

$$x_i = \frac{1}{t_i}, \quad y_i = \frac{\lambda}{t_i};$$

*daher ist:*

$$\frac{1+\lambda^2}{t_i^2} = x_i^2 + y_i^2 = P_i M^2,$$

und somit:

XI) $$PM^2 = P_1M^2 + P_2M^2 + P_3M^2.$$

Daraus ergiebt sich der Satz:

Jeder vom Doppelpunkte der Curve $c^3$ ausgehende Strahl $m$ durchschneidet je einmal die Curve selbst, sowie ihre drei Wendeasymptoten. Die Entfernung des ersteren Schnittpunktes vom Doppelpunkte ist gleich der Diagonale desjenigen rechtwinkeligen Parallelepipedums, dessen Kanten gleich den Entfernungen der drei letzteren Schnittpunkte vom Doppelpunkte sind.

Der Satz kann zur Construction der Curve $c^3$, deren Wendeaysmptoten-Dreieck gegeben ist, benutzt werden.

18. $d\varphi$ sei im Bogenmaasse der Winkel zweier aufeinander folgender vom Schwerpunkte $M$ des Dreiecks $\delta$ ausgehender Vectoren $m$ und $m_1$ der Curve $c^3$. Aus der Gleichung XI) folgt sodann:

$$PM^2 d\varphi - P_i M^2 d\varphi = P_k M^2 d\varphi + P_l M^2 d\varphi,$$

wo $P_i$ der dem Punkte $P$ zunächstliegende unter den drei Schnittpunkten des Strahles $m$ mit den Wendeasymptoten $w_i$ sein möge. Die linke Seite der Gleichung giebt dann den Inhalt desjenigen unendlich schmalen Flächenstückes an, welches der Winkel $mm_1$ aus der von ihm durchsetzten Flur der Curve $c^3$, und die rechte Seite giebt den Inhalt derjenigen Fläche, welche derselbe Winkel aus der Fläche des Dreiecks $\delta$ ausschneidet. Nach unserer Gleichung sind beide Flächenstücke gleich. Denkt man sich nun eine Reihe unendlich kleiner Winkel $mm_1$, $m_1m_2$ u. s. w. durch Drehung des Strahles $m$ um den Schwerpunkt $M$ aneinander gelegt, so folgt:

Das von zwei beliebigen Vectoren der Curve $c^3$ aus den Fluren derselben Curve ausgeschnittene Flächenstück ist gleich dem von diesen Vectoren aus dem Wendeasymptoten-Dreieck der Curve ausgeschnittenen Stücke.

Halten wir den Vector $m$ fest, während $m_1$ eine ganze Umdrehung beschreibt, so ergiebt sich:

Der Gesammtinhalt der drei Fluren einer Curve $c^3$ ist gleich dem Flächeninhalt des Wendeasymptoten-Dreiecks derselben.

Bezüglich der auf dem Cylinder $\gamma^3$ (§ 1) liegenden doppelt gekrümmten Curven gilt folgender Satz:

Projicirt man eine ganz beliebig auf dem Cylinder $\gamma^3$ gezogene Curve, welche sich jedoch nicht in der Richtung der Erzeugenden des Cylinders ins Unendliche erstrecken darf, aus einem beliebigen Punkte der Schwerpunktsachse des Prismas $\Delta$,

so ist von dem zwischen irgend zwei beliebigen Erzeugenden des Projectionskegels enthaltenen Theile der Oberfläche dieses Kegels dasjenige Stück, welches innerhalb des Prismas $\Delta$ liegt, inhaltsgleich demjenigen Flächenstücke, welches durch die Schalen des Cylinders und die diese einschliessenden Seitenflächen des Prismas begrenzt wird.

Denn in jede Tangentialebene des Projectionskegels schneidet der Cylinder $\gamma^3$ eine Curve $c^3$, das Prisma $\Delta$ aber deren Wendeasymptoten-Dreieck $\delta$ ein. Daher gilt für den in der Tangentialebene befindlichen, von zwei aufeinander folgenden Erzeugenden des Projectionskegels eingeschlossenen unendlich schmalen Flächenstreifen dieses Kegels der aus der Gleichung XI) abgeleitete Satz, nach welchem der innerhalb des Prismas $\Delta$ enthaltene Theil des Streifens gleich dem zwischen Prisma und Cylinder eingeschlossenen Theile desselben ist. Legt man eine Serie solcher Streifen aneinander, so folgt gleiches für den zwischen den beiden äussersten Kegelerzeugenden dieser Serie eingeschlossenen Theil der Kegeloberfläche.

Diejenigen Theile der Oberfläche des eine cubische Raumcurve des Systems $(h^3)$ aus ihrem Mittelpunkte $M$ (§ 6) projicirenden Kegels $k^3$, welche zwischen dem Cylinder $\gamma^3$ und dem Prisma $\Delta$ eingeschlossen sind, mögen die Fluren der betreffenden Raumcurve genannt werden. Bezüglich derselben erhalten wir also das Resultat:

Der Gesammtinhalt der drei Fluren einer Curve $h^3$ ist gleich dem innerhalb des Prismas $\Delta$ eingeschlossenen Theile der Oberfläche ihres Projectionskegels $k^3$. Auch ist der zwischen zwei Erzeugenden des Kegels $k^3$ enthaltene Theil der Fluren der Curve gleich dem zwischen diesen Erzeugenden innerhalb des Prismas $\Delta$ eingeschlossenen Theile der Kegeloberfläche.

Da auf diesem Projectionskegel (nach § 14) auch die zur Curve $h^3$ conjugirte Curve $h'^3$ liegt, so ergiebt sich:

Der Gesammtinhalt der drei Fluren einer Curve $h^3$ ist gleich dem Gesammtinhalte der drei Fluren der zu dieser conjugirten Curve $h'^3$. Auch ist der zwischen zwei beliebigen Erzeugenden des Projectionskegels $k^3$ enthaltene Theil der Fluren der einen Curve gleich dem zwischen denselben Erzeugenden enthaltenen Theile der Fluren der anderen Curve.

**19.** Aus der parametrischen Darstellung der ebenen Curve $c^3$ als Punktort lässt sich die parametrische Darstellung derselben als Tangentenenveloppe herleiten. Die Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ hat die Gleichung:

$$x \cdot \frac{y_2 - y_1}{y_2 x_1 - y_1 x_2} + y \cdot \frac{x_1 - x_2}{y_2 x_1 - y_1 x_2} - 1 = 0.$$

Die Coordinaten der Verbindungslinie sind also:

$$u = \frac{y_2 - y_1}{y_2 x_1 - y_1 x_2}, \quad v = \frac{x_1 - x_2}{y_2 x_1 - y_1 x_2}.$$

Liegen die beiden Punkte auf der Curve $c^3$, so können wir die Werthe von $u$ und $v$ mit Hilfe der Gleichungen V) als Functionen der Parameter $\lambda_1$ und $\lambda_2$ der vom Anfangspunkte nach diesen Punkten hinführenden Vectoren der Curve $c^3$ ausdrücken. Wir erhalten, indem wir $u_i + \lambda_1 v_i$ mit $t'_i$ und $u_i + \lambda_2 v_i$ mit $t''_i$ bezeichnen, folgenden Ausdruck für $u$, in welchem Zähler und Nenner schon beide mit der Grösse $t'_1 t'_2 t'_3 t''_1 t''_2 t''_3$ multiplicirt sind:

$$u = \frac{\lambda_2(t''_2 t''_3 + t''_3 t''_1 + t''_1 t''_2) \,.\, t'_1 t'_2 t'_3 - \lambda_1(t'_2 t'_3 + t'_3 t'_1 + t'_1 t'_2) \,.\, t''_1 t''_2 t''_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(t''_2 t''_3 + t''_3 t''_1 + t''_1 t''_2)(t'_2 t'_3 + t'_3 t'_1 + t'_1 t'_2)}.$$

Indem wir im Zähler jeden Summanden der ersten Klammer mit dem entsprechenden der zweiten zusammenfassen, erhält derselbe die folgende Form:

$$t''_2 t''_3 \,.\, t'_2 t'_3(\lambda_2 t'_1 - \lambda_1 t''_1) + t''_3 t''_1 \,.\, t'_3 t'_1(\lambda_2 t'_2 - \lambda_1 t''_2) + t''_1 t''_2 t'_1 t'_2(\lambda_2 t'_3 - \lambda_1 t''_3).$$

Die drei hier auftretenden Klammern haben, wie sich durch Einführung der Werthe für $t'_i$ und $t''_i$ ergiebt, bezw. den Werth $u_i \,.\, (\lambda_2 - \lambda_1)$.

Der Factor $(\lambda_2 - \lambda_1)$ lässt sich daher aus Zähler und Nenner durch gleichzeitige Division entfernen, und es bleibt:

$$u = \frac{u_1 \,.\, t''_2 t''_3 t'_2 t'_3 + u_2 \,.\, t''_3 t''_1 t'_3 t'_1 + u_3 \,.\, t''_1 t''_2 t'_1 t'_2}{(t''_2 t''_3 + t''_3 t''_1 + t''_1 t''_2)(t'_3 t'_2 + t'_3 t'_1 + t'_1 t'_2)}.$$

In ganz ähnlicher Weise wird die Berechnung für $v$ vorgenommen. Wir erhalten:

$$v = \frac{v_1 \,.\, t''_2 t''_3 t'_2 t'_3 + v_2 \,.\, t''_3 t''_1 t'_3 t'_1 + v_3 \,.\, t''_1 t''_2 t'_1 t'_2}{(t''_2 t''_3 + t''_3 t''_1 + t''_1 t''_2)(t'_2 t'_3 + t'_3 t'_1 + t'_1 t'_2)}.$$

Lassen wir nun die Curvenpunkte $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ in den Curvenpunkt $(x, y)$, dessen Parameter $\lambda$ ist, zusammenfallen, so erhalten wir die Coordinaten $u$, $v$ der Tangente der Curve $c^3$ in diesem Punkte als Functionen des Parameters $\lambda$:

$$\text{XII)} \quad \begin{cases} u = 4 \cdot \dfrac{u_1 t_2^2 t_3^2 + u_2 t_3^2 t_1^2 + u_3 t_1^2 t_2^2}{(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)^2}, \\[2ex] v = 4 \cdot \dfrac{v_1 t_2^2 t_3^2 + v_2 t_3^2 t_1^2 + v_3 t_1^2 t_2^2}{(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)^2}. \end{cases}$$

Hier ist für den Nenner noch die Formel II) 8) zur Verwendung gekommen. Für die conjugirte Curve $c'^3$ ist:

$$u' = -u, \quad v' = -v.$$

**20.** Wir können nunmehr zur parametrischen Bestimmung des eine Curve des räumlichen Systems $(h^3)$ durchlaufenden Punktes übergehen. Zu dem Ende nehmen wir irgend einen Punkt $O$ der Schwerpunktsachse $p$ des Prismas $\Delta$ der Asymptotenebenen zum Anfangspunkte eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, dessen $z$-Achse die Schwerpunktsachse $p$ selbst sei und dessen $x$- und $y$-Achse in der durch $O$ senkrecht zu $p$ gelegten Ebene beliebig, jedoch rechtwinkelig zu einander angenommen werden mögen (siehe Heft 4 Taf. IV Fig. 7). Die Schnittcurve $c^3$ der $xy$-Ebene mit dem Cylinder $\gamma^3$ hat sodann die in den Gleichungen V) angegebene parametrische Darstellung. Ein beliebiger Punkt $P$ der gewählten Curve $h^3$ möge die Coordinaten $x$, $y$, $z$ haben. Den auf der Curve $c^3$ enthaltenen Punkt $x$, $y$ nennen wir sodann $P'$. Die Tangente der Curve $h^3$ im Punkte $P$ heisse $t \equiv PT$. Ihre Projection auf die $xy$-Ebene ist die Tangente $t' \equiv P'T'$ der Curve $c^3$ im Punkte $P'$. Der den Punkt $P$ enthaltende Zweig der Curve $h^3$ durchschneide die $xy$-Ebene, also auch die Curve $c^3$, im Punkte $P_0$, dessen Parameter wir mit $\lambda_0$ bezeichnen wollen, während $\lambda$ der Parameter des Punktes $P'$ ist. Die Hauptachse $h$ des zur Curve $h^3$ gehörigen Nullsystemes möge die $xy$-Ebene im Punkte $(\xi, \eta)$ durchbohren. Der senkrechte Abstand der Hauptnullachse $h$ von der Tangentialebene $tt'$ des Cylinders $\gamma^3$ längs der Erzeugenden $PP'$ desselben werde mit $\varrho$ bezeichnet. $\varphi$ ist im Bogenmaasse die Grösse des Winkels, den die Tangente $t$, ein Leitstrahl des Nullsystems, mit der Hauptachse $h$ des letzteren bildet.

Wenn wir nun unter $u$ und $v$ die im vorigen Paragraphen berechneten Coordinaten verstehen, so ist

$$ux + vy - 1 = 0$$

die Gleichung der Tangente $t'$. Die senkrechte Entfernung des Punktes $(\xi, \eta)$ von der Geraden $t'$ ist dann:

$$\varrho = \frac{u\xi + v\eta - 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Bekanntlich wird nun der Winkel $\varphi$, den die Tangente $t$ mit der Hauptachse des Nullsystems bildet, bestimmt durch die Formel:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{c}{\varrho},$$

in welcher $c$, wie früher, die Constante des Nullsystems bedeutet. Bezeichnen wir das Bogenelement der Curve $c^3$ im Punkte $P' \equiv (x, y)$ mit $ds$, das Inkrement der $z$-Coordinate im Punkte $P$ mit $dz$, so ist:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{ds}{dz},$$

$$dz = ds\frac{\varrho}{c} = ds\frac{u\xi + v\eta - 1}{c\sqrt{u^2+v^2}};$$

oder, da $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ ist:

$$dz = \frac{u\xi + v\eta - 1}{c\sqrt{u^2+v^2}}\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

In der rechten Seite dieser Formel sind $c$, $\xi$, $\eta$ Constanten, während die Grössen $x, y, u, v$ in den Gleichungen V) und XII) als Functionen ein und desselben Parameters $\lambda$ angegeben wurden. Wir erhalten daher durch Integration die Coordinate $z$ als Function des Parameters $\lambda$:

$$z = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{u\xi + v\eta - 1}{c\sqrt{u^2+v^2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2}\cdot d\lambda.$$

Die untere Grenze des Integrals ist $\lambda_0$, weil der Werth der Coordinate $z$ für den Werth $\lambda_0$ des Parameters $\lambda$ verschwinden muss.

Aus den Gleichungen V) oder auch X) berechnen wir:

$$\frac{dx}{d\lambda} = -\frac{v_1t_2^2t_3^2 + v_2t_3^2t_1^2 + v_3t_1^2t_2^2}{t_1^2t_2^2t_3^2},$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = +\frac{u_1t_2^2t_3^2 + u_2t_3^2t_1^2 + u_3t_1^2t_2^2}{t_1^2t_2^2t_3^2}.$$

Unter Benutzung der Gleichungen X) und XII) ergiebt sich hieraus:

$$\frac{dx}{d\lambda} = -v\,.\,x^2, \quad \frac{dy}{d\lambda} = +u\,.\,x^2.$$

Demnach ist:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2} = x^2\sqrt{u^2+v^2};$$

wodurch sich das Integral für $z$ in folgendes verwandelt:

$$z = \frac{1}{c}\cdot\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}(u\xi + v\eta - 1)x^2d\lambda.$$

Nun ist aber:

$$ux^2 = \frac{u_1}{t_1^2} + \frac{u_2}{t_2^2} + \frac{u_3}{t_3^2},$$

$$vx^2 = \frac{v_1}{t_1^2} + \frac{v_2}{t_2^2} + \frac{v_3}{t_3^2},$$

$$x^2 = \frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} + \frac{1}{t_3^2};$$

wie sich unter Benutzung der Formeln X) oder V) und der Identitäten II) leicht zeigen lässt.

Durch geeignete Zusammenfassung der Glieder unter dem Integrale verwandelt sich letzteres in die folgenden drei Integrale:

$$z = \frac{f_1}{c}\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{1}{t_1^2}\,d\lambda + \frac{f_2}{c}\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{1}{t_2^2}\,d\lambda + \frac{f_3}{c}\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{1}{t_3^2}\,d\lambda,$$

in welchen

XIII) $$u_i\xi + v_i\eta - 1 \equiv f_i$$

gesetzt wurde.

Die Umwandlung:

$$\frac{1}{t_1^2} = \frac{1}{2d}\cdot\frac{2d}{t_1^2} = \frac{1}{2d}\cdot\frac{t_1(v_2 - v_3) - v_1(t_2 - t_3)}{t_1^2},$$

gemäss den Formeln II) 1), 2), 3) durchgeführt und auf $\frac{1}{t_2^2}$, $\frac{1}{t_3^2}$ in g Weise angewendet, erleichtert die Integration, weil der Ausdruck:

$$\frac{t_1(v_2 - v_3) - v_1(t_2 - t_3)}{t_1^2}\cdot d\lambda$$

das Differential von $\frac{t_2 - t_3}{t_1}$ nach dem Parameter $\lambda$ ist.

Die Integration ergiebt daher den folgenden Werth für $z$:

$$z = \frac{1}{2cd}\left[\frac{f_1(t_2 - t_3)}{t_1} + \frac{f_2(t_3 - t_1)}{t_2} + \frac{f_3(t_1 - t_2)}{t_3}\right]$$
$$- \frac{1}{2cd}\left[\frac{f_1(t_2^0 - t_3^0)}{t_1^0} + \frac{f_2(t_3^0 - t_1^0)}{t_2^0} + \frac{f_3(t_1^0 - t_2^0)}{t_3^0}\right].$$

Unter $t_i^0$ verstehen wir den Ausdruck:

XIV) $$t_i^0 \equiv u_i + v_i\lambda_0.$$

Da die $x$- und $y$-Coordinaten des Punktes $P$ der Curve $h^3$ mi entsprechenden Coordinaten des Punktes $P'$ der Curve $c^3$, welche in Gleichungen V) oder X) parametrisch dargestellt wurden, identisch so ist hiermit die vollständige parametrische Darstellung Curve $h^3$ gegeben:

XV) $$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} + \dfrac{1}{t_3}, \\ y = \dfrac{\lambda}{t_1} + \dfrac{\lambda}{t_2} + \dfrac{\lambda}{t_3}, \\ z = \dfrac{1}{2cd}\left[\dfrac{f_1(t_2 - t_3)}{t_1} + \dfrac{f_2(t_3 - t_1)}{t_2} + \dfrac{f_3(t_1 - t_2)}{t_3}\right] \\ \quad - \dfrac{1}{2cd}\left[\dfrac{f_1(t_2^0 - t_3^0)}{t_1^0} + \dfrac{f_2(t_3^0 - t_1^0)}{t_2^0} + \dfrac{f_3(t_1^0 - t_2^0)}{t_3^0}\right]. \end{cases}$$

**21.** Durch eine besondere F[illegible] den Werth der Constante $\lambda_0$ können wir die parametrische [illegible] Curve $h^3$ noch vereinfachen. Zunächst mögen zu diesem [illegible] der drei Scheitelpunkte $S$ der Curve berechn[illegible] wir mit $\xi, \eta, \zeta$ Dann sind die Co[illegible] der Scheitelpunkte

der in der $xy$-Ebene enthaltenen ebenen Curve $c^3$. Gemäss dem im § 8 ausgesprochenen Satze erhalten wir letztere, indem wir die Coordinaten der Eckpunkte $M_i$ des Wendeasymptotendreiecks mit $\frac{3}{2}$ multipliziren. Nach Formel VII) ist daher:

$$\xi_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{v_3 - v_2}{d}, \quad \eta_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{u_2 - u_3}{d}.$$

Demnach ist der Parameter $\lambda_1$ des aus dem Anfangspunkte nach dem zum Index 1 gehörigen Scheitelpunkte der Curve $c^3$ gezogenen Strahles:

$$\lambda_1 = \frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{u_2 - u_3}{v_3 - v_2}.$$

Diesen Werth brauchen wir nur in die letzte Gleichung der Formel XV) einzusetzen, um den Werth der Coordinate $\zeta_1$ zu erhalten. Nach einer einfachen Anwendung der Formel II) 3) ergiebt sich:

$$\zeta_1 = \frac{3}{2cd}[f_2 - f_3] - \frac{1}{2cd}\varphi_0.$$

Hier ist unter $\varphi_0$ der zweite Klammerausdruck in der Formel für $z$ (XV) verstanden. In gleicher Weise berechnen wir $\zeta_2$ und $\zeta_3$ und finden für die Coordinaten der drei Scheitelpunkte $S_i$ der Curve $h^3$ die Werthe:

$$\text{XVI)} \begin{cases} \xi_1 = \frac{3}{2d}(v_3 - v_2), & \eta_1 = \frac{3}{2d}(u_2 - u_3), & \zeta_1 = \frac{3}{2cd}(f_2 - f_3) - \frac{\varphi_0}{2cd}, \\ \xi_2 = \frac{3}{2d}(v_1 - v_3), & \eta_2 = \frac{3}{2d}(u_3 - u_1), & \zeta_2 = \frac{3}{2cd}(f_3 - f_1) - \frac{\varphi_0}{2cd}, \\ \xi_3 = \frac{3}{2d}(v_2 - v_1), & \eta_3 = \frac{3}{2d}(u_1 - u_2), & \zeta_3 = \frac{3}{2cd}(f_1 - f_2) - \frac{\varphi_0}{2cd}. \end{cases}$$

Die Summe der $\xi_i$ ist ebenso wie die Summe der $\eta_i$ Null; die Summe der $\zeta_i$ würde verschwinden, wenn $\varphi_0$ den Werth Null hätte. In letzterem Falle würde also auch die aus den neun Grössen gebildete Determinante verschwinden. Diese aber ist das Absolutglied der mittelst Determinante gebildeten Gleichung der Medianebene $\mu$ der Curve $h^3$. Bestimmen wir also $\lambda_0$ als Wurzel der Gleichung:

$$\varphi_0 = 0,$$

so gehen die Medianebenen $\mu$ der hiermit auf eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit reducirten Curven $h^3$ durch den Coordinaten-Anfangspunkt, welcher demnach der Mittelpunkt $M$ aller dieser Curven $h^3$ ist. Die Werthe für die $\zeta_i$ werden sodann:

$$\text{XVIa)} \begin{cases} \zeta_1 = \frac{3}{2cd}(f_2 - f_3), \\ \zeta_2 = \frac{3}{2cd}(f_3 - f_1), \\ \zeta_3 = \frac{3}{2cd}(f_1 - f_2); \end{cases}$$

und die parametrische Bestimmung der Curven $h^3$ vereinfacht sich in die folgende:

XVII)
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} + \dfrac{1}{t_3}, \\ y = \dfrac{\lambda}{t_1} + \dfrac{\lambda}{t_2} + \dfrac{\lambda}{t_3}, \\ z = \dfrac{a}{6}\left[\dfrac{f_1(t_2-t_3)}{t_1} + \dfrac{f_2(t_3-t_1)}{t_2} + \dfrac{f_3(t_1-t_2)}{t_3}\right]. \end{cases}$$

In dieser Formel ist beim Werthe von $z$ noch der Ausdruck $\frac{1}{2cd}$ durch den ihm nach Formel IX) gleichwerthigen Ausdruck $\frac{a}{6}$ ersetzt worden. **Diese Darstellung der Curven $h^3$ wollen wir den weiteren Entwickelungen nunmehr allein zu Grunde legen. Da der Mittelpunkt aller dieser Curven im Coordinaten-Anfangspunkte liegt, so ist ihre Mannigfaltigkeit nur noch $\infty^3$,** wie auch die Zahl der drei willkürlichen Constanten $a$, $\xi$, $\eta$ beweist.

**22.** Zur Bestätigung des Mittelpunkts-Charakters des Coordinaten-Anfangspunktes wollen wir hier nachweisen, dass der letztere Punkt die reelle Mitte der beiden conjugirt imaginären Schnittpunkte unserer jetzigen Curven $h^3$ mit der Schwerpunktsachse $p$ des Prismas $\Delta$ ist, wie das für den Mittelpunkt der Curven $h^3$ schon im § 7 hervorgehoben wurde.

Von den Coordinaten der beiden Schnittpunkte haben $X$ und $Y$ den Werth Null; $Z$ werden wir demnach finden, wenn wir diejenigen Werthe von $\lambda$ ermitteln und in die obige Gleichung für $z$ einsetzen, durch welche die Werthe von $x$ und $y$ gleichzeitig annullirt werden. Die gesuchten Werthe von $\lambda$ ergeben sich leicht als die beiden Wurzeln der Gleichung:

A)
$$t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = 0.$$

Aus dieser folgt unter Benutzung von II) 6) und 7):

$$2t_1^2 - 2t_2 t_3 = 0,$$

und:

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 0.$$

Addiren wir die linken Seiten dieser Gleichungen, so ergiebt sich:

$$3t_1^2 + (t_2 - t_3)^2 = 0,$$

also:

$$\frac{t_2 - t_3}{t_1} = \pm i \,.\, \sqrt{3}.$$

In gleicher Weise folgt aus Gleichung A), dass:

$$\frac{t_3 - t_1}{t_2} = \frac{t_1 - t_2}{t_3} = \pm i \,.\, \sqrt{3}$$

ist. Führen wir diesen Werth in die unter Formel XVII) stehende Gleichung für $z$ ein, so erhalten wir, da zudem nach Gleichung XIII)

$$f_1 + f_2 + f_3 = -3$$

**als Coordinaten der beiden Schnittpunkte der cubischen [Hyper]bel $h^3$ mit der $z$-Achse die folgenden:**

XVIII) $X = Y = 0, \quad Z_1 = +\frac{a}{2} \cdot i\sqrt{3}, \quad Z_2 = -\frac{a}{2} \cdot i \cdot \sqrt{3}.$

Da $Z_1 + Z_2 = 0$ ist, so ist der Coordinaten-Anfangspunkt die reelle Mitte der beiden conjugirt imaginären Schnittpunkte, also nach § 7 der Mittelpunkt der Curve $h^3$, was zu beweisen war.

Der Abstand der beiden Schnittpunkte der Curve $h^3$ mit der Schwerpunktsachse $p$ des Prismas $\Delta$ ist:

XVIIIa) $$A = a \cdot i \cdot \sqrt{3}.$$

**23.** Gemäss den Sätzen des § 14 werden zwei conjugirte cubische Raumcurven $h^3$ und $h'^3$ aus ihrem gemeinschaftlichen Mittelpunkte $M$ durch denselben Kegel dritter Ordnung projicirt und ist der Scheitelpunkt $M$ dieses Kegels jedesmal die Mitte derjenigen Strecke, welche auf einer Generatrix des Kegels durch die Curven $h^3$ und $h'^3$ abgeschnitten wird. Nun ist ohne Weiteres klar, dass aus jedem räumlichen Gebilde, welches in bestimmter Eigenschaft mit einer der beiden conjugirten Curven verbunden ist, das entsprechende, zur conjugirten Curve gehörige Gebilde sich vermittelst derselben Projectionsart ergeben muss, durch welche die eine Curve aus der anderen entstanden ist. Demgemäss giebt uns die obige höchst einfache Beziehung der beiden conjugirten Curven zu einander für die Lage der Hauptnullachse $h'$ der Curve $h'^3$ den Satz:

Die Hauptnullachse $h'$ der zu $h^3$ conjugirten Curve $h'^3$ liegt in der Ebene $[hp]$, welche die Hauptnullachse der ersteren Curve mit der Schwerpunktsachse des Prismas $\Delta$ verbindet, auf der entgegengesetzten Seite in gleichem Abstande von $p$, wie die Gerade $h$. Die Coordinaten des Spurpunktes der Achse $h'$ in der $xy$-Ebene sind demnach:

$$\xi' = -\xi, \quad \eta' = -\eta.$$

Wir können nun die parametrische Darstellung für die Curve $h'^3$ in zweifacher Weise aus derjenigen der Curve $h^3$ herleiten. Nach den oben angeführten Sätzen des § 14 ergiebt sich nämlich aus den Gleichungen XVII), dass

XIX) $$\begin{cases} x' = -\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_3}, \\ y' = -\frac{\lambda}{t_1} - \frac{\lambda}{t_2} - \frac{\lambda}{t_3}, \\ z' = -\frac{1}{2cd}\left\{\frac{f_1(t_2-t_3)}{t_1} + \frac{f_2(t_3-t_1)}{t_2} + \frac{f_3(t_1-t_2)}{t_3}\right\} \end{cases}$$

eine parametrische Darstellung der Coordinaten des die Curve $h'^3$ durchlaufenden Punktes ist. Andererseits erhalten wir aber auch eine parametrische Darstellung für $h'^3$, wenn wir in den Gleichungen XVII) die Constanten $u_i$, $v_i$ durch $-u_i$, $-v_i$, $\xi$ und $\eta$ durch $-\xi$, $-\eta$ und schliess-

lich $c$ durch den noch unbekannten Werth $c'$ ersetzen. Wir sind damit nur vom Prisma $\Delta'$ und der Hauptnullachse $h'$, statt von $\Delta$ und $h$ ausgegangen. Da nun $\lambda$ in dieser zweiten parametrischen Darstellung dasselbe bedeutet, wie in der obigen (XIX), so müssen die Werthe von $x'$, $y'$, $z'$ in beiden gleich sein. Für $x'$ und $y'$ trifft das ersichtlich zu, für $z'$ erhalten wir im jetzigen Falle, da $d$, $f_i$ und $\frac{t_2-t_3}{t_1}$ u. s. w. durch die Einsetzung der negativen Werthe sich nicht ändern:

$$z' = \frac{1}{2c'd} \cdot \left\{ \frac{f_1(t_2-t_3)}{t_1} + \cdots \right\}.$$

Setzen wir beide Werthe von $z'$ gleich, so ergiebt sich:

$$c' = -c.$$

Die Nullconstante der Curve $h'^3$ ist also gleich dem negativen Werthe der Nullconstante der conjugirten Curve $h^3$.

**24.** Sind $x$, $y$, $z$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes $N$ im Raume und $u$, $v$, $w$ die Coordinaten derjenigen Ebene $\nu$, welche ihm in dem zur Curve $h^3$ gehörigen Nullsysteme entspricht, so besteht die Gleichung:

$$1) \qquad ux + vy + wz = 1,$$

weil die Ebene $\nu$ den Punkt $N$ enthält. Bekanntlich gehört die vom Punkte $N$ auf die Hauptnullachse $h$ des Prismas $\Delta$ gefällte Senkrechte, also auch deren Fusspunkt, der Ebene $\nu$ an.*

Da der Fusspunkt die Coordinaten $\xi$, $\eta$, $z$ hat, wo $\xi$ und $\eta$ die Coordinaten des Spurpunktes der Hauptnullachse $h$ in der $xy$-Ebene sind, so ist:

$$2) \qquad u\xi + v\eta + wz = 1.$$

Die Länge der genannten Senkrechten $\varrho$ ist:

$$\varrho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Die Normale vom Coordinaten-Anfangspunkte auf die Ebene $\nu$ bildet mit der $z$-Achse des Coordinatensystemes den Winkel $\varphi'$, für dessen Cosinus die Gleichung gilt:

$$\cos\varphi' = \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}.$$

Der Winkel $\varphi'$ ist, weil die $z$-Achse der Achse $h$ parallel ist, das Complement des Winkels $\varphi$, den die Ebene $\nu$ mit letzterer bildet. Demnach haben wir:

$$\tang\varphi = \cotg\varphi' = \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Da nun nach bekannter Eigenschaft des Nullsystemes

$$\varrho \,.\, \tang\varphi = c$$

ist, so ergiebt sich:

---

* Reye, Geometrie der Lage, Bd. II 10. Vortrag.

$$\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\cdot\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2}}=c,$$

oder:

3) $$[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\,w^2=c^2(u^2+v^2).$$

Mit Hilfe der Gleichungen 1), 2), 3) lassen sich die Coordinaten der Nullebene durch die des Nullpunktes, und umgekehrt, ausdrücken.

Aus Gleichung 1) und 2) folgt:

4) $$v=\frac{u(\xi-x)}{y-\eta}.$$

Eingesetzt in Gleichung 1) ergiebt das:

5) $$w=\frac{y-\eta+u(\eta x-\xi y)}{(y-\eta)z}.$$

Durch Verbindung von Gleichung 4) mit Gleichung 3) aber erhalten wir:

$$w^2=\frac{c^2u^2}{(y-\eta)^2},$$

oder:

6) $$w=\frac{\pm cu}{(y-\eta)}.$$

Das unbestimmte Vorzeichen bleibe mit $c$ verbunden, bis es sich bestimmen lässt. Aus den Gleichungen 5) und 6) folgt sodann:

$$u=\frac{\eta-y}{\eta x-\xi y\mp cz}.$$

Setzen wir diesen Werth in die Gleichung 4) ein, so ergiebt sich:

$$v=\frac{x-\xi}{\eta x-\xi y\mp cz},$$

und, wenn wir den Werth für $u$ in die Gleichung 6) einführen:

$$w=\frac{\mp c}{\eta x-\xi y\mp cz}.$$

Um nun über das unbestimmte Vorzeichen richtig zu verfügen, beachten wir, dass die Nullebene des Anfangspunktes als Medianebene der Curve $k^3$ deren Scheitelpunkte enthalten muss. Setzen wir die Coordinaten des Punktes $N\equiv M$ alle gleich Null, so erhalten wir als Coordinaten-Verhältniss der Ebene $\nu\equiv\mu$ das folgende:

$$u:v:w=\eta:-\xi:\mp c.$$

Demnach ist die Gleichung der Medianebene:

$$\eta x-\xi y\mp cz=0.$$

Man kann sich nun durch Einsetzen der in Formel XVI) und XVI a) gegebenen Coordinatenwerthe der drei Scheitelpunkte leicht überzeugen, dass die linke Seite der Gleichung nur dann verschwindet, wenn das

untere Vorzeichen von $c$ gewählt wird. Demnach sind die Werthe für die Coordinaten der Nullebene $\nu$ des Punktes $N$ die folgenden:

$$\text{XX)} \quad \begin{cases} u = \dfrac{\eta - y}{\eta x - \xi y + cz}, \\[2ex] v = \dfrac{x - \xi}{\eta x - \xi y + cz}, \\[2ex] w = \dfrac{c}{\eta x - \xi y + cz}. \end{cases}$$

Die Gleichung der Medianebene ist:

$$\text{XXI)} \qquad \eta x - \xi y + cz = 0.$$

Aus Gleichung 6) erhalten wir den Werth von $y$, aus Gleichung 2) den Werth von $z$, und wenn wir diese Werthe in Gleichung 1) einsetzen, so ergiebt sich der Werth von $x$.

Es ist also:

$$\text{XXII)} \quad \begin{cases} x = \xi + \dfrac{cv}{w}, \\[2ex] y = \eta - \dfrac{cu}{w}, \\[2ex] z = \dfrac{1 - u\xi - v\eta}{w}. \end{cases}$$

**25.** Mittelst der erhaltenen Gleichungen für $u$, $v$, $w$ sind wir im Stande, die parametrische Darstellung des Schmiegungsebenen-Torsus der Curve $h^3$ sofort anzugeben. Wir brauchen nur in die Gleichungen XX) die Werthe der Coordinaten $x$, $y$, $z$ aus den Gleichungen XVII) einzusetzen. Denn, wenn ein Punkt die Curve $h^3$ durchläuft, so beschreibt seine Nullebene den Schmiegungsebenen-Torsus derselben.

Bei der Einsetzung der genannten Werthe erhalten wir als Nenner der drei Brüche in XX) den Ausdruck:

$$N \equiv \eta\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) - \xi\lambda\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) + \frac{1}{2d}\left[\frac{f_1(t_2 - t_3)}{t_1} + \frac{f_2(t_3 - t_1)}{t_2} + \frac{f_3(t_1 - t_2)}{t_3}\right].$$

Vereinigen wir die Coefficienten von $\frac{1}{t_i}$, so ergiebt sich z. B. als Coefficient von $\frac{1}{t_1}$ der folgende:

$$C_1 \equiv \frac{1}{2d}\{\eta[2d + v_1(t_2 - t_3)] + \xi[u_1(t_2 - t_3) - 2\lambda d] - [t_2 - t_3]\}.$$

Nun ist aber:

$$2d \equiv u_1 v_2 - u_2 v_1 + u_3 v_1 - u_1 v_3,$$

$$t_2 \equiv u_2 + v_2\lambda, \quad t_3 \equiv u_3 + v_3\lambda.$$

Demgemäss erhalten wir:

$$C_1 \equiv \frac{1}{2d}\{t_1[\xi u_2 + \eta v_2 - \xi u_3 - \eta v_3] - [t_2 - t_3]\} \equiv \frac{1}{2d}\{t_1[f_2 - f_3] - [t_2 - t_3]\}$$

Entsprechende Werthe bilden die Coefficienten $C_2$ und $C_3$ von $\frac{1}{t_2}$ bezw. $\frac{1}{t_3}$. Es ist daher:

$$N \equiv \frac{C_1}{t_1} + \frac{C_2}{t_2} + \frac{C_3}{t_3} \equiv \frac{-1}{2d}\left\{\frac{t_2 - t_3}{t_1} + \frac{t_3 - t_2}{t_2} + \frac{t_1 - t_2}{t_3}\right\};$$

folglich ergiebt sich:

$$\text{XXIII)} \quad \begin{cases} u = \dfrac{2d[\lambda(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1) - \eta t_1t_2t_3]}{(t_1 - t_2)t_1t_2 + (t_2 - t_3)t_2t_3 + (t_3 - t_1)t_3t_1}, \\ v = \dfrac{2d[\xi t_1t_2t_3 - (t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1)]}{(t_1 - t_2)t_1t_2 + (t_2 - t_3)t_2t_3 + (t_3 - t_1)t_3t_1}, \\ w = \dfrac{-2cd.\,t_1t_2t_3}{(t_1 - t_2)t_1t_2 + (t_2 - t_3)t_2t_3 + (t_3 - t_1)t_3t_1} \end{cases}$$

als die parametrische Darstellung des Schmiegungsebenen-Torsus der Curve $h^3$.

Es lässt sich leicht zeigen, dass die Coordinaten der Ebenen des Torsus der conjugirten Curve $h'^3$ absolut gleich und nur dem Vorzeichen noch verschieden von denen des Torsus von $h^3$ sind; also ist:

$$u' = -u, \quad v' = -v, \quad w' = -w.$$

Köln, 20. September 1893.

XVI.

# Ein System monoconfocaler Kegelschnitte.

Von

Dr. J. Keller

in Zürich.

Hierzu Tafel V Fig. 1—16.

Den Leser dieser Abhandlung verweise ich auf meine zwei früheren mit demselben Gegenstand sich befassenden Arbeiten, erschienen in der Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich: „Ueber monoconfocale Kegelschnitte“ Bd. XXVII S. 1—29 und „Orthogonal-conjugirte Schaaren monoconfocaler Kegelschnitte“ Bd. XXXII S. 33—79. Diesen geometrischen Betrachtungen liegt folgendes Princip zu Grunde: Es werde ein Rotationskegel gedacht, dessen Mittelpunkt auf der Bildebene liegt, dessen Achse auf dieser senkrecht steht und dessen Erzeugenden mit der Achse Winkel von $45^0$ einschliessen. Schneidet man diese Kegelfläche mit einer Ebene $E$ von der Spur $f$ und dem Neigungswinkel $\alpha$ mit der Bildebene und projicirt den Schnitt orthogonal auf die Bildebene, so erhält man eine Curve zweiter Ordnung, welche den Kegelmittelpunkt zu einem ihrer Brennpunkte $F$, die Spur $f$ zur entsprechenden Directrix und $tg\,\alpha = e$ zur numerischen Excentricität besitzt. Dieser Beziehung gemäss entspricht jeder Ebene des Raumes ein Kegelschnitt der Bildebene, welcher $F$ zum Brennpunkte hat und umgekehrt. Damit übertragen sich alle Fragen über Kegelschnitte in der Bildebene mit einem gemeinsamen Brennpunkte auf Fragen nach Ebenen des Raumes, welche mit jener Fundamentalkegelfläche in gewisser Beziehung stehen. Auf S. 34—37 der zweiten der vorhin citirten Abhandlungen ist eine kurz gefasste Recapitulation der ersteren grundlegenden gegeben. Diese zweite Abhandlung selbst befasst sich dann eingehend mit dem System monoconfocaler Kegelschnitte, welche zwei gemeinsame Tangenten besitzen, sowie mit seinem orthogonal-conjugirten System mit zwei imaginären gemeinsamen Tangenten.

Die vorliegende dritte Arbeit über dieses Thema beschäftigt sich mit der Frage nach solchen Kegelschnitten des Systems, welche einen fest gegebenen berühren und denen ein vorgeschriebenes Achsenverhältniss resp. eine vorgeschriebene numerische Excentricität zukommt. Räumlich kommt diese Frage auf die Untersuchung der Fläche zurück, gebildet von den *Ebenen*, welche einen bestimmten auf der Fundamentalkegelfläche liegenden

Kegelschnitt berühren und mit der Bildebene einen vorgeschriebenen Winkel einschliessen.

Seien $F$ und $f$ Brennpunkt und entsprechende Directrix eines auf der Bildebene liegenden Kegelschnittes $K$, der Parameter $p$ die Entfernung $(F, f)$ und $e$ die numerische Excentricität. Wählen wir $f$ als Ordinaten- und das Perpendikel aus $F$ auf $f$ als Abscissenachse eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dann lautet die Gleichung des Kegelschnittes $K$:

$$1)\qquad (1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0.$$

Die entsprechende Ebene $E$ des Raumes hat $f$ zur Spur mit der Bildebene und schliesst mit dieser einen Winkel $\alpha$ ein, so dass $tg\,\alpha = e$ ist. Bezogen auf das rechtwinklige räumliche Coordinatensystem, dessen $x$- und $y$-Achse mit den auf der Bildebene liegenden übereinstimmen, heisst die Gleichung dieser Ebene:

$$2)\qquad ex-z=0.$$

Die mit dieser zur Bildebene symmetrisch gelegene Ebene $ex+z=0$ würde die Fundamentalkegelfläche in einer Curve schneiden, deren Orthogonalprojection mit $K$ zusammenfällt. — Sei $P$ ein beliebiger Punkt des Kegelschnittes $K$ von den Coordinaten $x_1$, $y_1$, dann ist

$$3)\qquad [(1-e^2)x_1-p]\,x+y_1y+p(p-x_1)=0$$

die Gleichung der Tangente $t$ in $P$ an $K$. Die Ebene $E$ schneidet die Fundamentalkegelfläche in einer Curve $K_r$, deren Orthogonalprojection $K$ ist. Dem Punkte $P$ auf $K$ entspricht auf $K_r$ ein Punkt $P_r$ und der Tangente $t$ die Tangente $t_r$ in $P_r$. Es sollen jetzt durch $t_r$ die zwei Ebenen gelegt werden, welche mit der Bildebene den vorgeschriebenen Winkel $\varphi$ einschliessen. Die Tangente $t_r$ erscheint als Schnittlinie der zwei Ebenen:

$$E \equiv ex-z=0,\quad N\equiv[(1-e^2)x_1-p]x+y_1y+p(p-x_1)=0.$$

Demnach ist

$$4)\quad E-\lambda N \equiv ex-z-\lambda\{[(1-e^2)x_1-p]x+y_1y+p(p-x_1)\}=0$$

die Gleichung irgend einer durch $t_r$ gehenden Ebene. Transformiren wir diese Gleichung auf die Normalform:

$$5)\qquad \frac{ex-z-\lambda\{[(1-e^2)x_1-p]x+y_1y+p(p-x_1)\}}{\sqrt{\{e-\lambda[(1-e^2)x_1-p]\}^2+\lambda^2y^2_1+1}}=0,$$

dann ist der Winkel $\varphi$, den diese Ebene mit der Bildebene einschliesst, durch die Gleichung bestimmt:

$$6)\qquad cos.\varphi=m=\frac{-1}{\sqrt{\{e-\lambda[(1-e^2)x_1-p]\}^2+\lambda^2y^2_1+1}}.$$

Durch Umformung geht diese Gleichung über in

$$7)\ m^2\{[(1-e^2)x_1-p]^2+y^2_1\}\lambda^2-2m^2e[(1-e^2)x_1-p]\lambda+m^2e^2+m^2-1=0,$$

oder unter Benutzung der Bedingung, dass $P(x_1y_1)$ auf $K$ liegt, in

$$7')\ m^2e^2x_1[(1-e^2)x_1-2p]\lambda^2-2m^2e[(1-e^2)x_1-p]\lambda+m^2e^2+m^2-1=0.$$

Die Gleichung 7) ist in $\lambda$ vom zweiten Grade und liefert zwei Wurzeln $\lambda_1$, $\lambda_2$; diesen entsprechen nach 4) die zwei Ebenen:

$$8)\quad \begin{cases} E-\lambda_1 N \equiv ex - z - \lambda_1\{[(1-e^2)x_1 - p]x + y_1 y + p(p-x_1)\} = 0, \\ E-\lambda_2 N \equiv ex - z - \lambda_2\{[(1-e^2)x_1 - p]x + y_1 y + p(p-x_1)\} = 0. \end{cases}$$

Die Wurzelwerthe $\lambda_1$, $\lambda_2$ sind reell und von einander verschieden, reell und einander gleich oder conjugirt-complex, je nachdem

$$9)\quad m^2e^2[(1-e^2)x_1-p]^2-(m^2e^2+m^2-1)\{[(1-e^2)x_1-p]^2+y^2_1\} \gtreqless 0.$$

**I. Fall: $m^2e^2+m^2-1<0$.**

Bei dieser Annahme wird die linke Seite der Ungleichung 9) positiv, folglich werden $\lambda_1$ und $\lambda_2$ reell und von einander verschieden; aus

$$m^2e^2+m^2-1<0$$

folgt:

$$m^2<\frac{1}{1+e^2},$$

das heisst:

$$\cos^2\varphi<\cos^2\alpha,$$

also:

$$\varphi>\alpha.$$

Wenn somit die gesuchte Ebene mit der Bildebene einen Winkel $\varphi$ einschliesst, der grösser ist als der Winkel $\alpha$, den die gegebene Ebene $E$ mit der Bildebene macht, dann giebt es durch jede Tangente des Kegelschnittes $K_r$ stets zwei reelle und von einander verschiedene Ebenen der verlangten Art.

**II. Fall: $m^2e^2+m^2-1=0$.**

In diesem Falle ist die eine Wurzel der Gleichung in $\lambda$, z. B. $\lambda_1=0$ und dieser entspricht die Ebene $E\equiv ex-z=0$ selbst; die andere Wurzel wird:

$$10)\quad \lambda_2=\frac{2e[(1-e^2)x_1-p]}{[(1-e^2)x_1-p]^2+y^2_1}.$$

Aus der Annahme: $m^2e^2+m^2-1=0$ folgt $\varphi=\alpha$, das heisst: Wenn die gesuchte Ebene mit der Bildebene denselben Winkel $\alpha$ einschliesst, wie die gegebene Ebene $E$, so gehen gleichfalls durch jede Tangente des Kegelschnittes $K_r$ zwei Ebenen; die eine fällt jeweilen mit der gegebenen zusammen, die andere ist davon verschieden und besitzt die Gleichung:

$$11)\quad ex-z-\frac{2e[(1-e^2)x_1-p]}{[(1-e^2)x_1-p]^2+y^2_1}\{[(1-e^2)x_1-p]x+y_1y+p(p-x_1)\}=0.$$

**III Fall: $m^2e^2+m^2-1>0$.**

Bei dieser Voraussetzung kann die linke Seite der Ungleichung 9) negativ werden. Fassen wir für einen Augenblick $x_1$ und $y_1$ als variable Coordinaten auf, so stellt die Gleichung

$$m^2e^2[(1-e^2)x_1-p]^2-(m^2e^2+m^2-1)\{[(1-e^2)x_1-p]^2+y^2_1\}=0$$

*ein Paar* gerader Linien dar, denn sie lässt sich in der Form schreiben:

oder:
$$\{\sqrt{1-m^2}[(1-e^2)x_1-p]\}^2-\{\sqrt{m^2e^2+m^2-1}\,y_1\}^2=0,$$
$$\begin{cases}\{\sqrt{1-m^2}[(1-e^2)x_1-p]+\sqrt{m^2e^2+m^2-1}\,y_1\}\\ \cdot\{\sqrt{1-m^2}[(1-e^2)x_1-p]-\sqrt{m^2e^2+m^2-1}\,y_1\}=0.\end{cases}$$

Ist nun $e$ von 1 verschieden, das heisst ist $K$ Ellipse oder Hyperbel, so liegt dieses Linienpaar symmetrisch zur $x$-Achse und sein Schnittpunkt fällt in den Mittelpunkt des Kegelschnittes $K$. Die Winkel $\delta$, welche diese Geraden mit der positiven $x$-Achse einschliessen, sind bestimmt durch die Gleichung:

$$12)\qquad tg\,\delta=\pm(1-e^2)\sqrt{\frac{1-m^2}{m^2e^2+m^2-1}}.$$

Ist $e=1$, das heisst der Kegelschnitt $K$ eine Parabel, dann besteht dieses Linienpaar aus zwei zur $x$-Achse parallelen Geraden und ihre Entfernungen von derselben sind gegeben durch den Ausdruck:

$$13)\qquad d=\pm p\sqrt{\frac{1-m^2}{2m^2-1}}.$$

Für die Schnittpunkte dieses Linienpaares mit dem Kegelschnitt $K$ (Grenzpunkte) sind die zwei Wurzeln $\lambda$ reell und zusammenfallend. Ist $\varphi=0$, das heisst $m=1$, dann vereinigen sich die zwei Geraden mit der $x$-Achse, die Grenzpunkte rücken in die Scheitel der grossen Achse resp. in den Scheitel der Parabel; für alle anderen Punkte des Kegelschnittes $K$ sind die $\lambda$ conjugirt-complex. Wächst nun $\varphi$, so verkleinert sich $m$, folglich vergrössert sich $\delta$ resp. $d$, das heisst, die Grenzpunkte entfernen sich von den Scheiteln der grossen Achse und nähern sich den Scheiteln der kleinen resp. bei der Parabel dem Unendlichen. Für die Theile der Curve zwischen den Scheiteln der grossen Achse und den Grenzpunkten sind $\lambda_1$ und $\lambda_2$ reell und von einander verschieden, für die Grenzpunkte reell und einander gleich, für die übrigen Theile conjugirt-complex.

Es ist
$$[E-\lambda_1 N][E-\lambda_2 N]=0,$$
oder
$$E^2-(\lambda_1+\lambda_2)EN+\lambda_1\lambda_2 N^2=0$$
die Gleichung des gesuchten durch $t_r$ gehenden Ebenenpaares. Nun folgt aus der Gleichung 7):

$$\lambda_1+\lambda_2=\frac{2e[(1-e^2)x_1-p]}{[(1-e^2)x_1-p]^2+y_1^2},\quad \lambda_1.\lambda_2=\frac{m^2e^2+m^2\quad 1}{m^2\{[(1-e^2)x_1-p]^2+y_1^2\}}.$$

Demnach lautet die Gleichung unseres Ebenenpaares:

$$14)\qquad\begin{cases}(ex-z)^2-\dfrac{2e[(1-e^2)x_1-p]}{[(1-e^2)x_1-p]^2+y_1^2}(ex-z)\{[(1-e^2)x_1-p]x+y_1y+p(p-x_1)\}\\ \qquad+\dfrac{m^2e^2+m^2-1}{m^2\{[(1-e^2)x_1-p]^2+y_1^2\}}\{([1-e^2)x_1-p]x+y_1y+p(p-x_1)\}^2=0.\end{cases}$$

Variren wir den Punkt $(x_1, y_1)$ auf dem Kegelschnitte $K$, so varirt auch dieses Ebenenpaar und umhüllt eine gewisse developpable Fläche F,

die Enveloppe der Ebenen, welche $K_r$ berühren und mit der Bildebene den Winkel $\varphi$ einschliessen. $z=0$ liefert den Schnitt dieses Ebenenpaares mit der Bildebene:

$$15)\quad \begin{cases} e^2x^2-\dfrac{2e^2x[(1-e^2)x_1-p]}{[(1-e^2)x_1-p]^2+y^2_1}\{[(1-e^2)x_1-p]x+y_1y+p(p-x_1)\} \\ \qquad +\dfrac{m^2e^2+m^2-1}{m^2\{[(1-e^2)x_1-p]^2+y^2_1\}}\{[(1-e^2)x_1-p]x+y_1y+p(p-x_1)\}=0, \end{cases}$$

ein Linienpaar, die Directrixen der zwei Kegelschnitte repräsentirend, welche $K$ in dem Punkte $(x_1, y_1)$ berühren und eine vorgeschriebene numerische Excentricität besitzen. Durch Variation des Punktes $(x_1, y_1)$ auf $K$ varirt auch dieses Linienpaar und umhüllt eine gewisse Curve, den Schnitt der vorhin erwähnten developpablen Fläche mit der Bildebene, die Enveloppe der Directrixen aller Kegelschnitte, welche den gegebenen $K$ berühren und ein bestimmtes Achsenverhältniss besitzen.

Treten wir nun vorläufig etwas näher auf die constructive Seite der Sache ein. Sei $S_r$ ein beliebig im Raume gewählter Punkt, gegeben durch seine Orthogonalprojection $S$ und die Cote $s$ (siehe Fig. 1 resp. 1*). Denken wir uns durch $S_r$ successive Ebenen gelegt, die zu den Tangentialebenen der developpablen Fläche $F$ parallel sind, so umhüllen diese einen geraden Kreiskegel, dessen Erzeugenden mit der Bildebene den Winkel $\varphi$ einschliessen; es ist der Richtungskegel der developpablen Fläche. Dieser besitzt auch die weitere Eigenschaft, dass seine Erzeugenden zu den entsprechenden Erzeugenden der developpablen Fläche parallel sind. Sollen nun durch die Tangente $t_r$ die Ebenen gelegt werden, welche mit der Bildebene den Winkel $\varphi$ einschliessen, so geschieht dieses am einfachsten durch Benutzung des Richtungskegels: Wir legen durch die Spitze $S_r$ desselben die Ebene $E^*$, welche zu $E$ parallel ist; $f^*$ ist die Spur derselben. Durch $S_r$ denken wir uns ferner eine Parallele $t^*_r$ zu $t_r$ gezogen; $t^*$ parallel zu $t$ ist deren Orthogonalprojection. Sowie nun $T$ die Spur der Tangente $t_r$ mit der Bildebene ist, so ist auch $T^*$ die Spur des Parallelstrahles $t^*_r$. Durch $t^*_r$ legen wir jetzt die zwei im Allgemeinen möglichen Tangentialebenen an den Richtungskegel; die Tangenten aus $T^*$ an die Kegelbasis $S$ sind die Spuren derselben. Sie berühren den Kegel längs den Erzeugenden $S_rQ^*_1$, $S_rQ^*_2$. Die durch $t_r$ an unsere developpable Fläche gehenden Tangentialebenen sind nun zu diesen Tangentialebenen des Richtungskegels parallel, sowie auch ihre Berührungserzeugenden $P_rQ_1$, $P_rQ_2$ zu $S_rQ^*_1$ resp. $S_rQ^*_2$. Ziehen wir daher durch $T$ die Parallelen zu $T^*Q^*_1$ und $T^*Q^*_2$, so ergeben sich die Spuren dieser Tangentialebenen und die Perpendikel aus $P$ auf sie sind die Orthogonalprojectionen der Erzeugenden $P_rQ_1$, $P_rQ_2$, in denen die Ebenen die developpable Fläche berühren. Demnach sind auch $Q_1$ und $Q_2$ die Berührungspunkte der Tangenten $TQ_1$, $TQ_2$ mit der Spurcurve der developpablen Fläche.

In dem Falle, wo $\varphi < \alpha$ ist, schneidet die Spur $f^*$ der Ebene $E^*$ die Basis des Richtungkegels (siehe Fig. 2 resp. 2*). Den Strahlen $t^*$,

welche aus $S$ nach diesen Schnittpunkten $Q_g^*$ und $Q_h^*$ gehen, entsprechen je zwei zusammenfallende Tangentialebenen des Richtungskegels, somit auch den resp. parallelen Tangenten $t$ des Kegelschnittes $K$ je zwei zusammenfallende Tangentialebenen der developpablen Fläche. Für alle Strahlen $t^*$, welche zwischen $SQ_g^*$ und $SQ_h^*$ liegen, werden die bezüglichen Tangentialebenen imaginär; für die ausserhalb $SQ_g^*$, $SQ_h^*$ liegenden reell und von einander verschieden; es entspricht diese Annahme dem Falle III auf S. 292. Wäre $\varphi > \alpha$, würde $f^*$ ganz ausserhalb der Spurcurve $S$ liegen und jeder beliebigen Richtung von $t^*$ entsprechen dann zwei von einander verschiedene Tangentialebenen (Fall I auf S. 292). Im Grenzfalle $\varphi = \alpha$ würde $f^*$ den Kreis $S$ berühren und es entsprechen jeder beliebigen Richtung von $t^*$ zwei von einander verschiedene Tangentialebenen, von denen die eine jeweilen mit $E^*$, also ihre Parallelebene durch $t_r$ mit $E$ zusammenfällt (Fall II auf S. 292). — Den horizontalen Tangenten der Spurcurve $S$ des Richtungskegels in $Q_x^*$, $Q_z^*$ und $Q_y^*$, $Q_u^*$ (siehe Fig. 2* resp. 2) entsprechen horizontale Tangenten der Spurcurve der developpablen Fläche; ihre Berührungspunkte $Q_x$, $Q_z$, $Q_y$, $Q_u$ liefern somit die Maximal- resp. Minimalstellen dieser Curve. Natürlich liegen diese Punkte mit den entsprechenden Punkten des Fundamentalkegelschnittes $K$ auf Parallelen zur $y$-Achse.

Zum Zwecke der vollständigen analytischen Bestimmung der developpablen Fläche gehen wir jetzt darauf aus, die Gleichung der Berührungssehne $Q_1 Q_2$ abzuleiten (siehe Fig. 1). Diese ist die Polare des Punktes $T$ in Bezug auf den Kreis $P$, welcher $P$ zum Mittelpunkte und den Radius $PQ_1 = PQ_2$ besitzt. Bezeichnen wir diesen Radius mit $\varrho$ und die Höhe des Punktes $P$ über der Bildebene mit $\zeta$, so ist

$$\varrho = \frac{\zeta}{tg\,\varphi};$$

aus der Gleichung 2) der Ebene $E$ folgt aber

$$\zeta = e x_1,$$

somit:

$$\varrho = \frac{e x_1}{tg\,\varphi}, \quad \varrho^2 = \frac{e^2 x_1^2}{tg^2\varphi} = \frac{m^2}{1-m^2} e^2 x_1^2.$$

Demnach lautet die Gleichung des Kreises $P$:

$$16)\qquad (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - \frac{m^2 e^2}{1-m^2} x_1^2 = 0.$$

Der Punkt $T$, als Schnittpunkt der $y$-Achse mit der Tangente $t$ (siehe Gleichung 3), hat die Coordinaten:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = -\frac{p(p-x_1)}{y_1};$$

somit lautet die Gleichung der Berührungssehne $Q_1 Q_2$:

$$(x-x_1)(0-x_1) + (y-y_1)\left[-\frac{p(p-x_1)}{y_1} - y_1\right] - \frac{m^2 e^2}{1-m^2} x_1^2 = 0,$$

oder nach gehöriger Umformung und unter Benutzung der Bedingung, dass $P(x_1, y_1)$ auf $K$ liegt:

$$17)\quad (1-m^2)y_1 . x-(1-m^2)[(1-e^2)x_1-p](y-y_1)+(m^2e^2+m^2-1)x_1y_1=0.$$

Die Ebene, welche aus dem Punkte $P_r$ nach dieser Geraden geht, schneidet das Tangentialebenenpaar 14) in den bezüglichen Berührungserzeugenden der developpablen Fläche. Schreiben wir für einen Augenblick die Gleichung der Berührungssehne $Q_1 Q_2$ abkürzungsweise:

$$Ax+By+C=0,$$

dann stellt die Gleichung

$$Ax+By+C-\lambda z=0$$

irgend eine durch $(Q_1 Q_2)$ gehende Ebene dar. Soll diese Ebene den Punkt $P_r$ enthalten, so müssen seine Coordinaten diese Gleichung erfüllen; es ergiebt sich somit für $\lambda$ die Bedingungsgleichung:

$$Ax_1+By_1+C-\lambda e x_1=0,$$

woraus folgt:

$$\lambda=\frac{Ax_1+By_1+C}{ex_1}.$$

Setzen wir für $A$, $B$, $C$ die aus der Gleichung 17) zu entnehmenden Werthe ein, so folgt:

$$\lambda=\frac{(1-m^2)y_1x_1-(1-m^2)[(1-e^2)x_1-p]y_1+(1-m^2)[(1-e^2)x_1-p]y_1+(m^2e^2+m^2-1)x_1y_1}{ex_1}$$

oder:

$$\lambda=m^2ey_1.$$

Demnach erhält die Ebene $P_r Q_1 Q_2$ die Gleichung:

$$18)\quad \begin{cases} (1-m^2)y_1x-(1-m^2)[(1-e^2)x_1-p](y-y_1) \\ \qquad +(m^2e^2+m^2-1)x_1y_1-m^2ey_1z=0. \end{cases}$$

Unsere devoleppable Fläche ist nunmehr bestimmt durch das System folgender drei Gleichungen:

$$\text{I)}\left\{\begin{array}{ll} 1) & (1-e^2)x^2_1+y^2_1-2px_1+p^2=0, \\ 14) & \begin{cases} m^2\{[(1-e^2)x_1-p]^2+y^2_1\}(ex-z)^2-2em^2[(1-e^2)x_1-p](ex-z) \\ \qquad \times\{[(1-e^2)x_1-p]x+y_1y+p(p-x_1)\} \\ \qquad +(m^2e^2+m^2-1)\{[(1-e^2)x_1-p]x+y_1y+p(p-x_1)\}=0, \end{cases} \\ 18) & \begin{cases} (1-m^2)y_1x-(1-m^2)[(1-e^2)x_1-p](y-y_1) \\ \qquad +(m^2e^2+m^2-1)x_1y_1-m^2ey_1 . z=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Die Elimination der zwei Grössen $x_1$, $y_1$ aus diesen Gleichungen würde die Gleichung der Fläche in $x$, $y$, $z$ ergeben. Sie wird in diesen Variablen vom achten Grade. Ersetzen wir $z$ durch $-z$, ergiebt sich die developpable Fläche $-F$, welche dem zur Bildebene symmetrischen Kegelschnitte $-K_r$ [illegible] Lassen wir in dem Gleichungssystem I) $z=0$ werden, erfahren [illegible] der developpablen Fläche mit der Bildebene; dieselbe [illegible] durch das System folgender Gleichungen:

$$
\text{I}'\begin{cases}
1)\quad (1-e^2)x_1^2 + y_1^2 - 2px_1 + p^2 = 0, \\
14')\begin{cases} m^2\{[(1-e^2)x_1-p]^2 + y_1^2\}e^2x^2 - 2e^2m^2[(1-e^2)x_1-p] \\ \qquad \times\{[(1-e^2)x_1-p]x + y_1y + p(p-x_1)\}x \\ \qquad + (m^2e^2+m^2-1)\{[(1-e^2)x_1-p]x + y_1y + p(p-x_1)\} = 0, \end{cases} \\
18')\quad (1-m^2)y_1x - (1-m^2)[(1-e^2)x_1-p](y-y_1) + (m^2e^2+m^2-1)x_1y_1 = 0.
\end{cases}
$$

Je zwei Erzeugende der devoleppablen Fläche liegen symmetrisch zur $xz$-Ebene. Der Ort der Schnittpunkte solcher Erzeugenden ist eine auf der $xz$-Ebene gelegene Doppelcurve der Fläche; sie ist vom vierten Grade und wird bestimmt durch das System von Gleichungen, das sich aus dem Systeme I) ergiebt, indem man dort $x = 0$ setzt:

$$
\text{I}'')\begin{cases}
1)\quad (1-e^2)x_1^2 + y_1^2 - 2px_1 + p^2 = 0 \\
14'')\begin{cases} m^2\{[(1-e^2)x_1-p]^2 + y_1^2\}(ex-z)^2 - 2em^2[(1-e^2)x_1-p](ex-z) \\ \qquad \times\{[(1-e^2)x_1-p]x + p(p-x_1)\} \\ \qquad + (m^2e^2+m^2-1)\{[(1-e^2)x_1-p]x + p(p-x_1)\} = 0, \end{cases} \\
18'')\quad (1-m^2)x + (1-m^2)[(1-e^2)x_1-p] + (m^2e^2+m^2-1)x_1 - m^2ez = 0.
\end{cases}
$$

### Specieller Fall der Parabel.

Ist der gegebene Kegelschnitt $K$ eine Parabel, so gehen die bezüglichen Resultate aus den Gleichungssystemen I) II) III) hervor, indem man in denselben $e = 1$ setzt:

$$
\text{I}_1)\begin{cases}
1_1)\quad y_1^2 - 2px_1 + p^2 = 0, \\
14_1)\begin{cases} m^2[p^2 + y_1^2](x-z)^2 + 2m^2p(x-z)[-px + y_1y + p(p-x_1)] \\ \qquad + (2m^2-1)[-px + y_1y + p(p-x_1)] = 0, \end{cases} \\
18_1)\quad (1-m^2)y_1x + (1-m^2)p(y-y_1) + (2m^2-1)x_1y_1 - m^2y_1z = 0.
\end{cases}
$$

$$
\text{I}'_1)\begin{cases}
1_1)\quad y_1^2 - 2px_1 + p^2 = 0, \\
14'_1)\begin{cases} m^2[p^2 + y_1^2]x^2 + 2m^2p[-px + y_1y + p(p-x_1)]x \\ \qquad + (2m^2-1)[-px + y_1y + p(p-x_1)] = 0, \end{cases} \\
18'_1)\quad (1-m^2)y_1x + (1-m^2)p(y-y_1) + (2m^2-1)x_1y_1 = 0.
\end{cases}
$$

$$
\text{I}'_1)\begin{cases}
1_1)\quad y_1^2 - 2px_1 + p^2 = 0, \\
14''_1)\begin{cases} m^2[p^2 + y_1^2](x-z)^2 + 2m^2p^2(x-z)[-x + p - x_1] \\ \qquad + (2m^2-1)p[-x + p - x_1] = 0, \end{cases} \\
18''_1)\quad (1-m^2)x - (1-m^2)p + (2m^2-1)x_1 - m^2z = 0.
\end{cases}
$$

Ich behalte mir eine nähere Discussion dieser auf den allgemeinen Fall sich beziehenden Gleichungssysteme auf eine spätere Untersuchung vor und wende mich hier noch zur Betrachtung eines Secialfalles. — Geometrischerseits sind in den Figuren 3 — 9 einige typische Hauptfälle zusammengestellt. In denselben ist der fest gegebene Kegelschnitt $K$ durch den Brennpunkt $F$, die Directrix $f$ und die numerische Excentricität $e = tg\,\alpha$ bestimmt; die letztere ist geometrisch repräsentirt durch die Fall-

Linie $M(B_r)$ der Ebene $E$, welche der räumliche Vertreter des Kegelschnittes $K$ ist. Die von $F$ ausgehenden zur Brennpunktsachse des Kegelschnittes $K$ unter $45^0$ geneigte Gerade $F(A_r)(B_r)$ schneidet die Fall-Linie in $(B_r)$ und ihre symmetrische in $(A_r)$, woraus sich die Orthogonalprojectionen $B, A$ sofort ergeben. Damit findet man dann den Mittelpunkt $O$ und die kleine Achse $C$, $D$ resp. die Asymptoten des Kegelschnittes $K$. Die punktirte Curve ist die Spurcurve der developpablen Fläche, die Enveloppe der Directrixen aller Kegelschnitte des gesuchten Systems, mittelst des Richtungskegels aus der beliebig angenommenen Spitze $S$ construirt. Ausser einigen Punkten von allgemeiner Lage sind von dieser Spurcurve im Besondern die Maximal- und Minimalstellen $Q_x$, $Q_y$, $Q_z$, $Q_u$ angegeben; eventuell ferner die auf der Directrix $f$ befindlichen Grenzpunkte $Q_g$, $Q_h$, in welchen die Tangenten auf den bezüglichen Tangenten des Kegelschnittes $K$ senkrecht stehen. Die auf der $x$-Achse gelegenen Scheitel $Q_a$, $Q_b$ dieser Curve sind ebenfalls leicht erhältlich mittelst der Strahlen, die von $(A_r)$ und $(B_r)$ ausgehen und unter dem Winkel $\varphi$ zu jener geneigt sind. Ist $K$ eine Hyperbel und $\varphi < \alpha$, so entsprechen ihren Asymptoten Asymptoten unserer Spurcurve. Im Allgemeinen zeigt diese Curve einen auf der $x$-Achse liegenden Doppelpunkt; offenbar die Stelle, wo die Doppelcurve der developpablen Fläche die Ebene $(x, y)$ schneidet; ferner weist sie zwei zur $x$-Achse symmetrisch liegende Rückkehrpunkte auf; in diesen wird die Rückkehrcurve der developpablen Fläche die Ebene $(x, y)$ treffen. Im Allgemeinen besteht die gesammte Curve aus zwei von einander gesonderten Theilen. Wenn $\varphi > \alpha$ ist, so zeigen sich keine Grenzpunkte und der eine Theil ist alsdann der Ort der Gegenpunkte zu den Punkten des anderen in Bezug auf die Tangenten des Kegelschnittes $K$; ist $\varphi < \alpha$, dann giebt es Grenzpunkte und rücksichtlich dieser Gegenpunkte entspricht jeder Theil sich selbst.

In Figur 3 ist $e = tg\,\alpha = \frac{2}{3}$, $tg\,\varphi = \frac{7}{12}$. Die gegebene Ellipse besitzt somit das Achsenverhältniss $\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$, während den Ellipsen des gesuchten Systems ein solches von $\frac{1}{12}\sqrt{95}$ zukommt. Da $\varphi < \alpha$, giebt es vier Grenzpunkte auf $K$, $G^I$, $G^{II}$, $H^I$, $H^{II}$, denen auf der Spurcurve die Punkte $Q_g^I$, $Q_g^{II}$, $Q_h^I$, $Q_h^{II}$ entsprechen. Jeder der zwei Theile dieser Curve enspricht bezüglich der vorhin erwähnten Gegenpunkte sich selbst.

In Figur 4 ist $e$ gleichfalls $\frac{2}{3}$, dagegen $tg\,\varphi = \frac{3}{4}$. Die Kegelschnitte des gesuchten S[illegible] ...her mit $\frac{1}{4}\sqrt{7}$ ein kleineres Achsenverhältniss als F[illegible] keine; die Spurcurve trifft daher die D[illegible] entspricht dem kleineren, den Doppel-[illegible] enthaltenden Curventheil bezüglich der

Figur 5 bietet uns in $K$ eine Hyperbel mit der numerischen Excentricität $e = \frac{5}{4}$; für das gesuchte System ist $tg\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$; dasselbe besteht daher aus Ellipsen, deren lineare Excentricität mit der kleinen Achse übereinstimmt. Da $\varphi < \alpha$, treten wieder vier Grenzpunkte auf; jeder Curventheil entspricht sich selbst bezüglich der Gegenpunkte. Asymptoten besitzt die Spurcurve keine.

In Figur 6 ist $K$ wieder eine Hyperbel mit $e = \frac{5}{4}$, dagegen ist $tg\,\varphi$ zu dem vorhergehenden Werthe reciprok, also gleich $\sqrt{2}$; das gesuchte System besteht somit aus gleichseitigen Hyperbeln. Grenzpunkte existiren keine; die Spurcurve besteht aus zwei Theilen, jeder mit zwei Asymptoten. Dem einen entspricht bezüglich der Gegenpunkte der andere. Das Maximum $Q_x$ und das Minimum $Q_u$ fallen nahezu in die Rückkehrpunkte.

Figur 7 enthält als Fundamentalcurve $K$ eine Parabel, somit $e = tg\,\alpha = 1$; $tg\,\varphi$ ist $\frac{4}{5}$. Es sind somit die Kegelschnitte des gesuchten Systems Ellipsen mit dem Achsenverhältniss $\frac{3}{5}$. Grenzpunkte giebt es hier nur zwei; die Spurcurve besteht aus einem einzigen Theile, der in Bezug auf die Gegenpunkte sich selbst entspricht.

In Figur 8 ist $K$ wieder eine Parabel, dagegen $tg\,\varphi = \frac{5}{4}$. Die gesuchten Kegelschnitte sind daher Hyperbeln mit dem Achsenverhältnisse:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1} = \frac{3}{4}.$$

Grenzpunkte sind keine vorhanden. Die Enveloppe der Directrixen besteht aus zwei Aesten, die sich gegenpunktlich entsprechen.

Die Figur 9 zeigt uns noch den Specialfall, wo die Curven des gesuchten Systems Parabeln sind. Hier reducirt sich der eine Theil der Spurcurve auf den Brennpunkt $F$ resp. auf das Strahlenbüschel aus diesem; die bezüglichen Curven bestehen aus den doppelt gelegten Strecken $FP$. Der andere Theil ist der Kreis, beschrieben aus dem zweiten Brennpunkte des Kegelschnittes $K$ als Mittelpunkt mit dem Radius gleich der grossen Achse dieses Kegelschnittes; in der That ist dieser Kreis der Ort der Gegenpunkte des Brennpunktes $F$ in Bezug auf alle Tangenten des Kegelschnittes $K$.

**Specialfall:** $\varphi = \alpha$.

Eine nähere Betrachtung wollen wir dem Falle zuwenden, wo $\varphi = \alpha$ ist. Die gesuchten Kegelschnitte besitzen dann das nämliche Achsenverhältniss, wie der fest gegebene $K$. Die developpable Fläche zerfällt hier in zwei Theile; der eine besteht in der Ebene $E$ (vierfach zu rechnen), der andere aus einer eigentlichen developpablen Fläche vierter Ordnung, umhüllt von den Ebenen, welche den Fundamentalkegelschnitt $K_r$ berühren

und mit der Bildebene den Winkel $\alpha$ einschliessen. Die Spurcurve auf der Ebene $(x, y)$ zerfällt in die Directrix $f$ (vierfach zu rechnen) und in eine Curve vierter Ordnung, die Enveloppe der Directrixen aller Kegelschnitte, welche den fest gegebenen berühren und mit ihm das gleiche Achsenverhältniss besitzen. Diese Spurcurve ist der Ort der Gegenpunkte zu den Punkten der Directrix $f$ bezüglich der Tangenten des Kegelschnittes $K$; infolge dessen ist sie geometrisch sehr leicht zu construiren, ohne Benutzung des Richtungskegels. Die Doppelcurve der developpablen Fläche zerfällt gleichfalls in zwei Theile; in eine Gerade (doppelt zu rechnen), die auf der Ebene $(x, z)$ liegende Fall-Linie der Ebene $E$ und in eine Curve zweiten Grades, die eigentliche Doppelcurve der hier auftretenden developpablen Fläche vierter Ordnung. Die sich auf diesen Fall beziehenden analytischen Resultate ergeben sich aus den auf S. 296 und 297 aufgestellten Gleichungssystemen I), I′), I″), wenn man in denselben $m^2e^2 + m^2 - 1 = 0$ setzt. Man findet:

**Developpable Fläche.**

$$
\text{II)}\left\{\begin{array}{ll}
1) & (1-e^2)x_1^2 + y_1^2 - 2px_1 + p^2 = 0,\\
14) & \left\{\begin{array}{l}\{[(1-e^2)x_1 - p]^2 + y_1^2\}(ex - z) - 2e[(1-e^2)x_1 - p]\\ \qquad \times\{[(1-e^2)x_1 - p]x + y_1y + p(p - x_1)\} = 0,\end{array}\right.\\
18) & ey_1 . x - e[(1-e^2)x_1 - p](y - y_1) - y_1 z = 0.
\end{array}\right.
$$

**Spurcurve auf der Ebene $(x, y)$.**

$$
\text{II}')\left\{\begin{array}{ll}
1) & (1-e^2)x_1^2 + y_1^2 - 2px_1 + p^2 = 0,\\
14') & \left\{\begin{array}{l}\{[(1-e^2)x_1 - p]^2 + y_1^2\}x - 2[(1-e^2)x_1 - p]\\ \qquad \times\{[(1-e^2)x_1 - p]x + y_1y + p(p - x_1)\} = 0,\end{array}\right.\\
18') & y_1x - [(1-e^2)x_1 - p](y - y_1) = 0.
\end{array}\right.
$$

**Doppelcurve auf der Ebene $(x, z)$.**

$$
\text{II}'')\left\{\begin{array}{ll}
1) & (1-e^2)x_1^2 + y_1^2 - 2px_1 + p^2 = 0,\\
14'') & \left\{\begin{array}{l}\{[(1-e^2)x_1 - p]^2 + y_1^2\}(ex - z) - 2e[(1-e^2)x_1 - p]\\ \qquad \times\{[(1-e^2)x_1 - p]x + p(p - x_1)\} = 0,\end{array}\right.\\
18'') & ex + e[(1-e^2)x_1 - p] - z = 0.
\end{array}\right.
$$

**Aufstellung der Gleichung der Doppelcurve in den Variablen $x$, $z$.**

Zum Zwecke der Elimination der zwei Grössen $x_1$, $y_1$ aus den Gleichungen des Systems II″) drücken wir aus der Gleichung 18″) $x_1$ durch $x$ und $z$ aus; es ergiebt sich:

$$x_1 = \frac{z - ex + ep}{e(1-e^2)},$$

somit:

$$(1-e^2)x_1 - p = \frac{z - ex}{e} \quad \text{und} \quad p - x_1 = \frac{ex - z - pe^3}{e(1-e^2)}.$$

Diese Werthe substituiren wir in der Gleichung 14″), wodurch diese ergeht in:

$$(ex-z)\left[\frac{(z-ex)^2}{e^2}+y_1^2\right]-2(z-ex)\left[\frac{z-ex}{e}\cdot x+\frac{p(ex-z-pe^3)}{e(1-e^2)}\right]=0$$

und hieraus folgt:

$$y_1^2=\frac{(z-ex)^2}{e^2}+\frac{2(z-ex)[ex(2-e^2)-z-ep]}{e^2(1-e^2)}.$$

Substituiren wir nun die Werthe für $x_1$ und $y_1^2$ in die Gleichung 1), so ergiebt sich:

$$\frac{(z-ex+ep)^2}{e^2(1-e^2)}+\frac{(z-ex)^2}{e^2}+\frac{2(z-ex)[ex(2-e^2)-z-ep]}{e^2(1-e^2)}-2p\frac{z-ex+ep}{e(1-e^2)}+p^2=0,$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$19)\quad e(ex-z)^2+2(1-e^2)(ex-z)x-2p(ex-z)+e^3p^2=0.$$

**Aufstellung der Gleichung der Spurcurve auf der Ebene $(x, y)$ in den Variablen $x$, $y$.**

In Folge der Gleichung 1) können wir statt des in der Gleichung 14') auftretenden Klammerausdruckes:

$$[(1-e^2)x_1-p]x+y_1y+p(p-x_1)$$

den folgenden setzen:

$$[(1-e^2)x_1-p](x-x_1)+y_1(y-y_1).$$

Aus der Gleichung 1) folgt nun:

$$y_1^2=-(1-e^2)x_1^2+2px_1-p^2,$$

und aus der Gleichung 18'):

$$y-y_1=\frac{y_1x}{(1-e^2)x_1-p},$$

somit:

$$y_1(y-y_1)=\frac{y_1^2x}{(1-e^2)x_1-p},$$

oder:

$$y_1(y-y_1)=\frac{-(1-e^2)x_1^2+2px_1-p^2}{(1-e^2)x_1-p}\cdot x.$$

Diese Werthe für $y_1^2$ und $y_1(y-y_1)$ führen wir in die Gleichung 14') ein und bekommen dann eine Gleichung in $x_1$ allein:

$$\left\{\begin{array}{l}\{[(1-e^2)x_1-p]^2-(1-e^2)x_1^2+2px_1-p^2\}x-2[(1-e^2)x_1-p]\\ \left\{[(1-e^2)x_1-p](x-x_1)+\dfrac{-(1-e^2)x_1^2+2px_1-p^2}{(1-e^2)x_1-p)}x\right\}=0.\end{array}\right.$$

Bei der Umformung dieser Gleichung zeigt sich, dass die von $x_1$ unabhängigen Glieder sich gegenseitig aufheben, so dass die Gleichung durch $x_1$ dividirbar wird; nach vollständiger Reduction findet man eine Gleichung, die in $x_1$ vom zweiten Grade ist und lautet:

$$20)\quad 2(1-e^2)^2x_1^2+(1-e^2)(e^2x-4p)x_1-2p(e^2x-p)=0.$$

Zur Herleitung einer zweiten Gleichung in $x_1$ combiniren wir die Gleichung 1) mit 18'), indem wir aus der letzteren $y_1$ durch $x_1$ ausdrücken und den betreffenden Werth in die erstere einsetzen. Aus 18') folgt:

$$y_1 = \frac{[(1-e^2)x_1 - p]y}{(1-e^2)x_1 - p + x};$$

diesen Werth in 1) substituirt, giebt:

$$(1-e^2)x_1^2 + \frac{[(1-e^2)x_1 - p]^2 \cdot y^2}{[(1-e^2)x_1 - p + x]^2} - 2px_1 + p^2 = 0.$$

Durch Umformung ergiebt sich hieraus eine Gleichung vierten Grades in

$$20') \left\{ \begin{array}{l} (1-e^2)^3 x_1^4 + 2(1-e^2)^2(x-2p)x_1^3 + (1-e^2)[x^2 + (1-e^2)y^2 - 6px + (6-e^2)p^2 \\ -2p[x^2 + (1-e^2)y^2 - (3-e^2)px + (2-e^2)p^2]x_1 + p^2[(x-p)^2 + y^2] = 0 \end{array} \right.$$

Durch successive Elimination der höheren Potenzen von $x_1$ aus Gleichungen 20) und 20') ergeben sich schliesslich die zwei folgen Gleichungen ersten Grades in $x_1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-e^2)[(2-e^2)^2x^2 + 4(1-e^2)y^2 + 4(e^2-2)px + 4(4-e^2)p^2]x_1 \\ -2p[(2-e^2)^2x^2 + 4(1-e^2)y^2 + (3e^2-8)px + 4(2-e^2)p^2] = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-e^2)[(2-e^2)^2x^2 + 4(1-e^2)y^2 + (3e^2-8)px + 4(2-e^2)p^2]x_1 \\ -2p[(3-3e^2+e^4)x^2 + 3(1-e^2)y^2 + 2(2e^2-3)px + (4-3e^2)p^2] = \end{array} \right.$$

Hieraus folgt als Gleichung unserer Spurcurve in $(x, y)$:

$$21) \left\{ \begin{array}{l} [(2-e^2)^2x^2 + 4(1-e^2)y^2 + 4(e^2-2)px + 4(4-e^2)p^2] \\ \cdot [(3-3e^2+e^4)x^2 + 3(1-e^2)y^2 + 2(2e^2-3)px + (4-3e^2)p^2] \\ \quad - [(2-e^2)^2x^2 + 4(1-e^2)y^2 + (3e^2-8)px + 4(2-e^2)p^2]^2 = 0. \end{array} \right.$$

## Discussion der Doppelcurve.

### a) Bestimmung des Mittelpunktes.

Die Gleichung 19), nach Potenzen von $x$ und $z$ geordnet, lautet:

$$19_1) \qquad e(2-e^2)x^2 - 2xz + ez^2 - 2pex + 2pz + p^2e^3 = 0.$$

Zur Bestimmung der Coordinaten des Mittelpunktes dieses Kegelschnittes bedienen wir uns der Methode der Coordinatentransformation resp. der Verschiebung des Coordinatensystems. Wir setzen zu diesem Zwecke:

$$x = x' + q, \quad z = z' + r,$$

wodurch die Gleichung $19_1$) übergeht in:

$$e(2-e^2)(x'+q)^2 - 2(x'+q)(z'+r) + e(z'+r)^2 - 2pe(x'+q) + 2p(z'+r) + p^2e^3 = 0.$$

Bilden wir hieraus die Glieder, welche $x_1$ und $z_1$ im ersten Grade enthalten und setzen dieselben $=0$, so ergeben sich zur Bestimmung der Mittelpunktscoordinaten $q$, $r$ folgende zwei Gleichungen:

$$e(2-e^2)q - r - pe = 0,$$

$$q - er - p = 0,$$

aus welchen man findet:

$$22) \qquad q = \frac{p}{1-e^2} = \frac{a^2}{c}; \quad r = \frac{pe}{1-e^2} = a.$$

**Aus diesen Werthen geht hervor, dass der Mittelpunkt der Doppelcurve senkrecht über dem Mittelpunkte $O$ des Kegelschnittes $K$ liegt in einem Abstande gleich der halben grossen Achse dieses Kegelschnittes.**

b) Bestimmung der Asymptoten.

Die Tangente in einem beliebigen Punkte der Doppelcurve ist die Schnittlinie der Ebene $(x, z)$ mit der Tangentialebene der developpabeln Fläche längs der bezüglichen Erzeugenden. Es geht hieraus hervor, dass die Schnittlinie der Ebene $(x, z)$ mit der Ebene $E$, welche der räumliche Repräsentant des Fundamentalkegelschnittes $K$ ist, eine Asymptote der Doppelcurve darstellt (siehe Fig. 10), so dass diese stets eine Hyperbel sein wird, was auch aus der Gleichung $19_1$) sich ergiebt. Schreiben wir nämlich diese in der abgekürzten Form:

$$Ax^2 + Bxz + Cz^2 + Dx + Ez + F = 0$$

und bilden den Ausdruck:

$$B^2 - 4AC = 4 - 4e(2-e^2)e = 4(1-e^2)^2,$$

so sehen wir, dass derselbe, abgesehen von dem Falle, wo $e = 1$, also der Fundamentalkegelschnitt eine Parabel ist, stets positiv, also unsere Doppelcurve eine Hyperbel ist.

Zum Zwecke der analytischen Bestimmung beider Asymptoten verschieben wir das Coordinatensystem $(x, z)$ nach dem vorhin bestimmten Mittelpunkte der Doppelcurve; dann lautet die Gleichung der letzteren:

23) $$e(2-e^2)x'^2 - 2x'z' + ez'^2 + C = 0,$$

wobei

$$\left\{ \begin{aligned} C = e(2-e^2)\frac{p^2}{(1-e^2)^2} - 2\cdot\frac{p^2 e}{(1-e^2)^2} + e\,\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2} \\ -2pe\cdot\frac{p}{1-e^2} + 2p\cdot\frac{pe}{1-e^2} + p^2e^3 = p^2e^3, \end{aligned} \right.$$

somit:

23) $$e(2-e^2)x'^2 - 2x'z' + ez'^2 + p^2e^3 = 0.$$

Führen wir jetzt Polarcoordinaten ein, indem wir setzen:

$$x' = \varrho \cos\varphi, \quad z' = \varrho \sin\varphi,$$

so geht die Gleichung 23) über in:

$$\varrho^2[e(2-e^2)\cos^2\varphi + e\sin^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi] + p^2e^3 = 0.$$

Damit $\varrho$ unendlich werde, muss der Coefficient von $\varrho^2$ verschwinden:

$$e(2-e^2)\cos^2\varphi + e\sin^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

oder:

$$e\,tg^2\varphi - 2\,tg\,\varphi + e(1-e^2) = 0.$$

Hieraus ergeben sich für $tg\,\varphi$ die zwei Werthe:

$$tg\,\varphi_1 = \frac{2-e^2}{e}, \quad tg\,\varphi_2 = e.$$

**Dem Werthe $\varphi_2$ entspricht demnach die schon oben auf geometrischem Wege gefundene Asymptote, die Fall-Linie der Ebene $E$. Dem Werthe $\varphi_1$**

entspricht die zweite Asymptote, deren Gleichung, bezogen auf das ursprüngliche Coordinatensystem ($x$, $z$) lautet:

$$z-\frac{pe}{1-e^2}=\frac{2-e^2}{e}\left(x-\frac{p}{1-e^2}\right),$$

oder:

24)
$$(2-e^2)x-ez-2p=0.$$

c) Bestimmung der Grenzpunkte.

Nicht der vollständige Kegelschnitt 19) ist Doppelcurve der developpablen Fläche, sondern nur ein begrenzter Theil desselben. Dieser erstreckt sich von dem unendlich fernen Punkte der auf ($x$, $z$) liegenden Asymptote bis zu den zwei Punkten $D_a$, $D_b$, welche den auf der Brennpunktsachse liegenden Scheiteln $A$, $B$ des Fundamentalkegelschnittes $K$ correspondiren (Grenzpunkte der Doppelcurve). Aus der Gleichung des Kegelschnittes $K$ ergeben sich für die Scheitel der Brennpunktsachse die Abscissen:

$$x_a=\frac{p}{1+e},\quad x_b=\frac{p}{1-e}.$$

Setzen wir den zweiten dieser Werthe in die Gleichung 18'') des Systems II'') an die Stelle von $x_1$ ein, so folgt:

$$ex+e[(1-e^2)\frac{p}{1-e}-p]-z=0,$$

und hieraus:

$$z=e(x+ep).$$

Diesen Werth in die Gleichung 19) der Doppelcurve für $z$ substituirt, liefert den entsprechenden Werth für $x$:

$$x=\frac{p(e^2-e+2)}{2(1-e)}$$

und damit findet man für $z$ selbst:

$$z=e(x+ep)=\frac{pe(-e^2+e+2)}{2(1-e)}.$$

Die Coordinaten des ersten Grenzpunktes ergeben sich auf dieselbe Weise, wenn man den Werth $\frac{p}{1+e}$ benutzt. Wir haben daher für beide Grenzpunkte folgende Coordinatenwerthe:

25)
$$\left\{\begin{array}{lll} D_a: & x''_a=\frac{p(e^2+e+2)}{2(1+e)}, & z''_a=\frac{pe(-e^2-e+2)}{2(1+e)}, \\ D_b: & x''_b=\frac{p(e^2-e+2)}{2(1-e)}, & z''_b=\frac{pe(-e^2+e+2)}{2(1-e)}. \end{array}\right.$$

Die arithmetischen Mittel dieser Coordinaten stimmen mit den Mittelpunkts-Coordinaten der Doppelcurve überein, woraus hervorgeht, dass die *Grenzpunkte* die Endpunkte eines Durchmessers sind.

d) Schnittpunkte der Doppelcurve mit der Achse $x$.

Setzen wir in der Gleichung $19_1)$ $z = 0$, so folgt eine quadratische Gleichung in $x$:

$$(2-e^2)x^2 - 2px + p^2e^2 = 0.$$

Aus dieser ergeben sich für $x$ die zwei Werthe:

$$26)\qquad k' = p; \quad k'' = \frac{pe^2}{2-e^2}.$$

Dem ersteren entspricht der Brennpunkt des fest gegebenen Kegelschnittes $K$, ein Punkt des Kegelschnittes 19), der aber nicht zu dem Theile gehört, der wirklich Doppelcurve ist. Dem zweiten Werthe $k''$ jedoch ein Punkt der Curve 19), der wirklich zur eigentlichen Doppelcurve gehört; in diesem besitzt die Spurcurve der developpablen Fläche auf $(x, y)$ einen Doppelpunkt $K''$. Mittelst der Gleichungen $18'')$ und 1) findet man für die zwei symmetrisch zur $x$-Achse liegenden Punkte des festen Kegelschnittes $K$, welche diesem Doppelpunkte correspondiren, die Coordinaten:

$$27)\qquad x_k = \frac{2p}{2-e^2}, \quad y_k = \pm \frac{pe}{2-e^2} \cdot \sqrt{4-e^2}.$$

Während $x_k$ stets reell ausfällt, kann $y_k$ auch imaginär werden; dies passirt für $e > 2$. Gemäss des Werthes für $k''$ liegt für $e < \sqrt{2}$ der Doppelpunkt stets auf derselben Seite der Directrix $f$, wie der Brennpunkt; für $e = \sqrt{2}$, wo also $K$ eine gleichseitige Hyperbel ist, fällt der Doppelpunkt ins Unendliche. Für $e > \sqrt{2}$ wird $k''$ negativ, das heisst, der Doppelpunkt liegt jetzt auf der entgegengesetzten Seite der Directrix, wie der Brennpunkt. Bei $e = 2$, wo $y_k = 0$ wird, fällt der Doppelpunkt in den auf der negativen $x$-Achse gelegenen Scheitel $D_b$ und verliert infolge dieser Lage die Natur eines Doppelpunktes; er ist ein gewöhnlicher Punkt der Spurcurve geworden. Die Doppelcurve besitzt bei dieser Annahme den Punkt $K''$ zum Grenzpunkt. Für $e > 2$ wird der Doppelpunkt isolirt, denn nach dem Ausdruck in 27) wird jetzt $y_k$ imaginär, das heisst, der bezügliche Punkt des Originalkegelschnittes $K$ ist nicht mehr reell.

### Discussion der Spurcurve auf $(x, y)$.

a) Bestimmung der Maxima und Minima.

Diese Punkte entsprechen denjenigen des Originalkegelschnittes $K$, wo die Tangenten mit der positiven Richtung der $x$-Achse Winkel von $45^0$ resp. von $135^0$ einschliessen. Ist $\psi$ der Winkel, den die Tangente im Punkte $(x_1, y_1)$ des Kegelschnittes $K$ mit der positiven Richtung der $x$-Achse bildet, so folgt aus der Gleichung 3):

$$tg\psi = -\frac{(1-e^2)x_1 - p}{y_1}.$$

Somit ergiebt sich für $\psi = 45^0$ die Bedingung:

$$1 = -\frac{(1-e^2)x_1 - p}{y_1},$$

oder:

$$(1-e^2)x_1 + y_1 - p = 0$$

und für $\psi = 135^0$:

$$-1 = -\frac{(1-e^2)x_1 - p}{y_1},$$

oder:

$$(1-e^2)x_1 - y_1 - p = 0.$$

Diese Gleichungen, in Verbindung mit der Bedingung, dass $(x_1, y_1)$ auf dem Originalkegelschnitte liege, liefern folgende vier Punkte auf $K$ (siehe Fig. 10):

$$28)\quad \begin{cases} X\begin{cases} x_1 = \dfrac{p[2-e^2+e\sqrt{2-e^2}]}{(1-e^2)(2-e^2)}, \\ y_1 = \dfrac{pe}{\sqrt{2-e^2}}, \end{cases} & Z\begin{cases} x_1 = \dfrac{p[2-e^2-e\sqrt{2-e^2}]}{(1-e^2)(2-e^2)}, \\ y_1 = -\dfrac{pe}{\sqrt{2-e^2}}, \end{cases} \\ Y\begin{cases} x_1 = \dfrac{p[2-e^2+e\sqrt{2-e^2}]}{(1-e^2)(2-e^2)}, \\ y_1 = -\dfrac{pe}{\sqrt{2-e^2}}, \end{cases} & U\begin{cases} x_1 = \dfrac{p[2-e^2-e\sqrt{2-e^2}]}{(1-e^2)(2-e^2)}, \\ y_1 = \dfrac{pe}{\sqrt{2-e^2}}. \end{cases} \end{cases}$$

Die entsprechenden Punkte $Q_x$, $Q_y$, $Q_z$, $Q_u$ der Spurcurve ergeben sich nun durch Substitution dieser Werthe in die Gleichungen:

$$18')\qquad y_1 x - [1-e^2)x_1 - p](y - y_1) = 0.$$

$$20)\qquad 2(1-e^2)^2 x_1^2 + (1-e^2)(e^2 x - 4p)x_1 - 2p(e^2 x - p) = 0.$$

Man findet für:

$$29)\quad \begin{cases} Q_x\begin{cases} x = \dfrac{p[2-e^2+e\sqrt{2-e^2}]}{(1-e^2)(2-e^2)} = x_1, \\ y = \dfrac{p[1+e\sqrt{2-e^2}]}{1-e^2} = y_1 + x_1, \end{cases} & Q_z\begin{cases} x = \dfrac{p[2-e^2-e\sqrt{2-e^2}]}{(1-e^2)(2-e^2)} = x_1, \\ y = \dfrac{p[1-e\sqrt{2-e^2}]}{1-e^2} = y_1 + x_1, \end{cases} \\ Q_y\begin{cases} x = \dfrac{p[2-e^2+e\sqrt{2-e^2}]}{(1-e^2)(2-e^2)} = x_1, \\ y = -\dfrac{p[1+e\sqrt{2-e^2}]}{1-e^2} = y_1 - x_1, \end{cases} & Q_u\begin{cases} x = \dfrac{p[2-e^2-e\sqrt{2-e^2}]}{(1-e^2)(2-e^2)} = x_1, \\ y = -\dfrac{p[1-e\sqrt{2-e^2}]}{1-e^2} = y_1 - x_1. \end{cases} \end{cases}$$

Man sieht, dass die Abscissen dieser Punkte auf der Spurcurve und der entsprechenden Punkte auf $K$ mit einander übereinstimmen, was auch geometrisch evident ist, wie früher schon beim allgemeinen Falle bemerkt wurde.

Je einem Maximum und Minimum der Spurcurve entspricht auch ein Maximum resp. Minimum der Doppelcurve; denn geometrisch folgt, dass *sich die* Tangenten in entsprechenden Punkten dieser zwei Curven auf der

$x$-Achse schneiden. Geometrisch ist auch klar, dass diese Stellen der Doppelcurve dieselben Abscissen wie die entsprechenden Punkte der Spurcurve besitzen und ihre Ordinaten $z$ aus den Ordinaten $y$ der Letzteren durch Multiplication mit $e$ sich ergeben. Man hat daher für diese zwei Stellen der Doppelcurve folgende Coordinaten:

$$30)\quad \left\{ \begin{array}{l} D_x \text{ id. mit } D_y \left\{ \begin{array}{l} x'' = \dfrac{p[2-e^2+e\sqrt{2-e^2}]}{(1-e^2)(2-e^2)} = x, \\[2ex] y'' = \dfrac{ep[1+e\sqrt{2-e^2}]}{1-e^2} = ey, \end{array} \right. \\[6ex] D_z \text{ id. mit } D_u \left\{ \begin{array}{l} x'' = \dfrac{p[2-e^2-e\sqrt{2-e^2}]}{(1-e^2)(2-e^2} = x, \\[2ex] y'' = \dfrac{ep[1-e\sqrt{2-e^2}]}{1-e^2} = ey. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Diese zwei Punkte sind gleichfalls wie die Grenzpunkte die Endpunkte eines Durchmessers der Doppelcurve.

b) Scheitel der Spurcurve.

Den Scheiteln $A$, $B$ des Fundamentalkegelschnittes $K$ auf der Brennpunktsachse entsprechen Punkte $Q_a$, $Q_b$ der Spurcurve auf eben derselben. Da die Spur-Curve der Ort des Gegenpunkte zu den Punkten der Directrix $f$ in Bezug auf die Tangenten des Kegelschnittes $K$ ist, so folgt, dass die Abscissen dieser Scheitel der Spurcurve das Doppelte der Abscissen der entsprechenden Scheitel von $K$ betragen. Es ergeben sich daher für $Q_a$ und $Q_b$ die Abscissen:

$$31)\qquad x'_a = \frac{2p}{1+e}, \quad x'_b = \frac{2p}{1-e}$$

(siehe die Abscissen $x_a$ und $x_b$ auf S. 304).

c) Rückkehrpunkte der Spurcurve.

Die Schnittpunkte der Rückkehrcurve der developpablen Fläche mit der Bildebene sind Rückkehrpunkte der Spurcurve derselben. Zu ihrer Bestimmung ordnen wir die Gleichung 21) nach Potenzen von $y$:

$$\text{I a)} \left\{ \begin{array}{l} 4(1-e^2)^2y^4 + (1-e^2)[(8-8e^2+e^4)x^2 - 4(e^2+4)px - 8e^2p^2]y^2 \\ +[(2-e^2)^2(1-e^2)x^4 - 2(2-e^2)(4-e^2-e^4)px^3 + (16-3e^4-e^6)p^2x^2 - 4e^2(4-e^2)p^3x + 4e^4p^4] = 0. \end{array} \right.$$

Jedem Werthe von $x$ entsprechen zwei im Allgemeinen von einander verschiedene Werthe von $y^2$, also vier Werthe von $y$, wovon je zwei dem absoluten Werthe nach einander gleich, dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sind. Wenn nun die Curve Rückkehrpunkte aufweist, so können es deren nur zwei sein, da die Curve vierter Ordnung ist und bereits einen Doppelpunkt besitzt. Aus Symmetriegründen liegen diese zwei Rückkehrpunkte symmetrisch zur $x$-Achse; für den betreffenden Werth von $x$

stimmen die zwei zugehörigen Werthe von $y^2$ mit einander überein. Wir werden daher diesen Werth von $x$ finden, wenn wir in der Gleichung $21_1$) die Bedingung einführen, dass ihre Discriminante gleich Null sei, das heisst:

$$\left\{\begin{array}{l} [(8-8e^2+e^4)x^2-4(e^2+4)px-8e^2p^2]^2 \\ -16[(2-e^2)^2(1-e^2)x^4-2(2-e^2)(4-e^2-e^4)px^3+(16-3e^4-e^6)p^2x^2-4e^2(4-e^2)p^3x+4e^4p^4]=0 \end{array}\right.$$

Entwickelt man diese Gleichung nach Potenzen von $x$, so zeigt sich, dass die von $x$ unabhängigen Glieder sich gegenseitig aufheben, die Gleichung daher mit $x$ resp. mit $e^2x$ dividirbar wird und alsdann lautet:

$$e^6x^3+24e^4px^2+192e^2p^2x+152p^3=0,$$

oder:

$$32)\qquad (e^2x+8p)^3=0.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$x=-\frac{8p}{e^2}.$$

Substituiren wir diesen Werth in die Gleichung $21_1$), so folgt:

$$y^2=\frac{p^2(4-e^2)^3}{e^4(e^2-1)}.$$

Die zwei Rückkehrpunkte besitzen somit folgende Coordinaten:

$$33)\quad Q_r^I\left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{8p}{e^2}, \\ y=\dfrac{p(4-e^2)}{e^2(e^2-1)}\cdot\sqrt{(4-e^2)(e^2-1)}, \end{array}\right.\qquad Q_r^{II}\left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{8p}{e^2}, \\ y=-\dfrac{p(4-e^2)}{e^2(e^2-1)}\cdot\sqrt{(4-e^2)(e^2-1)}. \end{array}\right.$$

Während $x$ immer reell ausfällt, können die Werthe von $y$ auch imaginär werden. Dies tritt immer ein, wenn $e<1$ ist, das heisst, wenn der Fundamentalkegelschnitt und damit auch die Kegelschnitte des gesuchten Systems Ellipsen sind. In diesem Falle besitzt die Spurcurve keine Rückkehrpunkte. Ist $1<e<2$, so hat unsere Curve stets zwei reelle und von einander verschiedene Rückkehrpunkte, welche auf der entgegengesetzten Seite von der Directrix $f$, wie der Brennpunkt $F$, liegen. Für $e=2$ fallen die zwei Rückkehrpunkte zusammen und zwar, wie aus den Ausdrücken in 31) folgt, in den auf der negativen $x$-Achse gelegenen Scheitel $Q_b$. Nach Früherem, Gleichung 27), rückt in diesem Falle auch der Doppelpunkt an diese Stelle und es heben sich die Singularitäten auf zu einem gewöhnlichen Punkte der Spurcurve. Rücksichtlich der developpablen Fläche berührt in diesem Grenzfalle die Rückkehrcurve in $Q_b$ die Bildebene. Für $e>2$ werden die Rückkehrpunkte wieder imaginär.

Bestimmen wir noch die Punkte des Originalkegelschnittes, welche den [R]ückkehrpunkten der Spurcurve entsprechen. Wir benutzen hierzu die [Gleichun]g 20):

$$(1-e^2)^2x_1^2+(1-e^2)(e^2x-4p)x_1-2p(e^2x-p)=0.$$

Setzen wir hierin für $x$ den Werth $-\frac{8p}{e^2}$, so folgt:

$$[(1-e^2)x_1 - 3p]^2 = 0$$

und hieraus:

$$x_1 = \frac{3p}{1-e^2}.$$

Die Gleichung 1) des Fundamentalkegelschnittes liefert alsdann den entsprechenden Werth für $y_1$:

$$y_1 = \pm \frac{p}{1-e^2}\sqrt{(4-e^2)(e^2-1)}.$$

Die zwei betreffenden Stellen des Kegelschnittes $K$ haben somit die folgenden Coordinaten:

$$34)\; R^I \begin{cases} x_1 = \frac{3p}{1-e^2}, \\ y_1 = -\frac{p}{1-e^2}\sqrt{(4-e^2)(e^2-1)}, \end{cases} \qquad R^{II} \begin{cases} x_1 = \frac{3p}{1-e^2}, \\ y_1 = \frac{p}{1-e^2}\sqrt{(4-e^2)(e^2-1)}. \end{cases}$$

### d) Asymptoten der Spurcurve.

Ist der fundamentale Kegelschnitt $K$ eine Hyperbel, erhält die Enveloppe der Directrixen stets zwei Asymptoten. Sie schneiden sich mit den Asymptoten des Kegelschnittes $K$ auf der Directrix $f$ und liegen resp. mit diesen symmetrisch zu $f$. Hiermit ist ihre geometrische Construction gegeben; aber auch die analytische Bestimmung gestaltet sich sehr einfach. Die Richtungen der Asymptoten des Kegelschnittes $K$ ergeben sich aus der Gleichung 1) zu

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{e^2-1},$$

und da sie selbst den Mittelpunkt $O$ von der Abscisse $\frac{p}{1-e^2}$ enthalten, so lauten ihre Gleichungen:

$$y = \pm\sqrt{e^2-1}\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right),$$

oder:

$$35)\quad \begin{cases} v^I: & (e^2-1)x - \sqrt{e^2-1}.y + p = 0, \\ v^{II}: & (e^2-1)x + \sqrt{e^2-1}.y + p = 0. \end{cases}$$

Ihre Schnittpunkte mit der Directrix $f$, der $y$-Achse, besitzen somit die Coordinaten:

$$y = \pm\frac{p}{\sqrt{e^2-1}}.$$

Aus der Gleichung $21_1$) der Spurcurve ergeben sich die Richtungen ihrer Asymptoten, indem man das Polynom, bestehend aus den Gliedern vierten Grades in $x$, $y$, gleich Null setzt und aus dieser Gleichung $\frac{y}{x}$ bestimmt:

$$4(1-e^2)^2y^4 + (1-e^2)(8-8e^2+e^4)x^2y^2 + (1-e^2)(2-e^2)^2x^4 = 0,$$

oder:

$$4(1-e^2)\left(\frac{y}{x}\right)^4 + (8-8e^2+e^4)\left(\frac{y}{x}\right)^2 + (2-e^2)^2 = 0,$$

woraus folgt:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{-(8-8e^2+e^4) \pm e^4}{8(1-e^2)},$$

somit:

$$\left(\frac{y}{x}\right)_1^2 = -1, \quad \left(\frac{y}{x}\right)_2^2 = \frac{(e^2-2)^2}{4(e^2-1)}.$$

Dem ersteren Werthe entsprechen imaginäre Richtungen $\left(\frac{y}{x}\right)$, während aus dem zweiten folgt:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^I = \frac{e^2-2}{2\sqrt{e^2-1}}, \quad \left(\frac{y}{x}\right)^{II} = -\frac{e^2-2}{2\sqrt{e^2-1}}.$$

Da nun diese Asymptoten die Punkte $y = \pm \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}$ auf der $y$-Achse enthalten, so werden ihre Gleichungen:

$$36) \quad \begin{cases} q_v^I\colon\ (e^2-2)x - 2\sqrt{e^2-1}\,.\,y + 2p = 0, \\ q_v^{II}\colon\ (e^2-2)x + 2\sqrt{e^2-1}\,.\,y + 2p = 0. \end{cases}$$

Die Figuren 10 — 15 zeigen uns die verschiedenen Formen, welche die Enveloppe der Directrixen (punktirt) annehmen kann. In Figur 10 ist $e = \frac{3}{5}$, somit das Achsenverhältniss der bezüglichen Ellipsen $\frac{b}{a} = \frac{4}{5}$. Die Spurcurve besitzt keine Rückkehrpunkte, wohl aber den zwischen der Directrix $f$ und dem Brennpunkte gelegenen Doppelpunkt $K''$ in der Entfernung:

$$k'' = \frac{pe^2}{2-e^2} = \frac{9}{41}p$$

von der Directrix; seine entsprechenden Punkte $K$ auf dem Fundamentalkegelschnitte $K$ besitzen die Abscisse:

$$x_k = \frac{2p}{2-e^2} = \frac{30}{41}p.$$

Die Spurcurve hat hier die Directrix $f$ zur Doppeltangente; die betreffenden Berührungspunkte $Q_c$, $Q_d$ entsprechen den Scheiteln $C$, $D$ der kleinen Achse des Kegelschnittes $K$. Ausser den Scheiteln $Q_a$, $Q_b$ und den Maximal- und Minimalstellen $Q_x$, $Q_z$; $Q_y$, $Q_u$ sind noch vier weitere zur $x$-Achse symmetrisch gelegene Punktepaare der Spur-Curve nebst ihren entsprechenden Punkten auf $K$ markirt. Die strich-punktirte Curve repräsentirt die Umklappung der Doppelcurve in die Bildebene. Die Fall-Linie $E(B_r)$ der Ebene $E$ ist eine ihrer Asymptoten. $D_a$, $D_b$ sind die Grenzpunkte von den Coordinaten:

$$x_a'' = \frac{p(e^2+e+2)}{2(1+e)} = \frac{37}{40}p, \quad z_a'' = \frac{pe(-e^2-e+2)}{2(1+e)} = \frac{39}{200}p,$$

$$x_b' = \frac{p(e^2-e+2)}{2(1-e)} = \frac{11}{5}p, \quad z_b'' = \frac{pe(-e^2+e+2)}{2(1-e)} = \frac{42}{25}p.$$

Die Tangenten in diesen Punkten geben $Q_a$ resp. $Q_b$ und schliessen mit der positiven Richtung der $x$-Achse den Winkel $180 - \alpha$ ein. Unsere *Figur* enthält für den beliebigen Punkt $P$ auf $K$ die vollständige Con-

struction des entsprechenden Punktes $Q$ der Spurcurve mit seiner Tangente und des entsprechenden Punktes $D_p$ der Doppelcurve nebst seiner Tangente. Skizzirt sind auch als Enveloppen ihrer Tangenten die Projectionen der Rückkehrcurve der developpablen Fläche auf die Bildebene und auf die Ebene $(x, z)$. Die Erstere ist symmetrisch zur Achse $x$ und zeigt auf derselben zwei Rückkehrpunkte, welche den Grenzpunkten der Doppelcurve entsprechen; sie berührt $K$ in den Scheiteln der kleinen Achse und besitzt die Sehnen $XY$, $UZ$ zu Doppeltangenten. Die Letztere ist von einfacherer Gestalt als diese; denn je zwei zur Ebene $(x, z)$ symmetrisch gelegene Tangenten projiciren sich auf $(x, z)$ in eine einzige; diese Curve hat den Mittelpunkt der Doppelcurve zum Wendepunkte und die Asymptote $EB_r$ zur Tangente in demselben.

Je kleiner $e$ wird, desto kleiner wird die Ellipse $K$ — bei festem Brennpunkte $F$ und fester Directrix $f$ —, desto näher rücken somit die Punkte $Q_c$, $Q_d$ auf $f$ und der Doppelpunkt $K''$ nach $E$ und desto mehr rücken die Scheitel $Q_a$ und $Q_b$ einander näher. Im Grenzfalle $e=0$ reducirt sich $K$ auf den Punkt $F$, nach 1) anzusehen als unendlich kleinen Kreis von der Gleichung:

$$(x-p)^2+y^2=0.$$

Die Spurcurve geht über in den doppelt gelegten Kreis vom Mittelpunkte $F$ und dem Radius $p$, was durch die Gleichung $21_1$) auch bestätigt wird. Für $e=0$ geht nämlich dieselbe über in:

$$4y^4+[8x^2-16px]y^2+4x^4-16px^3+16p^2x^2=0,$$

oder in:

$$(x^2+y^2-2px)^2=0.$$

Die Kegelschnitte des gesuchten Systems sind Punkte, die als unendlich kleine Kreise anzusehen sind und alle mit $F$ zusammenfallen.

Nähert sich $e$ dem Werthe 1, so entfernen sich $Q_c$ und $Q_d$ von $E$ und der Doppelpunkt $K''$, sowie der Scheitel $Q_a$ nähern sich dem Brennpunkte $F$, während der andere Scheitel $Q_a$ sich immer weiter von diesem entfernt. Im Grenzfalle $e=1$, wo $K$ eine Parabel ist, degenerirt die Spurcurve in die unendlich ferne Gerade und in das Perpendikel in $F$ auf die $x$-Achse als dreifach zu rechnende Gerade, was durch die Gleichung $21_1$) bestätigt wird; denn setzen wir in derselben $e=1$, so geht sie über in:

$$0.y^4+0y^2+0x^4-4px^3+12p^2x^2-12p^3x+4p^4=0,$$

oder in:

$$(x-p)^3=0.$$

Die Kegelschnitte des Systems bestehen hier aus dem Büschel der doppelt gelegten Strecken $FP$.

In Figur 11 ist $K$ eine Hyperbel mit $e=\frac{5}{4}$. Der Doppelpunkt $K''$ liegt nun rechts vom Brennpunkte $F$ und hat die Abscisse $\frac{25}{7}p$; den entsprechenden Punkten $K$ des Fundamentalkegelschnittes kommt die Abscisse $\frac{32}{7}p$

zu. Die Spurcurve hat zwei Asymptoten und zwei Rückkehrpunkte von den Coordinaten:

$$x = -\frac{8p}{e^2} = \frac{128}{25}p, \quad y = \pm\frac{p(4-e^2)}{e^2(e^2-1)}\sqrt{(4-e^2)(e^2-1)} = \frac{39.\sqrt{39}}{75}p = 3{,}24p.$$

Diese Letzteren fallen nahezu mit dem Maximalpunkte $Q_y$ resp. Minimalpunkte $Q_x$ zusammen.

In Figur 12 ist $e = \sqrt{2}$, also $K$ eine gleichseitige Hyperbel. Der Doppelpunkt fällt ins Unendliche; die Tangenten in demselben sind die zur $x$-Achse parallelen Asymptoten. Die Rückkehrpunkte haben die Coordinaten:

$$x = -4p, \quad y = \pm p\sqrt{2} = a.$$

Die entsprechenden Punkte $R$ des Fundamentalkegelschnittes haben die Abscisse $-3p$ und sind daher die Endpunkte der Ordinate im zweiten Brennpunkte $F^*$.

In Figur 13 ist $e = \frac{3}{2}$; der Asymptotenwinkel des Kegelschnittes $K$ ist stumpf. Der Doppelpunkt $K''$ liegt nun auf der negativen $x$-Achse und besitzt die Abscisse $-9p$; den entsprechenden Punkten $K$ des Fundamentalkegelschnittes kommt die Abscisse $-8p$ zu. Die Rückkehrpunkte haben die Coordinaten:

$$x = -\frac{32}{9}p, \quad y = \pm\frac{7\sqrt{35}}{45}p = 0{,}92p.$$

Die entsprechenden Punkte auf $K$ sind durch die Abscisse $-\frac{12}{5}p$ bestimmt.

In Figur 14 ist $e = 2$. Diese Annahme liefert den auf S. 305 erwähnten Grenzfall. Der Doppelpunkt und die Rückkehrpunkte fallen zusammen in den Punkt $x = -2p$ und lösen sich auf in einen gewöhnlichen Punkt der Spurcurve; die entsprechenden Punkte von $K$ fallen in den auf der negativen $x$-Achse liegenden Scheitel $B$.

In Figur 15 besitzt $e$ noch einen grösseren Werth, nämlich 3. Der isolirte Doppelpunkt $K''$ hat die Abscisse $-\frac{9}{7}p$, während der rechts davon gelegene Scheitel $Q_b$ durch $x'_b = -p$ bestimmt ist. Die Rückkehrpunkte sind nun wieder imaginär und befinden sich auf der Parallelen zur $y$-Achse im Abstande $-\frac{8}{9}p$ von derselben.

Ist $e = \infty$, also $\alpha = 90^0$, so degenerirt $K$ in die doppelt gelegte Gerade $f$ und die Spurcurve besteht gleichfalls aus dieser Linie als Doppelgeraden und dem isolirten Doppelpunkte $K''$ auf der $x$-Achse von der Abscisse $\left(\frac{pe^2}{2-e^2}\right)_{e=\infty} = -p$, anzusehen als unendlich kleinen Kreis, was auch durch die Gleichung $21_1$) bestätigt wird; denn setzt man dort die Glieder, welche $e$ in der höchsten Potenz enthalten (in der sechsten) $= 0$, so folgt die Gleichung:

$$x^2y^2 + x^4 + 2px^3 + p^2x^2 = 0,$$

oder:

$$x^2.[y^2 + (x+p)^2] = 0.$$

Die Kegelschnitte des Systems degeneriren ebenfalls in die Doppellinie $f$.

In Figur 16 sind in Beziehung zu Figur 10 einige Paare der Kegelschnitte des gesuchten Systems selbst gezeichnet. Der Einfachheit wegen sind die Punkte des Fundamentalkegelschnittes mit arabischen und die entsprechenden Punkte der Spurcurve mit den entsprechenden römischen Ziffern bezeichnet. Für die Punkte 1—4 und ihre zur $x$-Achse symmetrischen fallen die bezüglichen Kegelschnitte $K_i$ ins Innere von $K$, für 4 und 10 vereinigen sie sich mit $K$ und für die übrigen Punkte von 4 bis 7 und ihre symmetrischen liegen sie ausserhalb $K$. $K_1$ ist die kleinste, $K_7$ die grösste Ellipse des Systems.

Zum Schlusse glaube ich noch die Bemerkung hinzufügen zu dürfen, dass ich im Besitze eines von mir ausgeführten, gelungenen Fadenmodelles der developpablen Fläche vierter Ordnung bin, welches bei Anlass der Mathematikerversammlung in München ausgestellt war.

Zürich, im März 1893.

# Kleinere Mittheilungen.

## XVIII. Ueber das Quadrat des Integrals einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Für die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe ist jenes Quadrat schon öfters betrachtet worden. Man vergleiche Clausen, Crelle's Journal Bd. 3 S. 89. — Markoff, Mathem. Annalen Bd. 28 S. 586. — In diesen Arbeiten handelt es sich hauptsächlich um die Multiplication von hypergeometrischen Reihen; auf das eigentliche Integrationsproblem, auf Bestimmung des integrirenden Factors und dergleichen wird nicht eingegangen. Das soll nun in folgenden Zeilen geschehen.

Es sei

$$1)\qquad T = y'' + x_1 y' + x_0 y = 0 \qquad \left(x_i = f_i(x),\ y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

vorgelegt, und man frage nach jener linearen Differentialgleichung, welcher $z = y^2$ genügt. Durch Substitution von $y = \sqrt{z}$ und Differentiation nach $z$ ergiebt sich:

$$4Ty^3 = 2zz'' - z'^2 + 2x_1 zz' + 4x_0 z^2,$$

$$4\frac{d}{dx}\left(Ty^3\right) = 2zz''' + 2x_1 zz'' + 2x_1 z'^2 + 2x'_1 zz' + 8x_0 zz' + 4x'_0 z^2,$$

mithin, wenn $z'^2$ eliminirt wird,

$$2\frac{d}{dx}\left(Ty^3\right) + 4x_1 Ty^3 = z\{z''' + 3x_1 z'' + (x'_1 + 2x_1^2 + 4x_0)z' + 2(2x_1 x_0 + x'_0)z\}.$$

Ist wie oben $T = 0$, so lautet die gesuchte Differentialgleichung:

$$2)\qquad z''' + 3x_1 z'' + (x'_1 + 2x_1^2 + 4x_0)z' + 2(2x_1 x_0 + x'_0)z = 0.$$

Aber diese Gleichung besteht bereits, wenn

$$\frac{d}{dx}\left(Ty^3\right) + 2x_1 Ty^3 = 0,$$

das heisst:

$$T = ky^{-3}e^{-2\int x_1 dx}, \quad (k = const.),$$

woraus folgt, dass

$$3)\qquad y'' + x_1 y' + x_0 y = ky^{-3}e^{-2\int x_1 dx}$$

*ein* erstes Integral der Gleichung 2) vorstellt.

In $z$ geschrieben lautet es:

$$4)\qquad e^{2\int x_1 dx}\left\{zz''-\frac{1}{2}z'^2+x_1zz'+2x_0z^2\right\}=Const.,$$

und hiermit wird ersichtlich, dass $\varrho = ze^{\int 2x_1 dx}$ ein **integrirender Factor** der Gleichung 2) ist.

Zuweilen kann man aus der Bemerkung Vortheil ziehen, dass sich die nichtlineare Gleichung 3) oder 4) auf die lineare 2) zurückführen lässt. Ist speciell $x_1 = 0$, so folgt also das Integral von

$$y''+x_0y=ky^{-3}$$

aus

$$z'''+4x_0z'+2x_0'z=0,\quad y=\sqrt{z}.$$

Zwischen den drei willkürlichen Constanten, welche das Integral $z$ besitzt und der gegebenen Constanten $k$ findet jetzt eine Beziehung statt, und diese ergiebt sich, wenn man dem $x$ einen passenden Specialwerth beilegt.

Sei etwa vorgelegt:

$$y''-y=ky^{-3},$$

dann wird

$$z'''-4z'=0$$

mithin:

$$z=c_0+c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}.$$

Für $x=0$ folgt $k=4c_1c_2-c_0^2$, sonach lautet das Integral der vorgelegten Gleichung:

$$y=\sqrt{c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+\sqrt{4c_1c_2-k}}.$$

Diese Form controlirt man leicht durch die Annahme $k=0$, womit

$$y=\sqrt{c_1}e^x+\sqrt{c_2}e^{-x}$$

als wohlbekanntes Integral der entsprechenden Gleichung erhalten wird.

---

W. Heymann.

### XIX. Projectiv-geometrischer Beweis des Satzes: Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die scheinbare Grösse eines Kegelschnittes dem Quadranten gleich kommt, ist ein Kreis.

In der reinen projectiven Geometrie existirt der Kreis, wie ihn die Massgeometrie definirt, bekanntlich nicht. Wenn man aber auf der uneigentlichen (unendlich fernen) Geraden eine elliptische Involution ein- für allemal auszeichnet, die man die absolute Involution, ihre (idealen) Doppelpunkte **absolute Punkte** nennt, so kann man jeden durch die absoluten Punkte gehenden Kegelschnitt einen Kreis, und den Winkel, den zwei durch die absoluten Punkte harmonisch getrennte Geraden mit einander einschliessen, einen rechten oder einen **Quadranten** nennen, und dadurch dem oben aus-

gesprochenen Satze eine Bedeutung in der projectiven Geometrie schaffen. Der Weg zum Beweise des Satzes führt über gewisse Poncelet'sche Sätze, und nöthigt dazu, etwas weit auszuholen, indessen glaube ich, dass der projectiv-geometrische Beweis jener Poncelet'schen Sätze an sich von Interesse ist und willkommen sein wird, wenn ich dieselben auch nur in dem Umfange zu beweisen vermag, als zum Beweise des Hauptsatzes gerade nöthig ist.

Ein Kreisbüschel $(KH)$ enthalte die Kreise $KHK_1K_2\ldots K'K''\ldots$, dann giebt es einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ von der Beschaffenheit, dass $H$ die harmonische Contravariante von $\mathfrak{K}$ und $K$ ist, das will sagen, dass die Tangenten von $H$ die Kreise $K$ und $\mathfrak{K}$ in vier harmonischen Punkten treffen. Die gemeinsamen Tangenten $abcd$ von $K$ und $H$ mögen $K$ in den Punkten $ABCD$ treffen. Die zweite Tangente von $A$ an $H$ sei $a'$, so bestimmen $ABCD$ und $a'$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, der der gesuchte ist. Denn zu $K\mathfrak{K}$ giebt es eine harmonische Contravariante, sie hat mit $H$ fünf Tangenten $abcda'$ gemein, sie ist also $H$. Die hier gebrauchten Sätze über die harmonische Contravariante sind in Schröter's „Theorie der Kegelschnitte", und daraus entlehnt in meinem Buche: „Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung" auf S. 117, rein projetiv erwiesen.

Ist nun $M$ ein Punkt auf $K$ und $n$ seine Polare in Bezug auf $\mathfrak{K}$, die $K$ in $N'$ und $N''$ trifft, und wird $MN'$ mit $m'$, $MN''$ mit $m''$ bezeichnet, so sind $m'm''$ Tangenten an $H$, als der Contravariante von $\mathfrak{K}K$. Die Polaren $n$ von $M$, wenn $M$ auf $K$ läuft, umhüllen einen Kegelschnitt $K_1$, den Polarkegelschnitt von $K$ für $\mathfrak{K}$. Er gehört zum Büschel $(HK)$. Fällt nämlich $M$ auf einen Schnittpunkt $HK$, so fallen $m'm''$ zusammen, $n$ ist Tangente an $K$. Im Allgemeinen gehen durch einen Punkt $M$ auf $K$ zwei Polaren für $\mathfrak{K}$, nämlich die der Punkte $N'N''$. Fällt aber $M$ auf einen Schnittpunkt von $HK$, so fallen $N'N''$ zusammen, es giebt nur eine Polare, nur eine Tangente von ihm aus an $K_1$, er ist also ein Punkt von $K_1$, w. z. b. w.

Somit ist der Satz bewiesen: Ist ein Kreisbüschel $(KH)$ gegeben, und zieht man von einem Punkte $M$ auf $K$ Tangenten an $H$, die $K$ in $N'N''$ treffen, so berührt die Verbindungslinie $n$ von $N'N''$ fortwährend einen und denselben Kreis $K_1$ des Büschels, wenn $M$ auf $K$ läuft, und dabei $MN'$, $MN''$ fortwährend $H$ berühren. Oder: Ist ein Dreieck $MN'N''$ einem Kegelschnitt $K$ eingeschrieben und berühren zwei Seiten $MN'$, $MN''$ einen Kreis $H$, so berührt die dritte Seite $N'N''$ einen Kreis $K_1$ des Büschels $(HK)$ und zwar stets denselben, wenn das Dreieck so gedreht wird, dass die Ecken auf $K$ bleiben, und zwei Seiten $H$ berühren. — Bekanntlich hat Poncelet diesen Satz in allgemeinerer Gestalt erwiesen, allein sein Beweis stützt sich auf die Voraussetzung, dass zu einem continuirlichen Strahlenbüschel eine continuirliche Stützcurve gehöre, der ja für algebraische Strahlenbüschel richtig ist, was sich auf analytischem Wege erweisen lässt.

Der Beweis kann demnach nicht als ein projectiv-geometrischer angesehen werden. Nach einem Referat in dem Jahrbuche der Fortschritte der Mathematik hat Herr Andreieff im Jahre 1884 in Charkow zwei Abhandlungen in russischer Sprache veröffentlicht, welche den Zweck haben, die Poncelet'schen Sätze rein projectiv und descriptiv zu erweisen; es wäre wünschenswerth, dass diese Untersuchungen durch Uebertragung in eine geläufigere Sprache zugänglicher gemacht würden.

Liegen die Punkte $M_1 M_2 M_3 M_4 M_5$ auf $K$ und sind $(M_1 M_2)(M_2 M_3)$ $(M_3 M_4)(M_4 M_5)$ Tangenten an $H$, so wälzt sich $(M_5 M_1)$ auf einem Kreise des Büschels $(HK)$, wenn die fünf Ecken des Polygons auf $K$ laufen, und dabei die vier ersten Seiten Tangenten an $H$ bleiben. Denn nach dem bewiesenen Satze wälzen sich $(M_1 M_3)(M_3 M_5)$ auf einem Kreise $K_1$ des Büschels, und wenn man jetzt $K_1$ für $H$ eintreten lässt, so folgt, dass sich $(M_5 M_1)$ auf einem Kreise $K_2$ des Büschels $(HK)$ wälzt. — Fällt $M_5$ mit $M_1$ zusammen, so fällt $K_2$ mit $K$ zusammen, und man hat den Satz: Ist ein Viereckvierseit einem Kreise $K$ eingeschrieben und einem Kreise $H$ umschrieben, so giebt es unendlich vieler solcher Vierecke, die geradlinige Figur lässt sich mit Erhaltung der vorgeschriebenen Bedingungen continuirlich drehen. Es ist leicht, aus Sätzen über das eingeschriebene Viereck und das umschriebene Vierseit nachzuweisen, dass die Verbindungslinien gegenüber liegender Ecken des Viereckvierseits durch einen Punkt $P'$ gehen, der für $H$ und $K$ dieselbe Polare hat, also durch einen Grenzpunkt des Büschels $(HK)$.

Berührt die Gerade $M_5 M_1$ in einer Lage des Polygons den Kreis $H$, so berührt sie ihn fortwährend, so dass der Poncelet'sche Satz für das Fünfeckfünfseit erwiesen ist. Für das Sechsecksechsseit $M_1 M_2 \dots M_6$ gilt der Satz, weil er für das Dreieck $M_1 M_3 M_5$ richtig ist. Im Sechsecksechsseit gehen die Verbindungslinien gegenüber liegender Ecken $(M_1 M_4)(M_2 M_5)$ $(M_3 M_6)$ durch einen Punkt, und zwar durch den Punkt $P'$, einen Grenzpunkt des Büschels $(HK)$. Die Berührungspunkte der Seiten $(M_1 M_2)$ $(M_2 M_3) \dots (M_6 M_1)$ mit $H$ seien bez. $M'_1 M'_2 \dots M'_6$. Betrachten wir das Vierseit $(M_1 M_2)(M_2 M_3)(M_4 M_5)(M_5 M_6)$, so schneiden sich nach bekannten Sätzen $(M'_1 M'_4)(M'_2 M'_5)(M_2 M_5)$ in einem Punkt $Q$. Die Polare dieses Punktes für $H$ ist die die Schnittpunkte von $(M_1 M_2)$ mit $(M_4 M_5)$ und von $(M_2 M_3)$ mit $(M_5 M_6)$ verbindende Gerade, die Pascal'sche Gerade des Sechsecksechsseits $M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6$. Betrachten wir das Vierseit $(M_2 M_3)$ $(M_3 M_4)(M_5 M_6)(M_6 M_1)$, so gehen die Geraden $(M'_2 M'_5)(M'_3 M'_6)(M_3 M_6)$ ebenfalls durch einen Punkt $Q'$, dessen Polare für $H$ die Pascal'sche Gerade des Sechsecksechsseits $M_1 M_2 \dots M_6$ ist. Die Punkte $QQ'$ fallen mithin zusammen, weil sie für $H$ dieselbe Polare haben. Also gehen die Verbindungslinien der gegenüber liegenden Berührungspunkte des $K$ eingeschriebenen $H$ umschriebenen Sechsecksechsseits durch einen Punkt, den Pol der Pascal'schen Geraden des Sechsecksechsseits. — Das Princip der

Dualität giebt den Satz: In einem $H$ umschriebenen $K$ eingeschriebenen Sechsseitsechseck $(M_1 M_2)(M_2 M_3)\ldots(M_6 M_1)$ schneiden sich die gegenüber liegenden Seiten in Punkten einer Geraden, der Polare des Brianchon-schen Punktes des Sechsseits in Bezug auf $K$. Hieraus schliesst man weiter, dass die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken des $K$ eingeschriebenen $H$ umschriebenen Sechsecksseits $M_1 M_2 \ldots M_6$ sich in einem Punkte $P'$ schneiden, der für $K$ und $H$ dieselbe Polare hat, in einem Grenzpunkte des Büschels $(HK)$.

Liegen die Punkte $M_1 M_2 \ldots M_9$ auf $K$ und berühren die Seiten $(M_1 M_2)$ $(M_2 M_3)\ldots(M_8 M_9)$ den Kreis $H$, so beschreibt die Seite $M_9 M_1$, wenn $M_1$ sich auf $K$ verändert, einen Büschel zweiter Ordnung, umhüllt einen Kegelschnitt $K'$ des Büschels $(HK)$. Denn die Seiten $(M_1 M_5)$, $(M_5 M_9)$ berühren, wie eben bewiesen, fortwährend einen Kreis $K_1$ des Büschels und daraus folgt, dass $(M_9 M_1)$ einen Kreis $K'$ desselben Büschels fortwährend berührt. Fällt $M_9$ mit $M_1$ zusammen, oder berührt $M_9 M_1$ den Kreis $H$, so folgt daraus der Poncelet'sche Satz für das Achteck und das Neuneck. Für's Zehneck folgt er aus dem Fünfeck, hingegen bleibt er für's Siebeneck unerwiesen.

Es ist mir noch gelungen den folgenden Fall des Poncelet'schen Satzes projectiv-geometrisch zu erweisen. Liegen die Ecken eines Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ auf dem Kreise $K$ des Büschels $(HK)$ und berührt $(M_1 M_3)$ den Kreis $K'$, $(M_2 M_3)$ den Kreis $K''$, und geht $(M_1 M_2)$ durch den Grenzpunkt $P'$ des Kreisbüschels, so lässt sich das Dreieck unter Erhaltung dieser Eigenschaften drehen. Um der Vorstellung eine bestimmtere Grundlage zu geben, nehmen wir an, $K$ umschliesse die Kreise $K' K''$ und $P'$ sei der im Innern dieser Kreise gelegene Grenzpunkt des Kreisbüschels $(HK)$, $P''$ sei der äussere Grenzpunkt, und $P$ sei der Pol der Geraden $P'P''$, der Schnittpunkt des realen im Büschel enthaltenen Geradenpaares, $P$ ist ein uneigentlicher Punkt. Die Seiten des den Curven des Büschels gemeinsamen Polardreiecks $PP'P''$ seien $P'P'' = p$, $P''P = p'$, $PP' = p''$. — Nimmt man einen der drei Punkte $P$ zum Centrum einer Collineation, die gegenüber liegende Seite des Polardreiecks zur Fluchtlinie, und ordnet jedem Punkte auf einer Geraden durch diesen Punkt $P$ den Punkt zu, der von ihm durch $P$ und $p$ harmonisch getrennt ist, so erhält man drei Collineationen, in denen jeder Kreis des Kreisbüschels $(HK)$ sich selbst entspricht. Ist das Dreieck $M_1 M_2 M_3$ dem Kreise $K$ eingeschrieben und sind $(M_1 M_3)(M_2 M_3)$ $(M_1 M_2)$ bez. Tangenten der Kreise $K' K'' K'''$ des Büschels, so ergiebt die Collineation mit dem Centrum $P$ ein neues Dreieck mit denselben Eigenschaften, dessen Seiten aber in umgekehrter Reihe auf einander folgen. Man kann es das Spiegelbild des ursprünglichen in Bezug auf die Gerade $p$ nennen. Die Collineation mit dem Centrum $P''$ liefert zwei neue Dreiecke mit denselben Eigenschaften, man kann sie die Spiegelbilder der vorigen *in Bezug* auf die Gerade $p''$ nennen. In zweien dieser vier Dreiecke folgen

die Seiten auf einander in gleichem Sinne, in den beiden anderen in entgegengesetztem. Sind von den Kreisen $K'K''K'''$ zwei einander gleich, so ist die Aufeinanderfolge der Seiten ohne Belang. Die Collineation mit dem Centrum $P'$ liefert keine neuen Dreiecke.

Nun construiren wir ein Dreieck, von dem zwei Ecken $M_1 M_2$ auf die Punkte fallen, in denen $p$ den Kreis $K$ trifft, während $(M_1 M_3)$ den Kreis $K'$ und $(M_2 M_3)$ den Kreis $K''$ berührt. Der Punkt $M'_3$ sei von $M_3$ durch $p$ und $P$ harmonisch getrennt, er liegt auf $K_1$ und $(M_1 M'_3)(M_2 M'_3)$ berühren ebenfalls $K'$ bez. $K''$, wie aus der Collineation mit dem Centrum $P$ folgt. Dreht man jetzt die beiden Dreiecke so, dass $(M_1 M_2)$ auf $K$ bleiben und ihre Verbindungslinie durch $P'$ geht, während $(M_1 M_3)$ und $(M_1 M'_3)$ den Kreis $K'$, $(M_2 M_4)(M_2 M'_4)$ den Kreis $K''$ berühren, und $M_3 M_4 M'_3 M'_4$ auf $K$ liegen, so fallen in der Anfangslage $M_3 M_4$ und $M'_3 M'_4$ zusammen. $(M_3 M'_3)$ mag mit $h_1$, $(M_4 M'_4)$ mit $h_2$ bezeichnet werden, in der Anfangslage fallen $h_1 h_2$ zusammen, berühren aber auch weiter bei der Drehung fortwährend einen und denselben Kreis $H$ des Büschels $(HK)$ nach den bisher bewiesenen Sätzen. Die Geraden $h_1$ sind die Polaren der Punkte $M_1$ von $K$ für einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$, wenn $K'$ die harmonische Contravariante zu $K\mathfrak{K}'$ ist und $h_2$ sind die Polaren der Punkte $M_2$ von $K$ in Bezug auf einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}''$, wenn $K''$ die harmonisch Contravariante zu $K\mathfrak{K}''$ ist. Wie aber die Punkte $M_1 M_2$ einander projectiv (involutorisch) zugeordnet sind, so sind auch die Geraden $h_1 h_2$, die Polaren von $M_1 M_2$ für $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ einander projectiv zugeordnet. In vier Lagen aber, nämlich wenn $M_1$ auf einen der Punkte fällt, die $p$ mit $K$ gemein hat, oder wenn $M_1$ auf einen Punkt fällt, die $p''$ mit $K$ gemein hat, fallen $h_1 h_2$ zusammen. In diesen Fällen gehen nämlich $h_1 h_2$ gleichzeitig entweder durch $P$ oder durch $P''$. Folglich fallen $h_1 h_2$ und folglich fallen die Punkte $M_3 M_4$, und die Punkte $M'_3 M'_4$ fortwährend zusammen, das Dreieck $M_1 M_2 M_3$ lässt sich also so drehen, dass $M_1 M_2 M_3$ fortwährend auf $K$ bleiben und $(M_1 M_3)(M_2 M_3)$ fortwährend $K'K''$ berühren und $(M_1 M_2)$ durch $P'$ geht.

Nun schreiten wir zum Beweise des an der Spitze dieser Zeilen stehenden Satzes. Es soll der geometrische Ort der Punkte gesucht werden, in denen die an einen Kegelschnitt $H$ gezogenen Tangenten von den absoluten Punkten harmonisch getrennt sind. Der Mittelpunkt, der Pol der uneigentlichen Geraden für $H$ sei $P'$. Von einem Paare $AA'$ der absoluten Involution ziehen wir die vier Tangenten an $H$, $a_1 a_2$ von $A$, $a'_1 a'_2$ von $A'$. Ein Kreis $K$ durch die Punkte $(a_1 a'_1)(a_2 a'_2)$, für den die Verbindungslinie $(a_1 a'_1)(a_2 a'_2)$ Durchmesser ist, enthält auch die Punkte $(a_1 a'_2)(a_2 a'_1)$, weil die Geraden $a_1 a'_2$ und ebenso $a_2 a'_1$ mit einander dem Quadranten gleiche Winkel bilden. Die Verbindungslinien der gegenüber liegenden Berührungpunkte des Vierecks $a_1 a'_1 a_2 a'_2$ und die Verbindungslinien der gegenüber liegenden Ecken des Vierseits $(a_1 a'_1)(a'_1 a_2)(a_2 a'_2)(a'_2 a_1)$ schneiden sich in einem Punkte, der sowohl für $H$ als auch für $K$ dieselbe Polare (die uneigentliche Gerade) hat,

das heisst, der Kegelschnitt $H$ und der Kreis haben beide denselben Mittelpunkt $P'$. Einfache Lagenbetrachtungen lehren, dass Kreis und Kegelschnitt sich nicht in reellen Punkten schneiden. Das $K$ eingeschriebene Dreieck $(a_1 a'_2)(a_1 a'_1)(a'_1 a_2)$ berührt mit seinen zwei ersten Seiten $a_1 a'_1$ den Kegelschnitt $H$ und die dritte Seite $(a_1 a'_2)(a'_1 a_2)$ geht durch den Grenzpunkt $P'$ des Kegelschnittbüschels $(HK)$. Folglich lässt es sich mit Erhaltung dieser Eigenschaften nach den hier bewiesenen Poncelet'schen Sätzen drehen. Zieht man demnach von irgend einem Punkte des Kreises $K$ Tangenten an $H$, so liegen die beiden weiteren Schnittpunkte dieser Tangenten mit $K$ auf einem Durchmesser von $K$, und die Tangenten schliessen deshalb einen Quadranten ein, gehen durch ein Paar der absoluten Involution. Der Kreis $K$ ist demnach der geometrische Ort aller Punkte, in denen die scheinbare Grösse des Kegelschnittes $H$ einem Quadranten gleichkommt.

Nachwort. Inzwischen ist mir der allgemeine projective Beweis der Poncelet'schen Sätze gelungen.

J. Thomae.

# XVII.

# Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.

Von

Dr. W. Heymann
in Chemnitz.

(Schluss des zweiten Theiles.)

Hierzu Tafel VI Fig. 1–25.

## C. Ueber Kettenfunctionen.*

Ein weiteres Mittel, die Wurzeln einer Gleichung durch convergente unendliche Processe zu erhalten, bieten die Kettenfunctionen dar. Dieselben sind, abgesehen von den Kettenbrüchen, bisher nicht so beachtet worden, als sie es verdienen. Dies mag seinen Grund darin finden, dass wir Annäherungsmethoden besitzen, die schneller zum Ziele führen. Aber bei jenen praktischen Methoden, wie die Newton'sche und Gräffe'sche, tritt der Functionsbegriff, also das analytische Gebilde, welches die Wurzeln der Gleichung darstellt, derartig zurück, dass eigentlich blos eine Zahlentabelle der Näherungswerthe übrig bleibt. Die einfachsten Kettenfunctionen, und nur solche wollen wir verwenden, sind dagegen hinschreibbare analytische Ausdrücke, so weit wenigstens, dass, wie bei unendlichen Reihen, das Bildungsgesetz deutlich hervortritt. Es lässt sich mit ihnen mindestens in dem Umfang rechnen, als mit Reihen, und sie erlauben eine sehr einfache geometrische Deutung, durch welche zugleich ersichtlich wird, ob sie convergent oder divergent sind.

---

* Vergl. die Abhandlung des Verfassers „Theorie der An- und Umläufe und Auflösung der Gleichungen vom vierten, fünften und sechsten Grade mittelst goniometrischer und hyperbolischer Functionen". Journal für Mathem. Bd. CXIII. — In dieser Arbeit mussten die Grundprincipien unserer Theorie nochmals kurz gestreift werden. Die dort mitgetheilten Anwendungen sind aber neu und schliessen sich den hier folgenden ergänzend an.

Eine Kettenfunction wird durch ein System von Gleichungen

$$x = \varphi_1 x_1, \quad x_1 = \varphi_2 x_2, \quad x_2 = \varphi_3 x_3, \ldots, x_{n-1} = \varphi_n x_n$$

oder durch einen Ausdruck

$$x = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \ldots \varphi_n x_n$$

definirt, wobei die $\varphi$ gegebenen Functionen bedeuten.*

Für

$$\varphi_k = a_k + \frac{1}{x_k} \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

entsteht ein gewöhnlicher Kettenbruch; für

$$\varphi_k = \sqrt[p]{a_k + x_k}$$

würde man eine Kettenwurzel

$$x = \sqrt[p]{a_1 + \sqrt[p]{a_2 + \sqrt[p]{a_3 + \cdots \sqrt[p]{a_n + x_n}}}}$$

erhalten, und in gleicher Weise kann man von einer Kettenpotenz, einem Kettenlogarithmus u. s. f. sprechen. Offenbar wird man endliche und unendliche Kettenfunctionen zu unterscheiden haben, und von den letzteren sind die periodischen besonders bemerkenswerth. Eine solche ist durch nachstehendes Gleichungssystem definirt:

$$x = \varphi_1 x_1, \quad x_1 = \varphi_2 x_2, \ldots, x_{k-1} = \varphi_k x,$$

das heisst

$$x = \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_k \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_k \varphi_1 \varphi_2 \ldots,$$

und die Periode heisst $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_k$.

Der besondere Gegenstand unserer Abhandlung erlaubt uns nicht, auf allgemeine Fragen über Kettenfunctionen einzugehen. Wir beschränken uns vielmehr auf den Fall zweier Gleichungen, die eine resp. zwei periodische Kettenfunctionen definiren, und zeigen, dass diese Functionen unter allen Umständen die reellen Wurzeln jener Gleichungen darzustellen vermögen, aus denen sie eben abgeleitet wurden.

### 1. Allgemeine Erörterungen.

Es seien

1) $$y = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = \psi(x)$$

irgend zwei Functionen, aber man nehme an, dass sich selbige leicht umkehren lassen und bezeichne die Umkehrung, also die inversen Functionen, durch

2) $$x = \varphi^{-1}(y) \quad \text{und} \quad x = \psi^{-1}(y),$$

dann definiren die Gleichung bei kreuzweiser Zusammenstellung zwei Kettenfunctionen.

* Das gelegentliche Fortlassen der Klammern hinter dem Functionszeichen kann hier nicht zu Missverständnissen führen.

Aus $x=\varphi^{-1}y$ und $y=\psi x$ folgt nämlich

$$3) \qquad x_k=\varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}\psi\ldots\varphi^{-1}\psi x_0\equiv[\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)},$$

aus $x=\psi^{-1}y$ und $y=\varphi x$ folgt dagegen

$$4) \qquad x_k=\psi^{-1}\varphi\psi^{-1}\varphi\ldots\psi^{-1}\varphi x_0\equiv[\psi^{-1}\varphi x_0]^{(k)},$$

und hier bedeutet $x_0$ einen zunächst unbestimmten Anfangswerth, während die positive ganze Zahl $k$ die Anzahl der Perioden $\varphi^{-1}\psi$ resp. $\psi^{-1}\varphi$ angiebt. Man bemerke auch, dass zwei auseinander abgeleitete Gleichungen, wie $y=\varphi x$ und $x=\varphi^{-1}y$, die Relationen

$$\varphi\varphi^{-1}a=\varphi^0 a=a \quad \text{und} \quad \varphi^{-1}\varphi a=\varphi^0 a=a$$

nach sich ziehen.

Fragen wir zunächst nach der geometrischen Bedeutung obiger Kettenfunctionen und sehen demgemäss $y=\varphi(x)$ und $y=\psi(x)$ als Gleichungen zweier Curven an, die sich mindestens in einem reellen Punkte schneiden mögen. — Indem wir das erste Element der Kettenfunction 3) bilden also $\psi x_0$, so berechnen wir die Ordinate $y_0$ der Curve $\psi$, welche zu $x_0$ gehört. (Man betrachte die beiden Figuren 1 und 2 gleichzeitig.) Denken wir jene Ordinate parallel zu sich verschoben, bis sie Ordinate der Curve $\varphi$ wird, so gehört zu ihr eine Abscisse $x_1$, welche offenbar durch $\varphi^{-1}\psi x_0$ ausdrückbar ist. Verlängern resp. kürzen wir jetzt die Ordinate wieder bis zur Curve $\psi$, so berechnet sich ihr Werth mittelst $\psi\varphi^{-1}\psi x_0=y_1$, und wenn der Process so fortgeführt wird, dann erhalten wir einen gebrochenen Zug, der dem Schnittpunkte der Curven $\varphi$ und $\psi$ zustrebt. Die Coordinaten der Brechpunkte sind durch die sich aneinander reihenden Glieder der Kettenfunction bestimmt, insbesondere liefert die Function 3) durch ihre Perioden successive Abscissenwerthe $x_1, x_2, \ldots x_k$, welche sich von der Abscisse des Schnittpunktes immer weniger unterscheiden.

Durchläuft man die gebrochenen Züge rückwärts, wendet man also die Kettenfunction 4) an, so entfernt man sich vom Schnittpunkte. Die erste Kettenfunction ist daher als convergent, die zweite als divergent zu bezeichnen.

Aus den Figuren ist weiter ersichtlich, dass man „Anläufe" und „Umläufe" zu unterscheiden hat. Liegt ein Umlauf vor (Fig. 2), so oscillirt der Werth der convergenten Kettenfunction gegen den Werth der festen Schnittpunktsabscisse und unterscheidet sich immer weniger von derselben. Bei Umläufen wird man von rechts drehenden (Uhrzeigerbewegung) und links drehenden zu sprechen haben. Anläufe sind im Allgemeinen doppelt (links und rechts vom Schnittpunkte) vorhanden (Fig. 1).

Unserer geometrischen Deutung liegt die wesentliche Voraussetzung zu Grunde, dass wenigstens ein reeller Schnittpunkt der Curven $\varphi$ und $\psi$ vorhanden ist. Andernfalls sind die Kettenentwickelungen zunächst sinnlos. Man hat sich von dem Vorhandensein des Schnittpunktes um so mehr zu über-

zeugen, als die Läufe resp. Kettenfunctionen anfänglich convergent erscheinen können, dann nämlich, wenn die Curven sich anfangs einander nähern, ohne indess zum Schnitt zu gelangen (Fig. 3 und 4). — Auch solche Fragen, ob der Umlauf rechts oder links drehend ist, auf welche Curve der Anfangspunkt $x_0$, $y_0$ des Laufes gelegt wird, ob die eine Kettenfunction 3) oder die inverse Function 4) convergirt, entscheidet man gewöhnlich am zweckmässigsten durch eine Orientirung an der Figur.

Immerhin lassen sich analytische Kriterien aufstellen, sobald man die beiden Curventangenten des Schnittpunktes construirt denkt und die Läufe zwischen jenen Tangenten in der Nähe des Schnittpunktes verfolgt. Ueberhaupt empfiehlt es sich, den Fall zweier sich schneidenden Geraden als ein erstes Uebungsbeispiel zu wählen.

Bemerken wir über die analytischen Kriterien nun Folgendes: Um festzustellen, auf welcher Curve der Anfangspunkt des convergirenden Laufes liegt, errichte man die zu $x_0$ gehörige Ordinate dem Schnittpunkte so nahe, dass die Curven $\varphi$ und $\psi$ sicher beide getroffen werden. Denkt man sich an beide Curven die zu $x_0$ gehörigen Tangenten construirt, so ist der Anfangspunkt des convergirenden Zuges der Berührungspunkt der schwächer geneigten Tangente. In den Figuren 1 und 2 liegt jener Anfangspunkt auf $\psi$, denn wir wollen ausdrücklich verabreden, dass wir die Züge stets in Abscissenrichtung beginnen. Die analytische Bedingung dafür, dass der convergirende Zug auf $\psi$ beginnt, ist demnach absolut (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen)

$$\psi'(x_0) < \varphi'(x_0),$$

wobei der Strich die Ableitung nach $x$ anzeigt.

Zugleich erkennt man, dass

$$3) \qquad x_k = [\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)} \text{ convergirt resp. divergirt,}$$

$$4) \qquad x_k = [\psi^{-1}\varphi x_0]^{(k)} \text{ divergirt resp. convergirt,}$$

je nachdem absolut

$$\psi'(x_0) \lesseqgtr \varphi'(x_0).$$

Uebrigens muss vorausgesetzt werden, dass obige Ungleichung für einen Punkt zwischen dem Anfangspunkt und Schnittpunkt nicht etwa in die entgegengesetzte umschlägt. Sollte dies eintreten, so wäre ein neuer Anfangspunkt zwischen der fraglichen Stelle und dem Schnittpunkte zu wählen. Gleiches gilt, wenn zufällig $\psi'(x_0) = \pm\, \varphi'(x_0)$; sollte diese Beziehung aber für jedwedes $x$ stattfinden, dann wäre überhaupt

$$\psi(x) = \pm\, \varphi(x) + const.,$$

ein Fall, der für uns belanglos ist. Man vergleiche die Untersuchung der trinomischen Gleichung in Abschnitt 2.

In der Nähe des Schnittpunktes $x$, $y$ der Curven $\varphi$ und $\psi$ findet ein *Anlauf* resp. ein Umlauf statt, je nachdem $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ gleiche oder entgegen-

gesetzte Vorzeichen besitzen. Ist für den Schnittpunkt $\varphi'(x) = \psi'(x)$, so findet Berührung statt. Bildet man die Resultante der gleichzeitig bestehenden Gleichungen

$$\varphi(x) - \psi(x) = 0,$$
$$\varphi'(x) - \psi'(x) = 0,$$

so wird man, wie bekannt, auf die Discriminante $\Delta$ der erstgenannten Gleichung geführt, und das Vorzeichen von $\Delta$ entscheidet dann, ob zwei reelle oder imaginäre Schnittpunkte vorhanden sind, während $\Delta = 0$ die Berührung anzeigt.

Ist für den Schnittpunkt $\varphi'(x) = -\psi'(x)$, ein Fall, der nur bei Umläufen eintreten kann, so bilden die Tangenten, welche im Schnittpunkte an die Curven $\varphi$ und $\psi$ gelegt werden, mit der positiven Richtung der Abscissenachse zwei Winkel, die sich zu $180^0$ ergänzen. Die Bedingung für das Eintreten eines solchen Schnittes, welcher „supplementar" heissen möge, wird erhalten, wenn man die Resultante $\Delta'$ der gleichzeitig bestehenden Gleichungen

$$\varphi(x) - \psi(x) = 0,$$
$$\varphi'(x) - \psi'(x) = 0$$

bildet und lautet $\Delta' = 0$. Ist $\Delta'$ von Null verschieden, so entscheidet sein Vorzeichen, ob der convergente Umlauf in der Nähe des Schnittpunktes rechts oder links drehend ist. Eine definitive Angabe hierüber kann jedoch nur im besonderen Falle gemacht werden. Die Abscissen solcher Schnittpunkte, für welche $\varphi'(x) = \pm\,\psi'(x)$, lassen sich selbstverständlich ohne Kettenentwickelung finden, sobald $\varphi$ und $\psi$ ganze Functionen bedeuten (gemeinschaftlicher Theiler).

Wenn eine oder beide der Functionen $\varphi$ und $\psi$ transcendent sind, so verstehen sich die Begriffe Resultante und Discriminante im weiteren Sinne. Sei etwa

$$y = \varphi(x) = \log x, \quad y = \psi(x) = mx; \quad \log x - mx = 0,$$

und der Logarithmus auf die Basis $e$ bezogen, dann hat man nach obigen Vorschriften Folgendes: Berührung tritt ein, sobald

$$\frac{1}{x} = m, \text{ das heisst wenn } \log\left(\frac{1}{m}\right) - 1 = 0,$$

also

$$m = \frac{1}{e} \cdot \text{ oder } \Delta = me - 1 = 0.$$

Die Abscisse des Berührungspunktes ist $x = e$, und es existiren

| | | | |
|---|---|---|---|
| zwei reelle Schnittpunkte | für | $\Delta < 0$ | (Fig. 5), |
| „ zusammenfallende | „ | $\Delta = 0$ | $(m > 0)$. |
| keine Schnittpunkte | „ | $\Delta > 0$ | |

Ein supplementarer Schnitt tritt ein, sobald

$$\frac{1}{x} = -m, \text{ das heisst wenn } log\left(-\frac{1}{m}\right) + 1 = 0,$$

also

$$m = -e, \text{ oder } \Delta' = m + e = 0.$$

Die Abscisse jenes Schnittpunktes ist $x = \frac{1}{e}$, und es existirt in der Nähe dieses Punktes ein convergenter

rechts drehender Umlauf für $\Delta' > 0$ (Fig. 5),
links " " " $\Delta' < 0$ $(m < 0)$.

Für $\Delta' = 0$ wird die Drehrichtung unbestimmt.

Bei Umläufen kann der eigenthümliche Fall vorkommen, dass der gebrochene Zug immer in sich zurückkehrt, also ein Rechteck bildet. Ein solcher Umlauf möge „indifferent" heissen, und er tritt ein, wenn die Abscisse des ersten Brechpunktes mit jener des vierten Brechpunktes zusammenfällt, das heisst, wenn $x_2 = x_0$ (vergl. Fig. 6). Nun ist für einen Umlauf entweder

$$x_2 = [\varphi^{-1}\psi x_0]^{(2)},$$

oder

$$x_2 = [\psi^{-1}\varphi x_0]^{(2)},$$

und üben wir hier beiderseits die Operation $\psi^{-1}\varphi$ resp. $\varphi^{-1}\psi$ aus, so entsteht

$$\psi^{-1}\varphi x_2 = \varphi^{-1}\psi x_0 \text{ resp. } \varphi^{-1}\psi x_2 = \psi^{-1}\varphi x_0,$$

also für $x_2 = x_0$ in beiden Fällen:

$$5) \qquad \varphi^{-1}\psi x_0 = \psi^{-1}\varphi x_0 = x_1.$$

Dieses ist die Bedingung, dass der vom Anfangspunkt $x_0$, $y_0$ ausgehende Umlauf ein indifferenter sei. Ist sie erfüllt, so reduciren sich die beiden Kettenfunctionen

$$3) \qquad x_k = [\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)} \text{ resp.}$$

$$4) \qquad x_k = [\psi^{-1}\varphi x_0]^{(k)}$$

auf

$$x_k = x_0, \text{ wenn } k \text{ gerade ist,}$$
$$x_k = x_1, \text{ wenn } k \text{ ungerade ist.}$$

Der indifferente Zug kann natürlich vermieden werden, wenn man für $x_0$ einen anderen Werth setzt, welcher der Schnittpunktsabscisse näher kommt. Nur beiläufig sei darauf hingewiesen, dass ein Umlauf erst nach zwei vollen Umdrehungen (Fig. 7) oder nach $n$ Drehungen in sich zurückkehren kann, dann dass zwei Curven $\varphi(x) = c + f(x)$ und $\psi(x) = c - f(x)$, für welche demnach $\varphi'(x) = -\psi'(x)$ überhaupt nur indifferente Umläufe besitzen.

Endlich sei noch bemerkt, dass ein anfänglich convergenter Umlauf nach und nach in einen indifferenten übergehen kann. Er erreicht alsdann den etwa im Innern des indifferenten Umlaufes liegenden Schnittpunkt nie, und die entsprechende Kettenfunction für $x_k$ schwankt schliesslich zwischen zwei bestimmten endlichen Werthen hin und her. Zu gleicher Zeit kann *innerhalb* des indifferenten Umlaufes ein dem Schnittpunkt zustrebender

Lauf vorhanden sein, der rückwärts durchlaufen ebenfalls in den indifferenten Zug übergeht.

Erörtern wir jetzt jene Vorgänge an dem einfachen Beispiel einer trinomischen Gleichung.

## 2. Die trinomische Gleichung $z^n + az + b = 0$.

Es sei $n$ eine ganze positive Zahl, $a$ und $b$ positiv, sonst aber beliebig, dann hat man folgende vier Fälle zu unterscheiden:

$$\alpha)\ z^n + az + b = 0,$$
$$\beta)\ z^n - az + b = 0,$$
$$\gamma)\ z^n + az - b = 0,$$
$$\delta)\ z^n - az - b = 0.$$

Ist $n$ ungerade, so gehen die Formen $\alpha$) und $\beta$) aus $\gamma$) und $\delta$) hervor, wenn man $z$ mit $-z$ vertauscht; wir betrachten in diesem Falle nur die letztgenannten.

Ist $n$ gerade, so gehen die Formen $\alpha$) und $\gamma$) bei der gleichen Vertauschung aus $\beta$) und $\delta$) hervor; es würden daher abermals die letztgenannten in Frage kommen.

Uebrigens wollen wir uns schon mit Rücksicht auf den Fall $n = 5$ auf ungerade $n$ beschränken; es treten hierbei bereits alle die Vorgänge ein, die uns interessiren. — Transformiren wir die Formen $\gamma$) und $\delta$) mittelst

$$z = x . a^{\frac{1}{n-1}}$$

und setzen

$$b . a^{-\frac{n}{n-1}} = c,$$

so entsteht beziehentlich

$$\text{I)} \qquad x^n + x - c = 0,$$

$$\text{II)} \qquad x^n - x - c = 0,$$

wo $c$ eine positive Zahl bedeutet.

Betrachtung der Form

$$\text{I)} \qquad x^n + x - c = 0 \ (n \text{ ungerade}).$$

Wir zerfällen dieselbe in

$$y = x^n = \varphi \quad \text{und} \quad y = c - x = \psi,$$

dann stellt $y = \varphi$ eine höhere Parabel dar, welche durch die Punkte $(-1, -1)$; $(0, 0)$; $(+1, +1)$ geht und in $(0, 0)$ ihren einzigen Inflexionspunkt besitzt. Die Tangente in $(0, 0)$ fällt mit der Abscissenachse zusammen. Weiter ist $y = \psi$ eine Gerade, welche auf beiden positiven Achsen die Strecke $c$ abschneidet (Fig. 8—10).

Weil $\frac{d\varphi}{dx} = nx^{n-1}$ immer positiv, $\frac{d\psi}{dx} = -1$ immer negativ ist, so kommen hier nur Umläufe vor.

Die Stelle, wo für ein gewisses $c > 0$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{d\psi}{dx}$$

wird, ist bestimmt durch $nx^{n-1} = 1$,

das heisst

$$x = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Führt man diesen Werth in I) ein, so ergiebt sich

$$6) \qquad c = (n+1)\, n^{-\frac{n}{n-1}},$$

das heisst die in unserer Theorie mit $\Delta'$ bezeichnete Form* wird

$$7) \qquad \Delta' = n^n c^{n-1} - (n+1)^{n-1}.$$

Sonach beginnt der convergente Umlauf

auf $\psi$, rechts drehend, wenn $\Delta' > 0$ (Fig. 8 u. 9),

auf $\varphi$, links drehend, wenn $\Delta' < 0$ (Fig. 10).

Im ersten Fallle ist die Schnittpunktsabscisse bestimmt durch

$$x = \sqrt[n]{y}, \quad y = c - x,$$

das heisst durch die Kettenwurzel

$$8) \qquad x = \sqrt[n]{c - \sqrt[n]{c - \sqrt[n]{c - \cdots \sqrt[n]{c - x_0}}}},$$

im zweiten Falle durch

$$x = c - y, \quad y = x^n,$$

das heisst durch die Kettenpotenz

$$9) \qquad x = c - \left[c - \left[c - \cdots [c - x_0]^n\right]^n\right]^n.$$

Als Anfangswerth kann man in beiden Fällen $x = 0$ wählen; die dann sofort erscheinenden genaueren Näherungswerthe können natürlich für sich als geeignetere Anfangswerthe angesehen werden.

Ist $\Delta' = 0$, so versagt die Regel, nach welcher der Anfangspunkt des Umlaufes für eine fest angenommene Abscisse $x_0$ auf der schwächer geneigten Curve liegt, denn links vom Schnittpunkte würde $\varphi'(x_0) < \psi'(x_0)$, dagegen rechts $\varphi'(x_0) > \psi'(x_0)$, wobei sich die Betrachtung selbstverständlich auf ein Gebiet bezieht, welches passend zu begrenzen ist und hier etwa als das durch die Achsenabschnitte $c$, $c$ bestimmte Quadrat in Frage kommen kann. Je näher man dem Schnittpunkte kommt, desto weniger unterscheidet sich der Umlauf von einem indifferenten. Die entsprechende ganz ungenügend convergirende Kettenfunction kommt aber gar nicht in Betracht, weil die Abscisse des Schnittpunktes auf andere Art ermittelt wurde. Ueberdies

* $\Delta'$ wird also genau nach denselben Regeln hergeleitet, wie die Discriminante $\Delta$, nur dass bei dieser $\varphi' = +\psi'$ ist.

sei bemerkt, dass wir in Abschnitt 3 auf den Fall ungenügender Convergenz zurückkommen und ihn durch Drehung des Coordinatensystems heben.

Zahlenbeispiel: $(n=5)$ $x^5+x-c=0$.

Die Coordinaten des kritischen Punktes sind:

$$x=\sqrt[4]{\frac{1}{5}}=0{,}668\,740\,3;\quad y=0{,}133\,748\,1,$$

wobei

$$c=0{,}802\,488\,4.$$

Für andere $c$ entscheidet das Vorzeichen von

$$\Delta'=5^5c^4-6^4=3125c^4-1296$$

darüber, welche Kettenfunction anzuwenden ist.

$\alpha$) Sei $c=10$; $\Delta'>0$, dann ergeben sich die Coordinaten der Brechpunkte des rechts drehenden Umlaufes aus folgender Tabelle:

| $x=\sqrt[5]{y}$ | $y=10-x$ |
|---|---|
| $x_0=0{,}000$ | $y_0=10{,}000$ |
| $x_1=1{,}585$ | $y_1=\ 8{,}415$ |
| $x_2=1{,}531$ | $y_2=\ 8{,}469$ |
| $x_3=1{,}533\,082$ | $y_3=\ 8{,}466\,918$ |
| $x_4=1{,}533\,010$ | $y_4=\ 8{,}466\,990$ |
| $x_5=1{,}533\,012\,8$ | $y_5=\ 8{,}466\,987\,2$ |
| $x_6=1{,}533\,012\,7$ | $y_6=\ 8{,}466\,987\,3$ |

Hierdurch ist nach drei einzelnen Umläufen die einzige reelle Wurzel von

$$x^5+x-10=0$$

bestimmt; sie hat den Werth

$$x=1{,}533\,012\,7$$

und ihre Genauigkeit reicht bis an die siebente Decimale.

Wegen der Beurtheilung des Fehlers beachte man, dass die zu lösende Gleichung

$$\varphi(x)-\psi(x)=0$$

nach Eintragung von

3) $$x_k=[\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)} \text{ resp.}$$

4) $$x_k=[\psi^{-1}\varphi x_0]^{(k)}$$

übergeht in

$$\psi[\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k-1)}-\psi[\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)}=y_{k-1}-y_k=\delta$$

resp. in

$$\varphi[\psi^{-1}\varphi x_0]^{(k)}-\varphi[\psi^{-1}\varphi x_0]^{(k-1)}=y_k-y_{k-1}=-\delta=\delta'.$$

Die Differenz $\delta$ der beiden zuletzt berechneten Ordinaten ist daher ein Maass für die Genauigkeit der ermittelten Abscisse (Wurzel). In obigem Beispiel wird

$$\delta=y_5-y_6=-0{,}000\,000\,1.$$

$\beta$) Sei $c = 0{,}2$; $\Delta' < 0$, dann ergeben sich die Coordinaten der Brechpunkte des links drehenden Umlaufes aus folgender Tabelle:

| $x = 0{,}2 - y$ | $y = x^5$ |
|---|---|
| $x_0 = 0{,}200$ | $y_0 = 0{,}000\,32$ |
| $x_1 = 0{,}199\,68$ | $y_1 = 0{,}000\,317\,4$ |
| $x_2 = 0{,}199\,682\,6$ | $y_2 = 0{,}000\,317\,5$ |

Hierdurch ist nach einem einzigen Umlauf die reelle Wurzel von

$$x^5 + x - 0{,}2 = 0$$

bestimmt; sie hat den Werth

$$x = 0{,}199\,682\,6$$

und ihre Genauigkeit reicht bis an die siebente Decimale. Der Fehler beträgt

$$\delta' = y_2 - y_1 = +\,0{,}000\,000\,1.$$

Untersuchen wir jetzt, unter welchen Umständen ein indifferenter Umlauf eintreten kann. Die Bedingung für einen solchen war

$$5)\qquad \varphi^{-1}\psi x_0 = \psi^{-1}\varphi x_0,$$

und weil für unser Beispiel

$$\varphi^{-1}\psi x_0 = \sqrt[n]{c - x_0}, \quad \psi^{-1}\varphi x_0 = c - x_0^n,$$

so wird

$$10)\qquad (c - x_0^n)^n = c - x_0.$$

Diese Gleichung vom Grade $n^2$ für $x_0$ fasst zunächst sämmtliche Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(x_0) - \psi(x_0) = 0$$

in sich, denn Nr. 5) reducirt sich auf die Identität $x_0 = x_0$, sobald $\varphi = \psi$. Hierin spricht sich nun das selbstverständliche Resultat aus: Wird der Anfangspunkt des Umlaufes in den Schnittpunkt der Curven $\varphi$ und $\psi$ verlegt, dann ist der Lauf indifferent; er hat sich zu einem Punkte verdichtet.

So genügt beispielsweise der Gleichung:

$$x^n + x - 2 = 0$$

$x = 1$, und dieser Werth wird, weil $\Delta' > 0$, durch die Kettenwurzel

$$x = \sqrt[n]{2 - \sqrt[n]{2 - \cdots \sqrt[n]{2 - x_0}}}$$

dargestellt. Unter den unendlich vielen Anfangswerthen, die man dem $x_0$ ertheilen kann, reducirt der Wurzelwerth $x_0 = 1$ augenblicklich die unendliche Kettenfunction auf $x = 1$.

Betrachten wir die Sache aber zuerst so, dass wir $x_0$ bestimmt annehmen und nach den zugehörigen Werthen von $c$ fragen. Sei $x_0 = 0$, *dann folgt* aus 10):

$$c^n = c,$$

und hier sind die reellen Wurzeln $c = 0$ und $c = \pm 1$, von denen aber nur $c = +1$ mit der Bedingung eines positiven $c$ verträglich ist.

In der That besteht jetzt der Umlauf in jenem Quadrat, welches durch die Achsenabschnitte 1 und 1 bestimmt ist (Fig. 9). Die Drehrichtung erscheint im Quadratenumfange natürlich unbestimmt, in den benachbarten Umläufen entspricht sie der Uhrzeigerbewegung. Denn da für jedes positive ganze $n$ immer $n^n > (n+1)^{n-1}$, so lautet das entscheidende Kriterium 7):

$$\Delta' = n^n - (n+1)^{n-1} > 0.$$

Eben deshalb hat man für die Schnittpunktsabscisse

$$11)\qquad x = \sqrt[n]{1 - \sqrt[n]{1 - \cdots \sqrt[n]{1 - x_0}}},$$

und diese Kettenwurzel oscillirt für $x_0 = 0$ (oder $x_0 = 1$) zwischen 0 und 1 hin und her. Setzt man dagegen für $x_0$ einen Werth zwischen 0 und 1, so tritt Convergenz ein. So ergiebt sich beispielsweise für $n = 5$; $x_0 = 0{,}5$ nach zwölf einzelnen Umläufen

$$x = 0{,}754\,877\,7,$$
$$y = 0{,}245\,122\,3$$

mit einer Genauigkeit bis an die siebente Decimale. Die Convergenz ist eine schwache, weil dieser Schnittpunkt nicht weit von dem früher bestimmten kritischen Punkte entfernt liegt. Wir kommen auf eine bequemere Berechnung in Abschnitt 3 zurück.

Für das Studium der Kettenfunctionen ist es nicht unwichtig, dass man auf alle indifferenten Umläufe achte. Die vorliegende, durch

$$y = x^n \quad \text{und} \quad y = 1 - x$$

definirte Kettenfunction besitzt für ungerade (positive) $n$ noch einen zweiten indifferenten Umlauf. Orientiren wir uns zunächst an einem Beispiel und setzen $n = 3$, dann lautet die Gleichung 10) zur Bestimmung des Anfangspunktes jener Umläufe

$$(1 - x^3)^3 = 1 - x,$$

das heisst

$$x^9 - 3x^6 + 3x^3 - x = 0,$$

wobei der Index von $x$ unterdrückt wurde. Dieses zerfällt nun in

$$x(x-1)(x^3 + x - 1)(x^4 + x^3 - 2x - 1) = 0.$$

Die ersten beiden Factoren bestimmen den schon bekannten quadratischen Umlauf; der nächste Factor bestimmt die Wurzeln der eigentlich zu Grunde liegenden Gleichung

$$x^3 + x - 1 = 0,$$

deren reelle Wurzel auf einen zu einem Punkte verdichteten Umlauf hinweist; es verbleibt daher $x^4 + 3x^3 - 2x - 1 = 0$,

und diese Gleichung besitzt, wie sich sogleich zeigen wird, ausser zwei complexen Wurzeln die beiden reellen:

$$x' = +1{,}153\,721\,3,$$
$$x'' = -0{,}535\,687\,2.$$

Thatsächlich ergeben sich diese Werthe, wenn wir einen rechts drehenden Umlauf ansetzen durch die Gleichungen

$$x = \sqrt[3]{y}, \quad y = 1 - x,$$

wobei als Anfangsabscisse ein Werth zu nehmen ist, der sicher ausserhalb des quadratischen Umlaufes (0; 1) liegt also etwa $x = -1$ oder $x = -0{,}5$.

Im ersten Falle nähert man sich dem gesuchten indifferenten Umlauf $(x'; x'')$ von aussen her, im zweiten von innen her (Fig. 11). Dass auch im zweiten Falle der gegen $(x'; x'')$ convergirende Umlauf rechts drehend ist, kann aus dem geometrischen Bild kaum ersehen werden, wir stellen daher die Coordinaten einiger Brechpunkte des erst nach elf Umläufen genügend convergirenden Laufes in folgender Tabelle zusammen.

| $x = \sqrt[3]{y}$ | $y = 1 - x$ |
|---|---|
| $x_0 = -0{,}500$ | $y_0 = +1{,}500$ |
| $x_1 = +1{,}145$ | $y_1 = -0{,}145$ |
| $x_2 = -0{,}525$ | $y_2 = +1{,}525$ |
| $x_3 = +1{,}151$ | $y_3 = -0{,}151$ |
| . . . . . . . | . . . . . . . |
| . . . . . . . | . . . . . . . |
| $x_{19} = +1{,}153\,721\,2$ | $y_{19} = -0{,}153\,721\,2$ |
| $x_{20} = -0{,}535\,687\,2$ | $y_{20} = +1{,}535\,687\,2$ |
| $x_{21} = +1{,}153\,721\,3$ | $y_{21} = -0{,}153\,721\,3$ |
| $x_{22} = -0{,}535\,687\,2$ | $y_{22} = +1{,}535\,687\,2$ |

Die Coordinaten der Brechpunkte des indifferenten Umlaufes $(x'; x'')$ sind daher

$$x' = +1{,}153\,721\,3, \quad y' = +1{,}535\,687\,2,$$
$$x'' = -0{,}535\,687\,2, \quad y'' = -0{,}153\,721\,3$$

und man bemerke, dass

$$x' - x'' = y' - y'' = 1{,}689\,408\,5,$$

woraus zu schliessen ist, dass auch der zweite indifferente Umlauf $(x'; x'')$ quadratisch ist. Das vorliegende Beispiel zeigt, wie die gegen zwei feste Werthe oscillirende Kettenfunction gleichzeitig **zwei** Wurzeln einer Gleichung zu bestimmen vermag.

Würde man die inverse Kettenfunction, welche durch

$$x = 1 - y, \quad y = x^3$$

definirt ist, benutzen, so durchliefe man die soeben betrachteten Umläufe rückwärts. Der erste, dessen Anfangsabscisse $x = -1$ war, divergirt links drehend, wie man sofort sieht, ausserordentlich stark. Der zweite, dessen

Anfangsabscisse $x = -0{,}5$ war, convergirt links drehend gegen den indifferenten Umlauf (0; 1). — Endlich, um alle Fälle zu erledigen, sei hinzugefügt, dass ein links drehender im Innern des Quadrates (0; 1) beginnender Umlauf gegen (0; 1) convergirt, dass dagegen ein ebendort beginnender rechts drehender Umlauf, der wieder mittelst

$$x = \sqrt[3]{y}, \quad y = 1 - x$$

anzusetzen wäre, dem einzig vorhandenen reellen Schnittpunkt der Curven $\varphi$ und $\psi$ zustrebt und dessen Coordinaten zu

$$x^0 = 0{,}682\,327\,8 \quad (x_0 = 0{,}5)$$
$$y^0 = 0{,}317\,672\,2$$

ergiebt.

Um die letzten Betrachtungen allgemeiner zu fassen, kehren wir noch einmal zu der Gleichung

$$5) \qquad \varphi^{-1}\psi x = \psi^{-1}\varphi x$$

zurück. Dieselbe ergiebt, wie wir sahen, ausser den sämmtlichen Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(x) - \psi(x) = 0$$

auch alle jenen $x$, welche den Anfangspunkt eines einfachen* indifferenten Umlaufes bestimmen. Offenbar können wir alle Fragen unter einen Gesichtspunkt bringen, wenn wir die Schnittpunkte der beiden Curven

$$12) \qquad \eta = \varphi^{-1}\psi x = \Psi(x) \quad \text{und} \quad \eta = \psi^{-1}\varphi x = \Phi(x)$$

aufsuchen. Obwohl jetzt complicirtere geometrische Bilder entstehen, so bleiben doch die Kettenfunctionen die alten, nämlich

$$3) \qquad x_k = [\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)}$$

und

$$4) \qquad x_k = [\psi^{-1}\varphi x_0]^{(k)}.$$

Sollen für unser Beispiel

$$y = x^n = \varphi, \quad y = c - x = \psi \quad (n \text{ ungerade})$$

ausser dem Schnittpunkt auch die Anfangsabscissen der indifferenten Umläufe bestimmt werden, so ermittele man die reellen Schnittpunkte der beiden parabolischen Curven

$$\eta = \sqrt[n]{c - x} = \Psi, \quad \eta = c - x^n = \Phi. \quad (c = 1).$$

Diese beiden Curven sind der früheren Parabel $\varphi$ congruent, und ihre Lagenverhältnisse erkennt man aus Figur 12 und 13. Es sind fünf reelle Schnittpunkte vorhanden, und diese werden — ganz dem vorigen Ansatz entgegengesetzt — sämmtlich durch Anläufe erreicht.

Speciell für $c = 1$, wie auch in Fig. 12 angenommen ist, findet man:

1. Zwei Schnittpunkte mit den Coordinaten 0; 1 und 1; 0. Diese entsprechen dem früheren indifferenten Umlauf (0; 1).

* „Einfach" bedeutet hier: Nach einer Umdrehung in sich zurückkkehrend.

2. Zwei Schnittpunkte mit den Coordinaten $x'$; $\eta'$ und $x''$; $\eta''$. Diese entsprechen dem früheren indifferenten Umlauf ($x'$; $x''$).
3. Ein Schnittpunkt mit den Coordinaten $x^0$; $\eta^0$. Dieser entspricht dem früheren Schnittpunkte $x^0$; $y^0$.

Da nur Anläufe vorkommen, besteht kein Zweifel darüber, dass die Anfangspunkte der Läufe, welche nach den Punkten ($x^0$; $\eta^0$), ($x'$; $\eta'$), ($x''$; $\eta''$) zustreben, auf der Curve $\Psi$ gelegen sind. Für die Abscissen dieser drei Punkte gilt daher die convergente Kettenentwickelung

$$x_k = [\Phi^{-1}\Psi x_0]^{(k)} = \sqrt[n]{1 - \sqrt[n]{1 - \cdots \sqrt[n]{1 - x_0}}},$$

wobei etwa folgende drei Anfangswerthe für $x_0$ in Betracht kommen:

$$x_0 = 0{,}5, \quad x_0 = 1{,}2, \quad x_0 = -0{,}5.$$

Man vergleiche die vorhin genau angegebenen Werthe von $x^0$, $x'$ und $x''$, welche jene Anfangswerthe rechtfertigen und welche durch die letzte Kettenwurzel in der That reproducirt werden. Die besonderen Zahlen beziehen sich auf den Fall $n = 3$. Durch die inverse Kettenfunction mit den Anfangswerthen $x_0 = 0{,}5$ resp. $x_0 = 0{,}7$ (dieselben liegen, wie nöthig, auf verschiedenen Seiten von $x^0$) würde man die Abscissen $x = 0$ resp. $x = 1$ bestimmen, wenn solches überhaupt erforderlich wäre. — Man beachte noch, dass infolge der symmetrischen Lage der Parabeln (Fig. 12) ganz allgemein die Beziehungen

$$x' = \eta'' = 1 - y'' \quad \text{und} \quad x'' = \eta' = 1 - y'$$

stattfinden, so dass immer

$$x' - x'' = y' - y'',$$

also der Umlauf ($x'$; $x''$) ein quadratischer ist.

Schwieriger liegt die Sache, wenn $c \gtrless 1$. In diesem Falle hat man zu untersuchen, für welche Werthe von $c$ die Curven $\Phi$ und $\Psi$ zur Berührung kommen, womit entschieden wird, ob ein oder drei oder fünf Schnittpunkte und dementsprechend kein oder ein oder zwei indifferente Umläufe zwischen $\varphi$ und $\psi$ vorhanden sind. Sei $n = 3$, so ergiebt die Rechnung, dass für

$$c = \frac{4}{9}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad c = \frac{4}{9}\sqrt{6}$$

Berührung eintritt. Im ersten Falle haben sich die früheren Punkte (0; 1), ($x^0$; $\eta^0$) und (1; 0) zu einem einzigen zusammengezogen. In diesem Punkte durchsetzen sich die Curven, es findet eine Berührung zweiter Ordnung statt, und er entspricht dem kritischen Punkt des Curvensystems $\varphi$, $\psi$ (mit supplementarem Schnitt). Zwischen $\varphi$ und $\psi$ existirt jetzt nur noch ein indifferenter Umlauf. — Im zweiten Falle haben sich die früheren Punkte (0; 1) und ($x''$; $\eta''$) einerseits und (1; 0) und ($x'$; $\eta'$) andererseits zu einem Punkte zusammengezogen. Mithin findet zwischen $\varphi$ und $\psi$ abermals nur ein indifferenter Umlauf statt (Quadrat mit der

Seite $\sqrt{2}$), und innerhalb desselben verbleibt der Schnittpunkt $(x^0;\ y^0)$. Diese Bemerkungen behalten ihre Giltigkeit auch für jedes andere positive ganze ungerade $n$; nur die numerischen Werthe von $c$ ändern sich. Hervorgehoben sei: Anläufe zwischen Curven, welche eine Berührung zweiter Ordnung eingehen, convergiren in der Nähe des Berührungspunktes ebenso unvollkommen, als Umläufe in der Nähe eines supplementaren Schnittes.

Ganz im Allgemeinen steht fest, dass bei obiger Untersuchung nur drei wesentlich verschiedene Fälle eintreten können, von denen die zwei erwähnten Grenzfälle bilden. Immer wird sich ein Anfangswerth $x_0$ so angeben lassen*, dass man den gesuchten Schnittpunkt $(x^0;\ \eta^0)$ durch einen Anlauf, also $(x^0;\ y^0)$ durch einen Umlauf erreichen kann. Nur dann, wenn in $(x^0,\ \eta^0)$ eine Berührung höherer Ordnung oder in $(x^0;\ y^0)$ ein supplementarer Schnitt eintritt, ist das Verfahren unzureichend, aber auch überflüssig.

Ist $n$ gerade, so kann höchstens ein indifferenter Umlauf vorkommen.

Betrachtung der Form

$$\text{II)}\qquad x^n - x - c = 0 \quad (n \text{ ungerade}).$$

Wir zerfällen dieselbe in

$$y = x^n = \varphi \quad \text{und} \quad y = c + x = \psi,$$

dann stellt $y = \varphi$ dieselbe Parabel wie früher dar, während die Gerade $y = \psi$ jetzt auf der negativen Abscissenachse und positiven Ordinatenachse die gegebene Strecke $c$ abschneidet (Fig. 14 u. 15). Weil $\frac{d\varphi}{dx} = nx^{n-1}$ und $\frac{d\psi}{dx} = 1$ immer positiv ist, so kommen hier nur Anläufe vor.

Die Stelle, wo für ein gewisses $c > 0$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\psi}{dx}$$

wird, also Berührung stattfindet, ist bestimmt durch

$$nx^{n-1} = 1,$$

das heisst

$$x = -\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

und das betreffende $c$, welches diesen Fall veranlasst, ist

$$\text{13)}\qquad c = (n-1)n^{-\frac{n}{n-1}}.$$

Dementsprechend wird die Discriminante der trinomischen Gleichung II)

$$\text{14)}\qquad \Delta = n^n c^{n-1} - (n-1)^{n-1},$$

und wir haben für:

* Insbesondere ist der Anfangswerth $x_0 = 0$ zulässig, so lange $c < (n+1)n^{-\frac{n}{n-1}}$ oder $c > 1$; liegt aber $c$ zwischen diesen Grenzen, so übersehe man den indifferenten Umlauf nicht, der den Schnittpunkt $(x^0,\ y^0)$ möglicherweise sehr eng umschliessen kann. Ein stets passender Anfangswerth ist die Abscisse des kritischen Punktes $x_0 = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

$\Delta > 0$ einen reellen Schnittpunkt (Fig. 14),

$\Delta < 0$ drei reelle Schnittpunkte (Fig. 15).

Die Schnittpunktsabscisse des Punktes $\alpha$, welche positiv ist, wird unter allen Umständen durch einen Anlauf erreicht, der etwa im Coordinatenanfang beginnt ($x_0 = 0$), und er ist durch die aus den Gleichungen

$$x = \sqrt[n]{y}, \quad y = c + x$$

hervorgehende Kettenwurzel:

$$15) \qquad x_k = [\varphi^{-1}\psi x_0]^{(\,)} = \sqrt[n]{c + \sqrt[n]{c + \cdots + \sqrt[n]{c + x_0}}} \qquad (x_0 = 0)$$

bestimmt.

Durch dieselbe Kettenwurzel ergiebt sich auch die (negative) Abscisse des Schnittpunktes $\beta$. Der Anlauf beginnt auf $\psi$ und zwar entweder zwischen den Punkten $\beta$ und $\gamma$ oder auch unterhalb des Punktes $\beta$. Im ersten Fall kann man ohngefähr $x_0 = -\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ wählen, im zweiten $x_0 = -1$, weil die negativen Wurzeln der Gleichung II) sicher echte Brüche sind. Der dritte Schnittpunkt $\gamma$ wird durch einen Anlauf erreicht, der auf $\varphi$ beginnt, daher ist seine Abscisse durch die inverse Kettenentwickelung (Kettenpotenz)

$$16) \qquad x_k = [\psi^{-1}\varphi x_0]^{(k)}$$

bestimmt.

Als Anfangsabscisse wählt man hier $x_0 = 0$ oder $x_0 = -c$ oder auch, falls man zwischen $\beta$ und $\gamma$ beginnen will, $x_0 = -\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Ist $\Delta = 0$, so ändert sich in der Rechnung nichts wesentliches. Die Abscisse von $\alpha$ wird nach wie vor mittelst der Kettenwurzel 15) bestimmt; für die Abscisse von $\beta$ resp. $\gamma$ sind beide Entwickelungen

$$x_k = [\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)}, \quad (x_0 = -1)$$

und

$$x_k = [\psi^{-1}\varphi x_0]^{(k)}, \quad (x_0 = 0)$$

gleichzeitig convergent und liefern den bereits bekannten Werth.

Zahlenbeispiele: $(n = 5)$ $x^5 - x - c = 0$.

Die Coordinaten des Berührungspunktes sind

$$x = -\sqrt[4]{\frac{1}{5}} = -0{,}668\,470\,3; \quad y = -0{,}133\,748\,1,$$

wobei

$$c = 0{,}534\,992\,2;$$

für die Discriminante findet man

$$\Delta = 5^5 c^4 - 4^4 = 3125\,c^4 - 256.$$

$\alpha_0$) Sei $c = 10$; $\Delta > 0$, dann ergeben sich die Coordinaten der Brechpunkte des auf der Geraden beginnenden Anlaufes aus folgender Tabelle:

| $x = \sqrt[5]{y}$ | $y = 10 + x$ |
|---|---|
| $x_0 = 0{,}000$ | $y_0 = 10{,}000$ |
| $x_1 = 1{,}585$ | $y_1 = 11{,}585$ |
| $x_2 = 1{,}632$ | $y_2 = 11{,}632$ |
| $x_3 = 1{,}633\,550$ | $y_3 = 11{,}633\,550$ |
| $x_4 = 1{,}633\,587\,8$ | $y_4 = 11{,}633\,587\,8$ |
| $x_5 = 1{,}633\,588\,9$ | $y_5 = 11{,}633\,588\,9$ |
| $x_6 = 1{,}633\,588\,9$ | $y_6 = 11{,}633\,588\,9$ |

Die einzige reelle Wurzel der Gleichung

$$x^5 - x - 10 = 0$$

ist also

$$x = 1{,}633\,588\,9$$

und der Fehler beträgt

$$\delta = y_4 - y_5 = \pm\,0{,}000\,000\,0,$$

das heisst, er könnte erst in der achten Decimale constatirt werden.

$\alpha$) Sei $c = 0{,}2$; $\Delta < 0$, dann sind drei Schnittpunkte vorhanden. Für den Schnittpunkt $\alpha$, dessen Abscisse stets positiv und $> 1$ ist, setze man $x_0 = 1$, dann ergeben sich die Coordinaten der übrigen Brechpunkte wie folgt:

| $x = \sqrt[5]{y}$ | $y = 0{,}2 + x$ |
|---|---|
| $x_0 = 1{,}000$ | $y_0 = 1{,}200$ |
| $x_1 = 1{,}037$ | $y_1 = 1{,}237$ |
| $x_2 = 1{,}043\,4$ | $y_2 = 1{,}243\,4$ |
| $x_3 = 1{,}044\,5$ | $y_3 = 1{,}244\,5$ |
| $x_4 = 1{,}044\,72$ | $y_4 = 1{,}244\,72$ |
| $x_5 = 1{,}044\,755$ | $y_5 = 1{,}244\,755$ |
| $x_6 = 1{,}044\,760\,5$ | $y_6 = 1{,}244\,760\,5$ |
| $x_7 = 1{,}044\,761\,4$ | $y_7 = 1{,}244\,761\,4$ |
| $x_8 = 1{,}044\,761\,6$ | $y_8 = 1{,}244\,761\,6$ |

Die positive reelle Wurzel der Gleichung

$$x^5 - x - 0{,}2 = 0,$$

ist also

$$x' = 1{,}044\,761\,6$$

und der Fehler beträgt

$$\delta = y_7 - y_8 = -\,0{,}000\,000\,2.$$

**$\beta$) Für den Schnittpunkt $\beta$, dessen Abscisse negativ ist, ergiebt sich, falls mit $x_0 = -1$ begonnen wird:**

| $x = \sqrt[5]{y}$ | $y = 0{,}2 + x$ |
|---|---|
| $x_0 = -1{,}000$ | $y_0 = -0{,}800$ |
| $x_1 = -0{,}956$ | $y_1 = -0{,}756$ |
| $x_2 = -0{,}945\,7$ | $y_2 = -0{,}745\,7$ |
| $x_3 = -0{,}942\,9$ | $y_3 = -0{,}742\,9$ |
| $x_4 = -0{,}942\,32$ | $y_4 = -0{,}742\,32$ |
| $x_5 = -0{,}942\,145$ | $y_5 = -0{,}742\,145$ |
| $x_6 = -0{,}942\,101$ | $y_6 = -0{,}742\,101$ |
| $x_7 = -0{,}942\,090\,7$ | $y_7 = -0{,}742\,090\,7$ |
| $x_8 = -0{,}942\,087\,8$ | $y_8 = -0{,}742\,087\,8$ |
| $x_9 = -0{,}942\,087\,1$ | $y_9 = -0{,}742\,087\,1$ |
| $x_{10} = -0{,}942\,086\,9$ | $y_{10} = -0{,}742\,086\,9$ |

$$\delta = y_9 - y_{10} = -0{,}000\,000\,2.$$

$\gamma$) Für den Schnittpunkt $\gamma$, dessen Abscisse ebenfalls negativ ist, giebt sich, falls mit $x_0 = 0$ begonnen wird:

| $x = y - 0{,}2$ | $y = x^5$ |
|---|---|
| $x_0 = -0{,}000$ | $y_0 = -0{,}000$ |
| $x_1 = -0{,}200$ | $y_1 = -0{,}000\,32$ |
| $x_2 = -0{,}200\,32$ | $y_2 = -0{,}000\,322\,5_6$ |
| $x_3 = -0{,}200\,322\,5_6$ | $y_3 = -0{,}000\,322\,5_7$ |

$$\delta' = y_3 - y_2 = -0{,}000\,000\,0_1.$$

Die negativen Wurzeln der Gleichung

$$x^5 - x - 0{,}2 = 0$$

sind demnach

$$x'' = -0{,}942\,086\,9 \quad \text{und} \quad x''' = -0{,}200\,322\,6.$$

### 3. Ueber die Steigerung der Convergenz.

Die Betrachtung der geometrischen Bilder für die Kettenfunctio[n] zeigt, dass der Schnittpunkt der Curven bisweilen erst nach Ueberschreit[ung] einer erheblich grossen Anzahl von Brechpunkten mit brauchbarer [An]näherung erreicht wird. Das Extrem einer ungenügenden Convergenz [ist] beispielsweise ein indifferenter Umlauf, aber auch bei Anläufen kann [die] Convergenz sehr zu wünschen übrig lassen. Im Allgemeinen ist das V[or]dringen zum Schnittpunkt ein asymptotisches, das heisst, die Läufe [sind] unendlich oft gebrochen; immerhin kann man bei passender Fortschreitu[ngs]-*richtung* dem Schnittpunkte oft nach wenigen einzelnen Zügen beträcht[lich]

nahe kommen. Diese Fortschreitungsrichtung ist durch das Coordinatensystem bedingt und kann durch Drehung desselben abgeändert werden.

Drehen wir die positive Abscissenachse $OX$ entweder im positiven Sinn (Fig. 16 u. 18) oder auch im negativen Sinn (Fig. 17 u. 19) um den Winkel $\alpha$, bis sie in die Lage $OU$ kommt, so gelten folgende Transformationsgleichungen:

$$x = u \cos\alpha, \quad y = u \sin\alpha + v,$$

das heisst:

17)
$$y = \varrho x + v,$$

wobei

$$\varrho = tg\,\alpha.$$

An Stelle der Curvengleichungen $y = \varphi(x)$ und $y = \psi(x)$ treten die anderen

$$v = \varphi(x) - \varrho x = \Phi(x) \quad \text{und} \quad v = \psi(x) - \varrho x = \Psi(x),$$

und hier kann $\varrho$ so gewählt werden, dass die Convergenz erheblich steigt. In der That giebt es ein $\varrho$, für welches der in $(x_0, y_0)$ auf $\psi$ beginnende Lauf den Schnittpunkt $(x', y')$ sofort erreicht, nämlich:

$$\varrho = \frac{y' - y_0}{x' - x_0};$$

aber dieser Werth ist von vornherein ebenso wenig bekannt, als die Schnittpunktscoordinaten selbst. Man muss sich also zunächst damit begnügen, einen ohngefähr passenden Werth für $\varrho$ auszuwählen; zur genauen Bestimmung von $x'$ dient die Kettenfunction.

Die Curven $v = \Phi$ und $v = \Psi$ können von Neuem auf ein rechtwinkliges System bezogen werden, so dass unsere früheren Betrachtungen ohne Weiteres Geltung behalten. Wenn für den Schnittpunkt der Curven $\psi$ und $\varphi$ die Gleichung

a)
$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dx} = 0$$

erfüllt ist, so waren die Umläufe in der Nähe des Schnittpunktes beinahe indifferent. Dieselbe Bedingung für die Curven $\Phi$ und $\Psi$ (auf rechtwinklige Coordinaten bezogen) lautet:

b)
$$\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dx} = 0,$$

das heisst

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dx} = 2\varrho \quad (\varrho \gtrless 0).$$

Die Bedingungen a) und b) widersprechen sich also, das heisst:

> Werden die Umläufe in der Nähe des Schnittpunktes der Curven $\varphi$ und $\psi$ indifferent, so werden sie es sicher nicht für die Curven $\Phi$ und $\Psi$.

Weiter überzeuge man sich am geometrischen Bilde, sowie an den früher aufgestellten analytischen Kriterien, dass man in dem disponiblen $\varrho$ ein Mittel besitzt, das Vorzeichen von $\frac{d\Phi}{dx}$ und $\frac{d\Psi}{dx}$ für ein bestimmtes $x$ zu reguliren,

das heisst: Man kann der Abscissenachse immer eine solche Lage ertheilen, dass nach Belieben ein Anlauf oder ein Umlauf erscheint. Ebenso sei bemerkt, dass man das Vorzeichen von $\Delta'$ (vergl. Abschnitt 2) in der Hand hat, das heisst: Man kann bewirken, dass der Umlauf sich nach Belieben rechts oder links dreht, oder anders gesagt: Man kann vorschreiben, auf welcher Curve der Lauf beginnen soll; und das ist für das Folgende sehr wichtig.

Hingegen ist $\varrho$ ohne Einfluss auf die Bedingung

c) $$\frac{d\Phi}{dx} - \frac{d\Psi}{dx} = 0,$$

denn selbstverständlich kann die Coordinaten-Transformation an etwa eintretender Berührung der Curven nichts ändern. — So lange aber Berührung nicht statt hat, existiren im Schnittpunkte zwei getrennte Tangenten an beide Curven, und es mag dem geneigten Leser überlassen bleiben, sich darüber zu orientiren, wie die Lage der Abscissenachse zu wählen ist, damit der eine oder der andere der soeben erwähnten Fälle eintritt.

Dagegen müssen wir eine andere Angelegenheit noch erörtern. Die Darstellung der Kettenfunction verlangt, dass mindestens eine der Functionen $\Phi$ oder $\Psi$ invers angeschrieben werden kann. Dies ist aber nur möglich, wenn eine der Functionen $\varphi$ oder $\psi$ linear, höchstens quadratisch ist; in allen anderen Fällen würde die Rechnung weitläufig, meistens sogar unausführbar. Wir setzen daher von jetzt ab voraus, dass

$$\psi = ax + b,$$

mithin

$$v = \Psi(x) = (a - \varrho)x + b,$$

das heisst

$$x = \frac{v - b}{a - \varrho} = \Psi^{-1}(v).$$

Uebrigens führt das keine Einschränkung herbei, weil die zu lösende Gleichung

$$\varphi(x) - ax - b = 0$$

so allgemein bleibt, wie die Function $\varphi$ selbst.

Indem nun auf die Umkehrbarkeit von $\Phi$ verzichtet wird, muss der Anfangspunkt des convergirenden Laufes stets auf die Curve $\varphi$ verlegt werden, **nicht** auf die Gerade $\psi$. Der Lauf geht dann unter schiefer Abscissenrichtung nach $\psi$, von da in (verticaler) Ordinatenrichtung wieder nach $\varphi$ u. s. f. — Man vergl. Fig. 16 und 18 und ersetze in selbigen $\psi$ durch eine Gerade.

Die convergente Kettenfunction ist jetzt ausschliesslich definirt durch

$$x = \frac{v - b}{a - \varrho} = \Psi^{-1}(v), \quad v = \varphi(x) - \varrho x = \Phi(x),$$

das heisst

18) $$x_k = [\Psi^{-1}\Phi x_0]^{(k)}.$$

Statt der Abscissenachse könnte auch die Ordinatenachse gedreht werden; doch kommt das nur auf eine Vertauschung der Rollen von $\varphi$ und $\psi$ mit

$\varphi^{-1}$ resp. $\psi^{-1}$ hinaus. Beide Achsen zu drehen ist ebenso überflüssig als in der Rechnung undurchführbar.

Zahlenbeispiel: $x^5 + x - 1 = 0.$

Wir zerlegten bereits in Abschnitt 2 diese Gleichung in

$$y = x^5 = \varphi, \quad y = 1 - x = \psi$$

und sahen, dass die Kettenwurzel $x_k = [\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)}$ für $x_0 = 0$ einem völlig indifferenten, für $x_0 = 0{,}5$ einem sehr schwach convergirenden Umlaufe entsprach. Transformiren wir daher obige Curvengleichungen mittelst

$$17) \qquad y = \varrho x + v, \quad \varrho = tg\,\alpha,$$

so entsteht

$$v = x^5 - \varrho x = \Phi(x) \quad \text{und} \quad x = \frac{1 - v}{1 + \varrho} = \Psi^{-1}(v).$$

Als Anfangsabscisse wählen wir auf Grund der früheren Angabe $x_0 = 0{,}75$; das ist also ein Werth, welcher sich sehr bald bei der gewöhnlichen Kettenentwickelung einstellt, dessen Verbesserung auf sieben geltende Decimalen aber nur langsam von statten geht. Da der Punkt $(x_0; y_0)$ den gesuchten Schnittpunkt $(x; y)$ immerhin nahe liegt, so drehen wir die Abscissenachse zweckmässig parallel der Tangente*, welche im Punkte $(x_0; y_0)$ an die Curve $\varphi$ gelegt wird und erhalten

$$\varrho = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x = x_0} = 5x_0^4 \doteqdot 1{,}6,$$

das heisst

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_{x = x_0} = 0.$$

Die Tabelle zur Berechnung der genaueren Schnittpunktscoordinaten ist hiernach:

| $x = \frac{1 - v}{2{,}6}$ | $v = x^5 - 1{,}6x$ |
|---|---|
| $x_0 = 0{,}750$ | $v_0 = -0{,}962\,695$ |
| $x_1 = 0{,}754\,882\,8$ | $v_1 = -0{,}962\,681\,8$ |
| $x_2 = 0{,}754\,877\,7$ | $v_2 = -0{,}962\,681\,9$ |

Der Fehler beträgt $\delta' = v_2 - v_1 = 0{,}000\,000\,1$

und die einzige reelle Wurzel von

$$x^5 + x - 1 = 0$$

ist, wie früher angegeben,

$$x = 0{,}754\,877\,7.$$

Bisweilen wird $\psi$ erst nach Anwendung einer geeigneten Substitution *linear*. Nehmen wir als Beispiel die allgemeine trinomische Gleichung:

---

* Man wird jetzt auch die Ursache der schnellen Convergenz in den Beispielen auf Seite 330 und 338 erkennen.

19) $$z^n + az^p + b = 0 \quad (n > p),$$

in welcher $n$ und $p$ ganze positive Zahlen bezeichnen, die zu einander relativ prim seien. Dieselbe lässt sich mittelst

$$z = a^{\frac{1}{n-p}} x \quad \text{und} \quad b = a^{\frac{n}{n-p}} c$$

auf vier Normalformen reduciren und zwar, wenn $n$ und $p$ gleichzeitig ungerade sind, auf

$$x^n + x^p - c = 0,$$
$$x^n - x^p - c = 0$$

und, wenn $n$ gerade, $p$ ungerade ist, auf

$$x^n - x^p + c = 0,$$
$$x^n - x^p - c = 0,$$

wobei $c$ immer positiv ist. Vergl. die analoge Darstellung für $p = 1$ (Abschnitt 2). Der Fall eines geraden $p$ lässt sich völlig ausschliessen durch die Substitution $x = \frac{c^{\frac{1}{p}}}{u}$, weil vermöge derselben $n - p$ an Stelle von $p$ tritt, und etwaige Abweichungen betreffs der Vorzeichen lassen sich durch die Vertauschung von $x$ mit $-x$ vermeiden. Die Untersuchung hat sich daher mit den Parabeln

$$y = x^n \text{ und resp. } y = c - x^p \text{ oder } y = c + x^p \text{ oder } y = x^p - c$$

zu beschäftigen.

Im Falle ungenügender Convergenz setze man $x^p = \xi$, dann treten statt obiger Curven die folgenden auf:

$$y^p = \xi^n \text{ und resp. } y = c - \xi \text{ oder } y = c + \xi \text{ oder } y = \xi - c.$$

Man erreicht hiermit, wie verlangt, dass immer die eine der Curven, nämlich $\psi$, eine Gerade vorstellt. Was die Parabel $y = \xi^{\frac{n}{p}}$ anlangt, so überzeugt man sich, dass sie sich in der äusseren Erscheinung von einer Parabel $y = x^n$ nur dadurch unterscheidet, dass sie weniger steil ansteigt als letztere. Man kann daher die Curvenbilder in Figur 8—15 zu einer ersten Orientirung benutzen. Etwas anders würden die Betrachtungen, wenn wir für $p$ gerade Zahlen zulassen wollten. Die Parabel verläuft dann nur auf einer Seite der Ordinatenachse und besitzt im Coordinatenanfang eine Spitze.

Fügen wir noch hinzu, dass die logarithmischen Gleichungen

$$\log z + az^p + b = 0,$$

resp.

$$v + ae^{pv} + b = 0 \quad (e = \textit{bas log nat})$$

stets in die Normalformen

$$\log x \pm mx = 0 \quad \text{oder auch} \quad \log x \pm x \pm c = 0$$

transformirt werden können und sich dann unseren Betrachtungen gut anpassen (Fig. 5).

Als Uebungsbeispiel sei auf die Gleichungen

$$\eta = c - x^n, \quad \eta^n = c - x$$

hingewiesen, welche in Abschnitt 2 zur Bestimmung der indifferenten Umläufe dienten. Nachdem hier $\eta^n = \eta_1$ gesetzt ist, kann die Drehung der Abscissenachse leicht vorgenommen werden, und dann ergiebt sich $x$ weit schneller als in der auf Seite 332 mitgetheilten Tabelle.

## 4. Die Formel von Newton. — Differenzengleichungen.

Nachdem wir uns im vorigen Abschnitte dahin verständigt hatten, dass $y = \psi$ als beliebige Gerade eingeführt werde, gehen wir jetzt noch einen Schritt weiter und setzen $\psi = 0$. Wir betrachten also die Schnitte der Curve $y = \varphi$ mit der $X$-Achse, das heisst, wir suchen die reellen Wurzeln der Gleichung $\varphi = 0$.

In diesem Falle ergiebt eine Drehung der $X$-Achse um $\alpha$ Folgendes:

$$x = -\frac{v}{\varrho}, \quad v = \varphi(x) - \varrho x \quad (\varrho = tg\,\alpha),$$

und man kann nun die Abscissenrichtung nach und nach zweckmässig abändern, so nämlich, dass sie mit der Richtung der Tangenten übereinstimmt, welche in den aufeinander folgenden Brechpunkten an $\varphi$ gezogen werden (Fig. 20). Bezeichnen $x_k$ und $x_{k+1}$ zwei sich folgende Abscissen des Anlaufes an $\varphi$, $v_k$ und $v_{k+1}$ die zugehörigen Ordinaten, so ist

$$v_k = \varphi(x_k) - \varrho_k x_k, \quad \varrho_k = \varphi'(x_k), \quad x_{k+1} = -\frac{v_k}{\varrho_k},$$

mithin

$$x_{k+1} = -\frac{\varphi(x_k) - x_k \varphi'(x_k)}{\varphi'(x_k)},$$

oder

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\varphi(x_k)}{\varphi'(x_k)},$$

wo $\varphi'$ die Ableitung von $\varphi$ nach $x$ bedeutet.

Hiermit gelangen wir zur Newton'schen Näherungsformel, die eben nichts anderes als eine Kettenentwickelung definirt. Nun könnte es scheinen, als ob unser früherer Kettenansatz ein erster und unvollkommener Schritt zu einer Näherungsmethode sei, welche schliesslich einer Verbesserung fähig wird und auf die von Newton hinausläuft. Aber man darf nicht verkennen, dass eine einfache Kettenfunction — und nur solche sind gemeint — an sich ein so elementares Gebilde darstellt, dass dieses einer analytischen wie geometrischen Betrachtung wohl werth ist. Uebrigens zeigt sich in der Analysis, z. B. bei der elementaren Berechnung von $\pi$, dass man auf einfache Kettenfunctionen, selbst wenn sie schwach convergiren, keinesfalls verzichten kann.

In der Theorie der Differenzengleichungen, die wir nur ganz beiläufig streifen wollen, wird die Kettenfunction:

$$x_u = f^{(u)}(x_0), \quad x_0 = const.$$

betreffs ihrer Abhängigkeit von $u$ studirt resp. als Integral der Gleichung

$$x_{u+1} = f(x_u)$$

angesehen. Dort werden im Allgemeinen dem $u$ nicht mehr ganz positive Zahlwerthe beigelegt, und es erwächst die Aufgabe, die letzte Gleichung durch solche Functionen zu integriren, welche für jedes $u$ Geltung haben. Gelingt es, eine solche Function in endlicher Form ausfindig zu machen, so ist diese für ganze positive $u$ nach gehöriger Bestimmung der periodischen Constanten zugleich ein endlicher (geschlossener) Ausdruck für die unendliche Kettenentwickelung.

Ein Beispiel hierzu bildet die Differenzengleichung

$$x_{u+1}^2 = 2 + x_u,$$

welcher augenscheinlich

$$x_u = \underset{(1)}{\sqrt{}}\,2 + \underset{(2)}{\sqrt{}}\,2 + \underset{(3)}{\sqrt{}}\,2 + \cdots \underset{(u)}{\sqrt{}}\,2 + x_0$$

genügt. Die Indices (1), (2), ... ($u$) zeigen die Anzahl der vorhandenen Wurzelzeichen an, und man wolle bemerken, dass hier von einer Abänderung der Kettenfunction (Verstärkung der Convergenz) nicht die Rede sein kann. Die Form ist c h a r a k t e r i s t i s c h. Andererseits genügt obiger Gleichung auch, wie leicht zu prüfen,

$$x_u = 2\cos(k \,.\, 2^{-u}), \quad k = period.\ Const.$$

Setzt man den Werth von $x_0$ fest, $x_0 = 0$, so muss sich die periodische Constante $k$ so ausmitteln lassen, dass die beiden für $x_u$ gewonnenen Functionen coincidiren. Für $u = 1$ ergiebt sich

$$x_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{k}{2},$$

das heisst

$$k = \frac{\pi}{2}.$$

Wir gelangen mithin zu der bekannten Formel:

$$x_u = \underset{(1)}{\sqrt{}}\,2 + \underset{(2)}{\sqrt{}}\,2 + \ldots \underset{(u)}{\sqrt{}}\,2 = 2\cos(\pi \,.\, 2^{-(u+1)}).$$

Hierbei ist über $\pi$ nur so viel vorausgesetzt, dass $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, das heisst, dass $\pi$ der halbe Umfang eines Kreises vom Radius 1 ist. Will man $\pi$ numerisch feststellen, so bilde man

$$2^{u+1} \,.\, \sqrt{2 - \underset{(1)}{\sqrt{}}\,2 + \underset{(2)}{\sqrt{}}\,2 + \cdots \underset{(u)}{\sqrt{}}\,2} = 2^{u+1} \,.\, \sqrt{2 - 2\cos(\pi \,.\, 2^{-(u+1)})}$$
$$= 2^{u+2}\sin(\pi \,.\, 2^{-(u+2)}).$$

Der letzte Ausdruck geht für $2^{-(u+2)} = \delta$ über in

$$\frac{\sin \pi \delta}{\delta}$$

und nähert sich mit abnehmenden $\delta$ der Zahl $\pi$. Ein solches $\delta$ stellt sich aber ein, wenn $u$ hinreichend gross angenommen wird, und es ist bekannt, dass man beispielsweise für $u = 10$, wo die Kettenentwickelung links den halben Umfang des regelmässigen $2^{u+2} = 4096$-Ecks vorstellt, das einem Kreise mit dem Radius 1 inschrieben ist, den Werth von $\pi$ bis auf sieben Decimalen genau erhält.

Was die Kettenwurzel für $x_u$ anlangt, so entspricht ihr ein convergenter Anlauf zwischen einer Geraden

$$y = 2 + x$$

und dem positiven Zweig einer Parabel

$$x = +\sqrt{y}, \quad (x_0 = 0) \quad \text{(Fig. 21).}$$

Die betreffende Kettenwurzel convergirt gegen den Werth 2, das heisst, sie liefert die positive Wurzel der quadratischen Gleichung

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Die andere Wurzel könnte durch einen links drehenden convergenten Umlauf erhalten werden, dem die Kettenwurzel

$$x = -\sqrt{2 - \sqrt{2 - \cdots \sqrt{2}}}$$

entspricht; letztere convergirt gegen den Werth $-1$, kommt aber jetzt nicht in Betracht.*

Die dem Sinus entsprechende Kettenwurzel

$$x = \sqrt{2 - \underset{(1)}{\sqrt{2 + \underset{(2)}{\sqrt{2 + \cdots \underset{(u)}{\sqrt{2}}}}}}}$$

wird geometrisch veranschaulicht durch einen convergenten Anlauf zwischen einem Kreis

$$y = +\sqrt{4 - x^2}$$

und einer Parabel

$$x = +\sqrt{2 - y}, \quad (x_0 = \sqrt{2}) \quad \text{(Fig. 22).}$$

Die Kettenentwickelung convergirt nach Null (Scheitel der Parabel), und die mit $2^{u+1}$ multiplicirten Abscissenwerthe nähern sich für zunehmende $u$, $(u = 0, 1, 2, \ldots)$ der Zahl $\pi$.

Die betreffende Kettenwurzel geht aus der Gleichung

$$x^4 - 3x^2 = 0$$

hervor und stellt speciell die Doppellösung $x = 0$ dar. Aber auch die anderen Lösungen gelangen zur Darstellung, nämlich durch:

---

* Allgemeiner ist für $c = \lambda(\lambda + 1)$, unter $\lambda$ eine positive Zahl $> 1$ verstanden, $\sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + \cdots}}} = \lambda + 1$ und $\sqrt{c - \sqrt{c - \sqrt{c - \cdots}}} = \lambda$. Oben war $\lambda = 1$; $c = 2$.

$$x = \pm\sqrt{2-y}, \quad y = -\sqrt{4-x^2}, \quad x_0 = \pm\sqrt{2},$$

das heisst

$$x = \pm\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2-\cdots\sqrt{2}}}} = \pm\sqrt{3},$$

und dieser Kettenwurzel entsprechen mit Rücksicht auf das doppelte Vorzeichen zwei Umläufe (Fig. 22).

### 5. Quadrinomische Gleichungen.

Es kommt hier auf eine möglichst zweckmässige Spaltung der vorgelegten Gleichung in zwei Curvengleichungen

$$y = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = \psi(x)$$

an. Wir gehen daher am besten von letzteren aus, um rückwärts die zu lösende Gleichung zu formiren und machen folgende Annahmen.

A. Es sei

$$\alpha) \quad \left\{\begin{array}{l} x^n = a + y \\ y^2 = b + x \end{array}\right\},$$

das heisst

$$\beta) \quad (x^n - a)^2 - x - b = 0.$$

Diese Gleichung ist so allgemein, wie

$$\gamma) \quad x^{2n} - \alpha x^n - \beta x - \gamma = 0,$$

weil der Coefficient von $x$ durch eine einfache Transformation in 1 verwandelt werden kann. Durch das definirende Gleichungssystem $\alpha$) ist nur ein bestimmter Fall herausgegriffen. Bei einer erschöpfenden Behandlung müssten (ähnlich wie bei den trinomischen Gleichungen) die verschiedenen Vorzeichenwechsel, welche in obigen Gleichungen möglich sind, unterschieden werden.

Zahlenbeispiel: $n = 2.$

Aus
$$z^4 - 16z^2 + 8z + 24 = 0$$
entsteht für $z = -2x$:
$$x^4 - 4x^2 - x + 1{,}5 = 0,$$
das heisst
$$(x^2 - 2)^2 = x + 2{,}5 = y^2,$$
oder
$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 2 \quad + y \\ y^2 = 2{,}5 + x \end{array}\right\} \quad \text{(Fig. 23)}.$$

Die tabellarische Kettenentwickelung hierzu findet man am Schluss.

B. Es sei

$$\alpha) \quad \left\{\begin{array}{l} x^n = a + y \\ y = (b + x)^2 \end{array}\right\},$$

das heisst

$$\beta) \quad x^n - x^2 - 2bx - a - b^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist so allgemein wie

$$\gamma) \quad x^n - \alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0.$$

Zahlenbeispiel: $n = 5.$

Aus
$$x^5 - x^2 - 2x + 1 = 0$$
folgt
$$x^5 + 2 = (x + 1)^2 = y \quad \text{(Fig. 24)}.$$

C. Es sei
$$\alpha)\quad \left\{\begin{array}{l} x^n = a + y \\ y^2 = b + \frac{1}{x} \end{array}\right\},$$
das heisst
$$\beta)\quad x(x^n - a)^2 - bx - 1 = 0.$$

Diese Gleichung ist so allgemein, wie
$$\gamma)\quad x^{2n+1} - \alpha x^{n+1} - \beta x - \gamma = 0.$$

Zahlenbeispiel: $n = 2.$

Aus
$$x^5 - 8x^3 + 15x - 1 = 0$$
folgt
$$x(x^2 - 4)^2 = x + 1,$$
das heisst
$$(x^2 - 4)^2 = 1 + \frac{1}{x} = y^2,$$
oder
$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 4 + y \\ y^2 = 1 + \frac{1}{x} \end{array}\right\} \text{(Fig. 25).}$$

Wir wollen damit abschliessen, dass wir für die drei letzten Zahlenbeispiele die Curvenbilder geben und die Kettenfunctionen explicite berechnen. Die jeweiligen Anfangswerthe $x_0$ der Läufe entnehmen wir der Anschauung. Betrachtet man die obigen quadrinomischen Gleichungen ganz im Allgemeinen, so lassen sich immer bestimmte Grenzen angeben, zwischen welchen diese Anfangswerthe liegen. Eine solche Untersuchung müsste die verschiedenen Fälle herausgreifen, in denen die Curven $\varphi$ und $\psi$ zur Berührung kommen oder supplementare Schnitte liefern. Sie erfordert also eine genauere Discussion der Coordinaten der kritischen Punkte sowie der Discriminante $\Delta$ und der Form $\Delta'$. Hierdurch kann aber das Auflösungsproblem der algebraischen Gleichungen durch Kettenfunctionen an theoretischem Interesse nur gewinnen.

**Tabellen der Kettenfunctionswerthe.**

A. Auflösung von $x^4 - 4x^2 - x + 1{,}5 = 0.$

Coordinaten des Anlaufes für Punkt $\alpha$ (Fig. 23):

| $x = +\sqrt{2 + y} = \varphi^{-1}$ | $y = +\sqrt{2{,}5 + x} = \psi$ |
|---|---|
| $x_0 = 0{,}000$ | $y_0 = 1{,}581$ |
| $x_1 = 1{,}892$ | $y_1 = 2{,}096$ |
| $x_2 = 2{,}025$ | $y_2 = 2{,}127$ |
| $x_3 = 2{,}031\,54$ | $y_3 = 2{,}128\,74$ |
| $x_4 = 2{,}031\,938$ | $y_4 = 2{,}128\,835$ |
| $x_5 = 2{,}031\,953\,7$ | $y_5 = 2{,}128\,838\,3$ |
| $x_6 = 2{,}031\,954\,3$ | $y_6 = 2{,}128\,838\,5$ |

Fehler: $\delta = y_5 - y_6 = -0{,}000\,000\,2.$*

* Der Fehler bezieht sich nach dem Früheren auf die Gleichung $\varphi(x) - \psi(x) = 0$. Für die Gleichung $\varphi^2(x) - \psi^2(x) = 0$ ist er dagegen $x_{k-1} - x_k$.

Coordinaten des rechts drehenden Umlaufes für Punkt $\beta$:

| $x = +\sqrt{2+y} = \varphi^{-1}$ | $y = -\sqrt{2{,}5+x} = -\psi$ |
|---|---|
| $x_0 = 0{,}000$ | $y_0 = -1{,}581$ |
| $x_1 = 0{,}647$ | $y_1 = -1{,}774$ |
| $x_2 = 0{,}475$ | $y_2 = -1{,}725$ |
| $x_3 = 0{,}525$ | $y_3 = -1{,}739$ |
| $x_4 = 0{,}511$ | $y_4 = -1{,}735$ |
| $x_5 = 0{,}514\,8$ | $y_5 = -1{,}736\,3$ |
| $x_6 = 0{,}513\,5$ | $y_6 = -1{,}736\,0$ |
| $x_7 = 0{,}513\,81$ | $y_7 = -1{,}736\,03$ |
| $x_8 = 0{,}513\,781$ | $y_8 = -1{,}736\,028$ |
| $x_9 = 0{,}513\,782\,0$ | $y_9 = -1{,}736\,024\,8$ |
| $x_{10} = 0{,}513\,785\,1$ | $y_{10} = -1{,}736\,025\,6$ |
| $x_{11} = 0{,}513\,784\,4$ | $y_{11} = -1{,}736\,025\,6$ |

Fehler: $\delta' = y_{11} - y_{10} = 0{,}000\,000\,0.$

Coordinaten des links drehenden Umlaufes für Punkt $\gamma$:

| $x = -\sqrt{2+y} = \varphi^{-1}$ | $y = +\sqrt{2{,}5+x} = \psi$ |
|---|---|
| $x_0 = -0{,}000$ | $y_0 = 1{,}581$ |
| $x_1 = -1{,}892$ | $y_1 = 0{,}779$ |
| $x_2 = -1{,}667$ | $y_2 = 0{,}913$ |
| $x_3 = -1{,}707$ | $y_3 = 0{,}891$ |
| $x_4 = -1{,}700$ | $y_4 = 0{,}894$ |
| $x_5 = -1{,}701\,27$ | $y_5 = 0{,}893\,72$ |
| $x_6 = -1{,}701\,09$ | $y_6 = 0{,}893\,82$ |
| $x_7 = -1{,}701\,122$ | $y_7 = 0{,}893\,799$ |
| $x_8 = -1{,}701\,117\,2$ | $y_8 = 0{,}893\,802\,3$ |
| $x_9 = -1{,}701\,117\,9$ | $y_9 = 0{,}892\,802\,3$ |

Fehler: $\delta = y_8 - y_9 = 0{,}000\,000\,0.$

Coordinaten des Anlaufes für Punkt $\delta$:

| $x = -\sqrt{2+y} = -\varphi^{-1}$ | $y = -\sqrt{2,5+x} = -\psi$ |
|---|---|
| $x_0 = 0,000$ | $y_0 = -1,581$ |
| $x_1 = -0,647$ | $y_1 = -1,361$ |
| $x_2 = -0,799$ | $y_2 = -1,304$ |
| $x_3 = -0,834$ | $y_3 = -1,291$ |
| $x_4 = -0,842\,2$ | $y_4 = -1,287\,6$ |
| $x_5 = -0,844\,0$ | $y_5 = -1,286\,9$ |
| $x_6 = -0,844\,44$ | $y_6 = -1,286\,66$ |
| $x_7 = -0,844\,507$ | $y_7 = -1,286\,659$ |
| $x_8 = -0,844\,595$ | $y_8 = -1,286\,622$ |
| $x_9 = -0,844\,617$ | $y_9 = -1,286\,617$ |
| $x_{10} = -0,844\,621\,7$ | $y_{10} = -1,286\,615\,2$ |
| $x_{11} = -0,844\,621\,0$ | $y_{11} = -1,286\,615\,0$ |

Fehler: $\delta' = y_{11} - y_{10} = 0,000\,000\,2.$

Sonach sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - 4x^2 - x + 1,5 = 0$$

mit einer Genauigkeit bis an die siebente Decimale bestimmt zu

$$x' = 2,031\,954\,3 \qquad x''' = -1,701\,117\,9$$
$$x'' = 0,513\,784\,4 \qquad x^{IV} = -0,844\,621\,0$$
$$x' + x'' = 2,545\,738\,7 \qquad x''' + x^{IV} = -2,545\,738\,9$$

das heisst

$$x' + x'' + x''' + x^{IV} = 0,000\,000.$$

Man bemerke, dass sämmtliche Lösungen in dem Typus

$$x = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2,5 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2,5 \pm \cdots}}}}$$

enthalten sind, wenn die Vorzeichen in festgesetzter Weise wechseln. Die Gleichung vierten Grades kann also durch wiederholtes Aufschlagen einer einfachen Quadratwurzel-Tafel gelöst werden.

Um Einwänden zu begegnen, die sich etwa gegen den Umfang und praktischen Werth obiger Tabellen richten, sei Folgendes hervorgehoben: Die Genauigkeit der Coordinatenwerthe ist nach und nach zu steigern; man kann sich anfänglich mit einer Decimale, dann mit zweien u. s. f. begnügen. Sollte einmal die neu hinzukommende Stelle durch ein Versehen fehlerhaft sein, so wird dennoch ein richtiges Schlussresultat erzielt. Dieses scheinbare Paradoxon erklärt sich augenblicklich durch das Wesen der An- und

Umläufe, die eben an den verschiedensten Stellen begonnen werden können und trotzdem nach dem Schnittpunkt convergiren.

Wem die Anzahl der Operationen (Quadratwurzeln) zu gross erscheint, dem bleibt allerdings nichts anderes übrig, als die Convergenz durch Achsendrehung zu steigern (Abschnitt 3) oder von der Newton'schen Formel Gebrauch zu machen (Abschnitt 4). Indessen wolle man nicht verkennen, dass die Gleichung

$$x^{2n} - \alpha x^n - \beta x - \gamma = 0,$$

nach Newton's Methode, also durch

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^{2n} - \alpha x_k^n - \beta x_k - \gamma}{2n x_k^{2n-1} - \alpha n x_k^{n-1} - \beta}$$

gelöst, für jeden neuen Näherungswerth ein fünfmaliges Aufschlagen der Tafeln erfordert, weil vier Potenzen und ein Quotient zu ermitteln ist. Vier Näherungswerthe auf diese Weise berechnet dürften also nicht weniger Mühe machen, als die Bestimmung von zwanzig Coordinaten in den vorhin mitgetheilten Tabellen.

### B. Auflösung von $x^5 - x^3 - 2x + 1 = 0$.

Coordinaten des Anlaufes für Punkt $\alpha$ (Fig. 24):

| $x = \sqrt[5]{y-2} = \varphi^{-1}$ | $y = (x+1)^2 = \psi$ |
|---|---|
| $x_0 = 1{,}000$ | $y_0 = 4{,}000$ |
| $x_1 = 1{,}149$ | $y_1 = 4{,}617$ |
| $x_2 = 1{,}212$ | $y_2 = 4{,}894$ |
| $x_3 = 1{,}234$ | $y_3 = 5{,}003$ |
| $x_4 = 1{,}246$ | $y_4 = 5{,}044$ |
| $x_5 = 1{,}249$ | $y_5 = 5{,}060$ |
| $x_6 = 1{,}251$ | $y_6 = 5{,}065$ |
| $x_7 = 1{,}251\,12$ | $y_7 = 5{,}067\,50$ |
| $x_8 = 1{,}251\,29$ | $y_8 = 5.068\,29$ |
| $x_9 = 1{,}251\,35$ | $y_9 = 5{,}068\,56$ |
| $x_{10} = 1{,}251\,372\,9$ | $y_{10} = 5{,}068\,679\,7$ |
| $x_{11} = 1{,}251\,383\,0$ | $y_{11} = 5{,}068\,725\,5$ |
| $x_{12} = 1{,}251\,386\,7$ | $y_{12} = 5{,}068\,741\,8$ |
| $x_{13} = 1{,}251\,387\,9$ | $y_{13} = 5{,}068\,746\,5$ |
| $x_{14} = 1{,}25$[illegible] | [illegible] $5{,}068\,746\,5$ |

Coordinaten des Anlaufes für Punkt $\beta$:

| $x = -1 + \sqrt{y} = \psi^{-1}$ | $y = x^5 + 2 = \varphi$ |
|---|---|
| $x_0 = 0{,}000$ | $y_0 = 2{,}000$ |
| $x_1 = 0{,}414$ | $y_1 = 2{,}012$ |
| $x_2 = 0{,}418\,40$ | $y_2 = 2{,}012\,82$ |
| $x_3 = 0{,}418\,740\,0$ | $y_3 = 2{,}012\,874\,0$ |
| $x_4 = 0{,}418\,757\,0$ | $y_4 = 2{,}012\,876\,8$ |
| $x_5 = 0{,}418\,758\,8$ | $y_5 = 2{,}012\,876\,8$ |

Fehler: $\delta' = y_5 - y_4 = 0{,}000\,000\,0.$

Coordinaten des rechts drehenden Umlaufes für Punkt $\gamma$:

| $x = \sqrt[5]{y-2} = \varphi^{-1}$ | $y = (x+1)^2 = \psi$ |
|---|---|
| $x_0 = -\ 1{,}000$ | $y_0 = 0{,}000$ |
| $x_1 = -\ 1{,}149$ | $y_1 = 0{,}022$ |
| $x_2 = -\ 1{,}146\,10$ | $y_2 = 0{,}021\,35$ |
| $x_3 = -\ 1{,}146\,240\,0$ | $y_3 = 0{,}021\,386\,1$ |
| $x_4 = -\ 1{,}146\,231\,2$ | $y_4 = 0{,}021\,383\,6$ |
| $x_5 = -\ 1{,}146\,231\,5$ | $y_5 = 0{,}021\,383\,7$ |

Fehler: $\delta = y_4 - y_5 = -\ 0{,}000\,000\,1.$

Sonach sind die drei reellen Wurzeln der Gleichung

$$x^5 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

mit einer Genauigkeit bis an die siebente Decimale bestimmt zu

$$x' = 1{,}251\,387\,9, \qquad x'' = 0{,}418\,758\,8, \qquad x''' = -\ 1{,}146\,231\,5.$$

C. Auflösung von $x^5 - 8x^3 + 15x - 1 = 0$.

Coordinaten des rechts drehenden Umlaufes für Punkt $\alpha$ (Fig. 25):

| $x = +\sqrt{y+4} = \varphi^{-1}$ | $y = +\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \psi$ |
|---|---|
| $x_0 = 2{,}000$ | $y_0 = 1{,}225$ |
| $x_1 = 2{,}286$ | $y_1 = 1{,}199$ |
| $x_2 = 2{,}280\,1$ | $y_2 = 1{,}199\,4$ |
| $x_3 = 2{,}280\,219\,4$ | $y_3 = 1{,}199\,397\,7$ |
| $x_4 = 2{,}280\,218\,9$ | $y_4 = 1{,}199\,397\,8$ |

Fehler: $\delta = y_3 - y_4 = -\,0{,}000\,000\,1.$

Coordinaten des Anlaufes für Punkt $\beta$:

| $x = +\sqrt{y+4} = \varphi^{-1}$ | $y = -\sqrt{1+\frac{1}{x}} = -\psi$ |
|---|---|
| $x_0 = 2{,}000$ | $y_0 = -1{,}225$ |
| $x_1 = 1{,}666$ | $y_1 = -1{,}265$ |
| $x_2 = 1{,}653\,8$ | $y_2 = -1{,}266\,7$ |
| $x_3 = 1{,}653\,27$ | $y_3 = -1{,}266\,83$ |
| $x_4 = 1{,}653\,230$ | $y_4 = -1{,}266\,837$ |
| $x_5 = 1{,}653\,228\,0$ | $y_5 = -1{,}266\,837\,5$ |
| $x_6 = 1{,}653\,227\,8$ | $y_6 = -1{,}266\,837\,5$ |

Fehler: $\delta' = y_6 - y_5 = 0{,}000\,000\,0$.

Coordinaten des Anlaufes für Punkt $\gamma$:

| $x = \frac{1}{y^2-1} = \psi^{-1}$ | $y = x^2 - 4 = \varphi$ |
|---|---|
| $x_0 = 0{,}000$ | $y_0 = -4{,}000$ |
| $x_1 = 0{,}066\,66$ | $y_1 = -3{,}995\,56$ |
| $x_2 = 0{,}066\,82$ | $y_2 = -3{,}995\,53$ |
| $x_3 = 0{,}066\,825\,7$ | $y_3 = -3{,}995\,534\,3$ |
| $x_4 = 0{,}066\,825\,7$ | $y_4 = -3{,}995\,534\,3$ |

Fehler: $\delta' = y_4 - y_3 = 0{,}000\,000\,0$.

Coordinaten des links drehenden Umlaufes für Punkt $\delta$:

| $x = -\sqrt{y+4} = -\varphi^{-1}$ | $y = -\sqrt{1+\frac{1}{x}} = -\psi$ |
|---|---|
| $x_0 = -2{,}000$ | $y_0 = -0{,}707$ |
| $x_1 = -1{,}815$ | $y_1 = -0{,}670$ |
| $x_2 = -1{,}825$ | $y_2 = -0{,}672$ |
| $x_3 = -1{,}824\,2$ | $y_3 = -0{,}670\,6$ |
| $x_4 = -1{,}824\,63$ | $y_4 = -0{,}672\,27$ |
| $x_5 = -1{,}824\,207$ | $y_5 = -0{,}672\,173$ |
| $x_6 = -1{,}824\,232$ | $y_6 = -0{,}672\,179$ |
| $x_7 = -1{,}824\,231\,1$ | $y_7 = -0{,}672\,178\,5$ |
| $x_8 = -1{,}824\,231\,5$ | $y_8 = -0{,}672\,178\,6$ |

Fehler: $\delta = y_7 - y_8 = 0{,}000\,000\,1$.

Coordinaten des Anlaufes für Punkt $\varepsilon$:

| $x = -\sqrt{y+4} = -\varphi^{-1}$ | $y = +\sqrt{1+\frac{1}{x}} = \psi$ |
|---|---|
| $x_0 = -2{,}000$ | $y_0 = 0{,}707$ |
| $x_1 = -2{,}169$ | $y_1 = 0{,}734$ |
| $x_2 = -2{,}175\,8$ | $y_2 = 0{,}735\,1$ |
| $x_3 = -2{,}176\,03$ | $y_3 = 0{,}735\,15$ |
| $x_4 = -2{,}176\,040\,2$ | $y_4 = 0{,}735\,152\,7$ |
| $x_5 = -2{,}176\,040\,7$ | $y_5 = 0{,}735\,152\,8$ |

Fehler: $\delta' = y_5 - y_4 = 0{,}000\,000\,1$.

Sonach sind die fünf reellen Wurzeln der Gleichung

$$x^5 - 8x^3 + 15x - 1 = 0$$

mit einer Genauigkeit bis an die siebente Decimale bestimmt zu

$$x' = 2{,}280\,218\,9 \qquad x^{IV} = -1{,}824\,231\,5$$
$$x'' = 1{,}653\,227\,8 \qquad x^{V} = -2{,}176\,040\,7$$
$$x''' = 0{,}066\,825\,7$$

$$x' + x'' + x''' = 4{,}000\,272\,4 \qquad x^{IV} + x^{V} = -4{,}000\,272\,2$$

das heisst

$$x' + x'' + x''' + x^{IV} + x^{V} = 0{,}000\,000.$$

## Nachschrift.

Kurze Zeit nach Abschluss der vorliegenden Abhandlung fand ich in Hoffmann's Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 11. Jahrgang S. 68 in dem „Bericht über die Thätigkeit der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der 34. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Trier" (September 1879), dass Herr Dr. S. Günther daselbst auf unendliche Radicale aufmerksam gemacht hat. In einem Vortrag „Eine didaktisch wichtige Auflösung trinomischer Gleichungen" behandelte er insbesondere die der Rentenrechnung entnommene Gleichung

$$q^{n+1} - (1+\varepsilon)q^n + \varepsilon = 0, \quad \varepsilon = r : a \quad (1 < \varepsilon < n)$$

und gab eine Lösung derselben in Form einer Kettenwurzel. — Meine Untersuchungen sind von denen des Herrn Günther völlig verschieden, aber ich möchte umsomehr auf den erwähnten Vortrag aufmerksam machen, als hier von berufener Seite die didaktischen Vorzüge des sehr elementaren Verfahrens, welches sich auch in meiner Arbeit findet, gewürdigt werden. Was die principiellen Mängel des Verfahrens anlangt, welche vor circa 14 Jahren thatsächlich noch bestanden, und die Herr Günther nicht verschweigt, so hoffe ich dieselben zum grössten Theil durch die geometrische Theorie der An- und Umläufe beseitigt zu haben.

Im Anschluss an Günther hat auch Herr von Schaewen die Auflösung obiger Gleichung mittelst Kettenwurzeln resp. Kettenpotenzen bewerkstelligt (dieselbe Zeitschrift 11. Jahrgang S. 264).

Untersucht man die Günther-Schaewen'schen Kettenlösungen auf Grund der früher aufgestellten geometrischen Principien, so wird man finden, dass es sich bei ihnen um den Schnitt einer gleichseitigen Hyperbel mit einer höheren Parabel $y = x^n$ handelt. Nach unserem Verfahren kommt hingegen der Schnitt einer Geraden

$$x = y + c \quad \text{mit } y = x^{n+1}$$

in Frage, und dementsprechend würde eine Lösung der vorgelegten Gleichung durch die Kettenpotenz

$$\frac{1}{q} = \sqrt[n]{1+\varepsilon}\left[c + \sqrt[\nu]{c + \sqrt[\nu]{c + \sqrt[\nu]{c + \cdots}}}\right]$$

dargestellt sein, wobei zur Abkürzung

$$\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^{\frac{n+1}{n}}} = c, \quad \frac{1}{n+1} = \nu$$

gesetzt wurde. Dass diese Lösung convergirt und neben den anderen die einzig hier in Betracht kommende ist, zeigt das entsprechende Curvenbild.

Chemnitz, Juni 1893.

# XVIII.

## Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Von

Professor Dr. August Weiler.

1. Der Verfasser des vorliegenden Aufsatzes hat 1863 in dem 8. Band von Schlömilch's Zeitschrift eine Methode veröffentlicht zur Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Für den Fall, dass die partielle Differentialgleichung neben der abhängigen Veränderlichen $z$ nur zwei unabhängige Veränderliche $x$ und $y$ enthält, dass es sich also um die Integration der Gleichung $\psi(z, x, y, p, q) = 0$ handelt, ist bekanntlich diese Aufgabe von Lagrange in unübertrefflicher Weise gelöst worden. Ich hatte mir die von Lagrange gegebene Lösung zum Vorbild genommen, und es war mir gelungen, die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung mit $n$ unabhängigen Veränderlichen in ähnlicher Weise auszuführen. Neuerdings ist meiner Methode die Berechtigung abgesprochen worden. Das hat mich veranlasst, die Entwickelung des Gegenstandes historisch und sachlich nochmals zu verfolgen.

Als ich zu der Lösung der Aufgabe gelangt war, wusste ich nicht, dass Jacobi schon vorher eine Lösung der Aufgabe gegeben und in seinen Vorlesungen vorgetragen hatte. Ich habe das erfahren, als ich von meinen Resultaten Clebsch Mittheilung machte, welcher damals einer Lehrstelle an dem Polytechnikum in Karlsruhe vorstand. Clebsch hat mir sogleich bemerkt, dass die von Jacobi gegebene Lösung eine erheblich grössere Anzahl von Integrationen erfordere als die meinige. Da die letztere auf einer anderen Grundlage beruht als die Jacobi'sche, so war das für Clebsch ein Anlass, zu zeigen, dass man auf der Jacobi'schen Grundlage mit derselben Anzahl von Integrationen ausreiche, zu welcher meine Methode geführt hat. Clebsch hat das in dem Journal für reine und angewandte Mathematik Band 65 veröffentlicht.

2. Die Lösung der in Rede stehenden Aufgabe stützt sich in der Hauptsache auf die Integration eines vollständigen Systems partieller Differential-

gleichungen, in welchen die partiellen Differentialquotienten der gesuchten Function nur linear vorkommen. Damit sich der Leser von vornherein eine Vorstellung davon machen könne, wie sich die von mir gegebene Integrationsmethode von der Jacobi'schen unterscheidet, muss ich auf die Betrachtung zweier partieller Differentialgleichungen von linearer Form eingehen, welche ein vollständiges System bilden.

Diese Gleichungen seien:

$$1)\qquad a_1\frac{d\varphi}{dx_1}+a_2\frac{d\varphi}{dx_2}+a_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\cdots+a_n\frac{d\varphi}{dx_n}=0,$$

$$2)\qquad b_1\frac{d\varphi}{dx_1}+b_2\frac{d\varphi}{dx_2}+b_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\cdots+b_n\frac{d\varphi}{dx_n}=0,$$

in welchen $a_1, a_2 \ldots b_1, b_2 \ldots$ gegebene Functionen der $n$ Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ sind. Jede der Gleichungen für sich genommen, hat bekanntlich $n-1$ Lösungen $\varphi$. Das System wird aber ein vollständiges genannt, wenn die beiden Gleichungen $n-2$ gemeinsame Lösungen haben. Zur Abkürzung seien die beiden Gleichungen mit $A(\varphi)=0$, $B(\varphi)=0$ bezeichnet. Um die $n-2$ gemeinsamen Lösungen $\varphi$ zu bestimmen, setzt Jacobi eine besondere Beschaffenheit des vollständigen Systems voraus. Es ist bekanntlich schon von Poisson gezeigt worden, dass es Systeme partieller Differentialgleichungen giebt, welche die folgende Eigenschaft haben: Ist $\varphi=\varphi_1$ eine Lösung der Gleichung $B(\varphi)=0$, ist also $B(\varphi_1)=0$ eine identische Gleichung, so ist auch $\varphi=A(\varphi_1)$ eine Lösung der Gleichung $B(\varphi)=0$, also auch $B[A(\varphi_1)]=0$ eine identische Gleichung. Jacobi hat aber gezeigt, dass die von Poisson nachgewiesene Eigenschaft immer dann besteht, wenn die Gleichung:

$$A[B(\varphi)]-B[A(\varphi)]=0$$

für jedes beliebige $\varphi$ eine identische ist. Das System der Gleichungen 1) und 2) ist in diesem Falle von Clebsch ein Jacobi'sches genannt worden. Giebt man den beiden Gleichungen, von welchen vorausgesetzt sei, dass sie ein Jacobi'sches System bilden, irgend welche Factoren, welche Functionen der Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ sind, oder setzt man an deren Stelle zwei andere Gleichungen, welche sich als lineare Verbindungen der Gleichungen 1) und 2) darstellen, so bilden die neuen Gleichungen immer noch ein vollständiges System, aber sie hören auf, ein Jacobi'sches System zu sein. Wenn also ein vollständiges System partieller Differentialgleichungen vorliegt, welches die erwähnte Eigenschaft nicht hat, so verlangt Jacobi, dass man zwei lineare Verbindungen dieser Gleichungen herstelle, welche die erwähnte Eigenschaft besitzen, um dasselbe integriren zu können.

Die von mir gegebene Methode zur Integration eines vollständigen Systems setzt nicht voraus, dass dasselbe ein Jacobi'sches sei. Ich integrire das vollständige System in jedem anderen Falle ebenso wie das Jacobi'sche

System. Meine Methode, das vollständige System zu integriren, beruht darauf, dass die von Poisson nachgewiesene Eigenschaft des Systems auch dann vorhanden sein kann, wenn dasselbe nicht ein Jacobi'sches ist.

3. Die unter 1. besprochene Arbeit von Clebsch berechtigt zu noch einer anderen Auffassung. Im Jahre 1875 hat Herr Professor Mansion seine „Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre" herausgegeben. Kapitel IV ist überschrieben: „Méthode de Clebsch et de Weiler pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, aux quelles conduit la méthode de Jacobi." Ich habe zur Zeit dem Herrn Mansion angezeigt, dass das, was Clebsch in dem Journal für reine und angewandte Mathematik Band 65 über die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung geschrieben habe, nicht gleichbedeutend sei mit der von mir aufgestellten Methode. Daraufhin hat mir Herr Mansion die Berichtigung seiner Darstellung in einer später folgenden zweiten Ausgabe seines Werkes in Aussicht gestellt.

Clebsch hat sich in seiner Besprechung meiner Methode durch seine Voreingenommenheit für den grossen Analytiker Jacobi zu einer Ungerechtigkeit verleiten lassen. In jenem Aufsatz, Journal für reine und angewandte Mathematik Band 65, heisst es auf S. 263: „Diese Vereinfachung, welche die Anzahl der erforderlichen Integrationen verringert, und sich bei genauerer Prüfung als eine natürliche Fortentwickelung der Jacobi'schen Methode erweist, besteht in Folgendem u. s. w." Auf meine Methode zur Integration eines vollständigen Systems partieller Differentialgleichungen ist Clebsch in seiner Besprechung nicht eingegangen, er hat lediglich die verminderte Anzahl der erforderlichen Integrationen in Betracht gezogen. Indem er sagt, dass die Jacobi'sche Methode mit der gleichen Anzahl Integrationen ausreiche, und dass sich diese Vereinfachung als eine natürliche Fortentwickelung der Jacobi'schen Methode erweise, erweckt er in dem Leser die Meinung, dass die von der Jacobi'schen abweichende Grundlage meiner Methode etwas Entbehrliches oder Gleichgiltiges sei, was kennen zu lernen sich nicht verlohne. Clebsch hat nicht erwähnt, dass die Verminderung der Anzahl erforderlicher Integrationen auf der Jacobi'schen Grundlage Schwierigkeiten begegnet, welche in meiner Methode nicht vorhanden sind.

In seiner Besprechung hat Clebsch auch nicht erwähnt, dass meine Methode zur Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung in keinerlei Weise der Aufgabe eine Beschränkung auferlegt. Dies passt freilich gar nicht in die Jacobi'sche Theorie, in welcher neben den $n$ unabhängigen Veränderlichen die abhängige Veränderliche als nicht vorhanden angenommen ist. Um die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung, in welcher die Anwesenheit der abhängigen Veränderlichen vorausgesetzt ist, zu erledigen, ist Jacobi zu einer Transformation der zu integrirenden Differential-

gleichung genöthigt, in deren Folge die abhängige Veränderliche wegfällt, die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen aber um eine weitere $x_{n+1}$ vermehrt wird. Wollte man diese Lösung für den Fall, dass neben zwei unabhängigen Veränderlichen auch die abhängige Veränderliche in der zu integrirenden Differentialgleichung vorkommt, an die Stelle der von Lagrange für diesen Fall gegebenen Lösung setzen, so hätte man etwas viel weniger Einfaches als vorher, es würde das unbedingt einen Rückschritt der Analysis bedeuten. Schon hieraus ist ersichtlich, dass die Jacobi'sche eine unvollkommene Methode ist. Die von mir aufgestellte Methode hat die Eigenschaft, dass sie für den Fall $n=2$ unmittelbar in die von Lagrange gegebene Lösung übergeht. Ich muss auch erwähnen, dass es keine andere Integrationsmethode giebt, welche das leistet.

Für alles das scheint Clebsch kein Verständniss gehabt zu haben. Die Ungerechtigkeit, deren ich denselben beschuldige, liegt darin, dass er in der Besprechung meiner Integrationsmethode für dieselbe nur insoweit eine Werthschätzung hatte, als er sie für geeignet hielt, die Jacobi'sche Theorie zu vervollkommnen.

4. Es ist mir damals bemerkt worden, mein Aufsatz vom Jahre 1863 sei schwer verständlich, insbesondere seien die Begründungen nicht eingehend erörtert. Ich habe daher in Schlömilch's Zeitschrift Band XX über denselben Gegenstand 1875 einen zweiten Aufsatz veröffentlicht: „Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von unbeschränkter Allgemeinheit". Dieser Aufsatz ist theilweise misslungen, insofern, als ich in demselben versucht habe, einige meiner Begründungen auf die in anderen Integrationsmethoden gegebenen Hülfsmittel zu stützen. In diesem Betreff enthalten die §§ 4 und 5 des Aufsatzes II Fehlerhaftes. In dem gleichen Sinne ist der § 7 des Aufsatzes I verfehlt.

In den mathematischen Annalen Band IX hat Herr Professor A. Mayer 1875 diesem Aufsatz II eine Besprechung gewidmet. In derselben hat im Gegensatz zu Clebsch Herr Mayer von vornherein den Unterschied zwischen meiner Methode zur Integration eines vollständigen Systems partieller Differentialgleichungen von linearer Form und der von Jacobi aufgestellten hervorgehoben. Im § 1 seines Berichtes ist eine Darstellung meiner Methode gegeben, durch welche vollständige Systeme integrirt werden, obwohl sie nicht Jacobi'sche Systeme sind. Im § 2 des Berichtes werden die simultanen Systeme partieller Differentialgleichungen von linearer Form untersucht, zu welchen die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung führt. Inhaltlich seines § 3 geht Herr Mayer alsdann auf die Integration dieser simultanen Systeme ein, und zeigt, dass meine Methode zur Integration des simultanen Systems in der Lösung der allgemeinen Aufgabe zu einfacheren Resultaten führt, als die von Clebsch vervollkommnete Jacobi'sche Methode.

Herr Mayer hat aber jene simultanen Systeme, zu welchen die Lösung der allgemeinen Aufgabe führt, nur unter der Beschränkung in Betracht gezogen, dass die abhängige Veränderliche in der zu integrirenden partiellen Differentialgleichung nicht vorkomme. Ich muss annehmen, dass Herr Mayer geglaubt hat, es sei diese Beschränkung unerlässlich. Ich kann nicht anerkennen, dass die in den §§ 2 und 3 seines Berichtes gegebene Darstellung des Gegenstandes meine Methode sei.

Die allgemeinere Auffassung meiner Lösung betreffend sagt Herr Mayer auf S. 369 seines Berichtes: „Herr Weiler behandelt den allgemeinen Fall, wo in der gegebenen partiellen Differentialgleichung die unbekannte Function selbst auftritt. In dieser Allgemeinheit genommen sind aber seine Resultate nicht blos unklar dargestellt, sondern auch geradezu falsch.“ Es ist das ein Irrthum, in welchen Herr Mayer vermuthlich nur darum verfallen ist, weil er unterlassen hat, auf den im § 3 meines Aufsatzes II gegebenen Beweis der Behauptung einzugehen, dass jene simultanen Systeme, zu welchen mich die Lösung der allgemeinen Aufgabe geführt hat, in der That vollständige Systeme sind.

5. Im Hinblick auf die unter 4. erwähnten Mängel meiner Aufsätze war ich genöthigt, eine dritte Bearbeitung des Gegenstandes vorzunehmen. Dieselbe ist 1877 in dem Band XXII der Schlömilch'schen Zeitschrift erschienen: „Nachträge zu meinen Abhandlungen über Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung“. In derselben werden diejenigen Begründungen, welche unter 4. von mir als mangelhaft bezeichnet sind, berichtigt. Die Resultate meiner Methode erleiden in derselben keine Aenderung.

Auch diesem Aufsatz hat Herr Mayer eine Besprechung gewidmet. In dem Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik Band 9 (1877) sagt Herr Mayer auf S. 265 über denselben Folgendes: „Der Aufsatz bringt eine neue von den früheren Mängeln befreite Darstellung der Weiler'schen Integrationsmethode. Auch die — — —. Dass aber die Weiler'sche Reduction nicht in allen Fällen anwendbar ist, wird bei dieser Auseinandersetzung der Vortheile der Methode nicht besonders erwähnt“. Der Leser des Jahrbuchs wird diesem Berichte entnehmen, dass die oben unter 4. besprochene Allgemeinheit der Integrationsmethode in der neuen Bearbeitung weggefallen sei. Es ist das aber nicht richtig. Denn ich habe in dem Aufsatz III die Allgemeinheit meiner Integrationsmethode aufrecht gehalten.

6. Die zweite Ausgabe des von Herrn Mansion verfassten Werkes „Theorie der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung“ ist 1892 in deutscher Uebersetzung erschienen. Dieselbe bringt das, was Clebsch in dem Journal für reine und angewandte Mathematik Band 65 über diesen Gegenstand veröffentlicht hat, als Methode von Clebsch (S. 184—190).

In Betreff des Anderen sagt Herr Mansion in einer Anmerkung: „In der ersten französischen Auflage dieses Werkes hatten wir nach Clebsch die im § 23 auseinandergesetzte Methode die Weiler'sche genannt, aber Weiler hat bemerkt, dass seine Methode von der in diesem Kapitel auseinandergesetzten verschieden ist. Die Weiler'sche Methode wurde von Mayer in den Math. Ann. 1875 Band 9 einer kritischen Untersuchung unterzogen. Es fehlte uns an Zeit, um eine Analyse der Arbeiten von Weiler zu geben". Da ich dem Herrn Mansion mein Bedauern darüber ausdrückte, dass er auf meine Methode einen so geringen Werth lege, sagt Herr Mansion in seiner Erwiderung vom 22. Mai 1892 unter Anderem Folgendes: „M. Mayer, qui a combattu votre méthode, a dû à la fin avouer qu'elle était irréprochable; mais il a accompagné cet aveu de restrictions. Je n'ai pas voulu citer ces restrictions".

Da also Clebsch in der Vergleichung meiner Methode zur Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit der Jacobi'schen den Umstand verschwiegen hat, dass meine Methode die Verallgemeinerung der von Lagrange gegebenen Integration der Gleichung $\psi(z, x, y, p, q) = 0$ ist, was die Jacobi'sche Methode nicht ist, Herr Mayer zehn Jahre nachher diese Thatsache in Abrede zu stellen für gut gefunden hat, da ferner Herr Mansion derselben in seinem neuesten Werke die Anerkennung versagt, so halte ich mich für verpflichtet, meinen früheren Darstellungen der Methode eine neue folgen zu lassen. Ich werde in den folgenden Erörterungen alle diejenigen Hülfsmittel, welche anderen Methoden entlehnt sind, unberührt lassen, und auf diesem Wege den Beweis führen, dass meine Methode, ebenso wie sie entstanden, unabhängig von anderen Methoden auch leicht verständlich ist.

7. Bevor ich zu dem sachlichen Theile meines Aufsatzes übergehe, möchte ich mir nicht versagen, dem Vorwort des Herrn Maser, des Herausgebers des Mansion'schen Werkes, einige Zeilen zu widmen. In diesem Vorwort wird gesagt: „Das Mansion'sche Buch ist bisher das einzige geblieben, welches in so eingehender Weise die verschiedenen Methoden, welche zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vorgeschlagen wurden, historisch-kritisch beleuchtet, ihre Beziehungen zu einander klar legt, ihre Vorzüge und Mängel gegenseitig abwägt und jedem Begründer dieser Methoden das Verdienst lässt, welches ihm zukommt. Es ist das einzige Werk dieser Art geblieben, einfach aus dem Grunde, weil es seine Aufgabe gleich in vollkommener und unübertrefflicher Weise löste". Die grosse und schwierige Unternehmung betreffend, bezweifle ich nicht, dass Herr Mansion viel Mühe aufgewendet hat, dieser Aufgabe gerecht zu werden. Ich muss aber gestehen, dass mir, den in diesem Aufsatz besprochenen Theil seiner Unternehmung betreffend, die Lobeserhebung des Herrn Maser unverständlich ist. Herr Mansion

hat eingeräumt, dass er unterlassen habe, sich selbst ein Urtheil über meine Methode zu bilden, dass er sich in diesem Betreff darauf beschränkt habe, die Besprechungen und Auslegungen der Herren Clebsch und Mayer in Betracht zu ziehen.

### § 1. Integration des vollständigen Systems partieller Differentialgleichungen von linearer Form.

8. Es seien in den partiellen Differentialgleichungen

$$1)\qquad a_1\frac{d\varphi}{dx_1}+a_2\frac{d\varphi}{dx_2}+a_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\cdots+a_n\frac{d\varphi}{dx_n}=0,$$

$$2)\qquad b_1\frac{d\varphi}{dx_1}+b_2\frac{d\varphi}{dx_2}+b_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\cdots+b_n\frac{d\varphi}{dx_n}=0,$$

welche zur Abkürzung mit $A(\varphi)=0$, $B(\varphi)=0$ bezeichnet werden, die Coefficienten $a_1$, $a_2\ldots b_1$, $b_2\ldots$ gegebene Functionen der $n$ Veränderlichen $x_1$, $x_2\ldots x_n$. Das System der Gleichungen $A(\varphi)=0$, $B(\varphi)=0$ wird ein vollständiges genannt, wenn dieselben $n-2$ gemeinsame Lösungen haben. Ich nehme an, diese Eigenschaft sei vorhanden, und werde aus meiner Annahme eine weitere Eigenschaft des Systems ableiten.

Die Gleichung $B(\varphi)=0$ hat bekanntlich $n-1$ Lösungen $\varphi=\beta_1$, $\varphi=\beta_2\ldots\varphi=\beta_{n-1}$. Die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen $B(\varphi)=0$ und $A(\varphi)=0$ sind daher als Functionen von $\beta_1$, $\beta_2\ldots\beta_{n-1}$ zu betrachten. Betrachtet man die Unbekannte $\varphi$ als eine Function dieser $n-1$ Lösungen, so ist die Gleichung $B(\varphi)=0$ eine identische, die Gleichung $A(\varphi)=0$ aber geht über in die folgende:

$$A(\beta_1)\frac{d\varphi}{d\beta_1}+A(\beta_2)\frac{d\varphi}{d\beta_2}+\cdots+A(\beta_{n-1})\frac{d\varphi}{d\beta_{n-1}}=0.$$

Ich theile durch $A(\beta_1)$, und habe die Gleichung:

$$1')\qquad \frac{d\varphi}{d\beta_1}+\frac{A(\beta_2)}{A(\beta_1)}\frac{d\varphi}{d\beta_2}+\cdots+\frac{A(\beta_{n-1})}{A(\beta_1)}\frac{d\varphi}{d\beta_{n-1}}=0.$$

In die Coefficienten der Gleichung 1′) setze ich an die Stelle der Veränderlichen $x_1$, $x_2\ldots x_{n-1}$ die neuen Veränderlichen $\beta_1$, $\beta_2\ldots\beta_{n-1}$ ein. Die Veränderliche $x_n$ fällt dann aus den Coefficienten von selbst hinaus. Dieser Satz folgt ohne Weiteres aus meiner Annahme, dass die beiden Gleichungen $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$ ein vollständiges System bilden. Wenn bei der Elimination von $x_1$, $x_2\ldots x_{n-1}$ nicht auch die Veränderliche $x_n$ aus den Coefficienten hinausfiele, so könnte die Gleichung 1′) nicht $n-2$ Lösungen haben, welche unabhängig von $x_n$ als Functionen der $n-1$ Veränderlichen $\beta_1$, $\beta_2\ldots\beta_{n-1}$ gegeben sind.

Wird diese Folgerung nicht als überzeugend angesehen, so muss ich freilich den Beweis weiter ausführen. Gegenüber der Behauptung, die Veränderliche $x_n$ sei in den Coefficienten der Gleichung 1′) noch vorhanden,

nachdem man die Veränderlichen $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ vermittelst $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n-1}$ eliminirt hat, kann ich darauf hinweisen, dass die Gleichung 1') eine identische ist, nachdem man irgend eine der $n-2$ den Gleichungen $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$ gemeinsamen Lösungen an die Stelle von $\varphi$ eingesetzt hat. Die Gleichung 1') würde auch dann eine identische sein, wenn sie partiell nach $x_n$ differentiirt wird. Da nach der Voraussetzung $\varphi$ als Function von $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n-1}$ unabhängig von $x_n$ ist, so erstreckt sich diese partielle Differentiation nur auf die Coefficienten der Gleichung 1'), welche alsdann übergeht in:

$$\frac{d\frac{A(\beta_2)}{A(\beta_1)}}{dx_n}\,\frac{d\varphi}{d\beta_2}+\cdots+\frac{d\frac{A(\beta_{n-1})}{A(\beta_1)}}{dx_n}\,\frac{d\varphi}{d\beta_{n-1}}=0.$$

Die neue Gleichung hat nur in dem Falle die erwähnten $n-2$ Lösungen $\varphi$, wenn sie mit der Gleichung 1') identisch ist. Das Letztere ist aber nicht möglich, wegen des fehlenden Differentialquotienten $\frac{d\varphi}{d\beta_1}$. Es müssen daher in der neuen Gleichung auch die übrigen Coefficienten gleich Null sein, und es folgt aus dieser Forderung, dass die Coefficienten der Gleichung 1') unabhängig von $x_n$ sind.

Eine weitere Eigenschaft des vollständigen Systems der Gleichungen $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$ ist nun durch den folgenden Satz ausgedrückt: **Sind $\varphi=\beta_1$ und $\varphi=\beta_2$ Lösungen der Gleichung $B(\varphi)=0$, so ist der Quotient $\frac{A(\beta_2)}{A(\beta_1)}$ eine Function der $n-1$ Lösungen $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n-1}$ und demzufolge selbst eine Lösung der Gleichung $B(\varphi)=0$.**

Um diesen Satz für die Integration des vollständigen Systems der zwei partiellen Differentialgleichungen förderlicher zu machen, schreibe ich anstatt der letzteren die lineare Verbindung der beiden Gleichungen, welche durch die Elimination von $\frac{d\varphi}{dx_1}$ entsteht. Die zu integrirenden Gleichungen sind dann:

$$1)\qquad a_1\frac{d\varphi}{dx_1}+a_2\frac{d\varphi}{dx_2}+a_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\cdots+a_n\frac{d\varphi}{dx_n}=0,$$

$$2)\qquad b_2\frac{d\varphi}{dx_2}+b_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\cdots+b_n\frac{d\varphi}{dx_n}=0,$$

von welchen die letztere nur $n-1$ unabhängige Veränderliche hat. Es ist $\varphi=x_1$ eine Lösung der Gleichung 2). Ich bestimme eine zweite Lösung $\varphi=\beta_2$ durch die Integration dieser Gleichung, und erhalte alsdann weitere Lösungen derselben Gleichung in der Form:

$$\beta_3=\frac{A(\beta_2)}{A(x_1)},\quad \beta_4=\frac{A(\beta_3)}{A(x_1)}\cdots\beta_{n-1}=\frac{A(\beta_{n-2})}{A(x_1)}.$$

Es versteht sich, dass $\beta_n=\frac{A(\beta_{n-1})}{A(x_1)}$ nicht noch eine weitere Lösung der

Gleichung $B(\varphi)=0$ ist, sondern nur eine Function der vorausgehenden $n-1$ Lösungen $x_1$, $\beta_2$, $\beta_3 \dots \beta_{n-1}$. Da nun die $n-1$ Lösungen der Gleichung $B(\varphi)=0$ bekannt sind, so setze ich dieselben als neue Veränderliche in die Gleichung $A(\varphi)=0$ ein. Die transformirte Gleichung

$$1') \qquad \frac{d\varphi}{dx_1}+\frac{A(\beta_2)}{A(x_1)}\frac{d\varphi}{d\beta_2}+\cdots+\frac{A(\beta_{n-1})}{A(x_1)}\frac{d\varphi}{d\beta_{n-1}}=0$$

hat $n-1$ unabhängige Veränderliche. Durch deren Integration ergeben sich die verlangten $n-2$ Lösungen des vollständigen Systems.

Es kann der Fall eintreten, dass sich der Quotient $\frac{A(\beta_{i-1})}{A(x_1)}$, wo $i<n$ ist, als eine Function der bekannten Lösungen $x_1$, $\beta_2 \dots \beta_{i-2}$ der Gleichung 2) darstellt. Durch die vorgeschriebene Transformation wird dann die Gleichung 1) übergeführt in eine partielle Differentialgleichung mit $i-1$ unabhängigen Veränderlichen. Die Integration dieser Gleichung liefert selbstverständlich nur $i-2$ Lösungen des vollständigen Systems.

In den obigen Lösungen ist der Nenner $A(x_1)=a_1$. Es steht Nichts im Wege, in der Gleichung $A(\varphi)=0$ den Coefficienten $a_1=1$ zu setzen, und man sieht nun, dass das vorliegende System, obwohl es nicht ein Jacobi'sches ist, doch jene Eigenschaft besitzt, auf welche Poisson zuerst hingewiesen hat. Wenn nämlich $\varphi=\beta_2$ eine Lösung der Gleichung $B(\varphi)=0$ ist, so sind $\beta_3=A(\beta_2)$, $\beta_4=A(\beta_3)\dots$ als weitere Lösungen dieser Gleichung zu betrachten.

9. Drei partielle Differentialgleichungen $A(\varphi)=0$, $B(\varphi)=0$, $C(\varphi)=0$ bilden ein vollständiges System, wenn sie $n-3$ gemeinsame Lösungen haben. Um ein vollständiges System dieser Art zu integriren, bilde ich zwei lineare Verbindungen der drei Gleichungen, in welchen der Differentialquotient $\frac{d\varphi}{dx_1}$ fehlt. Die zwei neuen Gleichungen geben eine lineare Verbindung, in welcher auch der Differentialquotient $\frac{d\varphi}{dx_2}$ fehlt. Die zu integrirenden Gleichungen haben nun die folgende Form:

$$1) \qquad a_1\frac{d\varphi}{dx_1}+a_2\frac{d\varphi}{dx_2}+a_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\cdots+a_n\frac{d\varphi}{dx_n}=0,$$

$$2) \qquad b_2\frac{d\varphi}{dx_2}+b_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\cdots+b_n\frac{d\varphi}{dx_n}=0,$$

$$3) \qquad c_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\cdots+c_n\frac{d\varphi}{dx_n}=0.$$

Es ist zu beachten, dass die Gleichungen 2) und 3) für sich genommen ein vollständiges System bilden. Denn diese Gleichungen haben nach der Voraussetzung die $n-3$ Lösungen des Systems der drei Gleichungen, ausserdem haben sie die gemeinsame Lösung $\varphi=x_1$, welche nicht eine

Lösung des Systems der drei Gleichungen ist. Die Gleichungen 2) und 3) haben also $n-2$ gemeinsame Lösungen, und bilden demzufolge ein vollständiges System. Die Gleichung 3) hat $n-2$ unabhängige Veränderliche. Es sind $\varphi = x_1$, $\varphi = x_2$ Lösungen der Gleichung 3), von denen die erstere eine der den Gleichungen 3) und 2) gemeinsamen ist. Ich bestimme eine dritte Lösung $\varphi = \gamma_3$ durch die Integration der Gleichung 3) und erhalte alsdann die weiteren Lösungen in der Form:

$$\gamma_4 = \frac{B(\gamma_3)}{B(x_2)}, \quad \gamma_5 = \frac{B(\gamma_4)}{B(x_2)} \cdots \gamma_{n-1} = \frac{B(\gamma_{n-2})}{B(x_2)}.$$

Da nun die $n-1$ Lösungen der Gleichung 3) bekannt sind, so setze ich dieselben als neue Veränderliche in die Gleichung 2) ein. Dieselbe geht über in:

$$2') \qquad \frac{d\varphi}{dx_2} + \frac{B(\gamma_3)}{B(x_2)} \frac{d\varphi}{d\gamma_3} + \cdots + \frac{B(\gamma_{n-1})}{B(x_2)} \frac{d\varphi}{d\gamma_{n-1}} = 0,$$

welche gleichfalls $n-2$ unabhängige Veränderliche hat. Es ergeben sich aus derselben die den Gleichungen 2) und 3) gemeinsamen Lösungen.

Die Gleichung 2′) hat die Lösung $\varphi = x_1$ und die weiteren Lösungen $\beta_2, \beta_3 \ldots \beta_{n-2}$, welche sich als Functionen der $n$ Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ darstellen. Die gemeinsamen Lösungen der drei Gleichungen $A(\varphi) = 0$, $B(\varphi) = 0$, $C(\varphi) = 0$ sind als Functionen der $n-2$ Lösungen $x_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \beta_{n-2}$ zu betrachten. Setzt man diese Lösungen als neue Veränderliche an die Stelle von $x_1, x_2 \ldots x_{n-2}$ in die Gleichung $A(\varphi) = 0$ ein, so geht dieselbe über in:

$$1') \qquad \frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{A(\beta_2)}{A(x_1)} \frac{d\varphi}{d\beta_2} + \frac{A(\beta_3)}{A(x_1)} \frac{d\varphi}{d\beta_3} + \cdots + \frac{A(\beta_{n-2})}{A(x_1)} \frac{d\varphi}{d\beta_{n-2}} = 0.$$

Die noch übrigen Veränderlichen $x_{n-1}$, $x_n$ fallen aus den Coefficienten der transformirten Gleichung von selbst hinaus. Es bedarf das nicht eines weiteren Beweises. Wenn bei der Elimination der Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_{n-2}$ nicht auch die Veränderlichen $x_{n-1}$, $x_n$ aus den Coefficienten hinausfielen, so könnte die Gleichung 1′) nicht $n-3$ Lösungen haben, welche unabhängig von $x_{n-1}$, $x_n$ als Functionen der $n-2$ Lösungen $x_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \beta_{n-2}$ gegeben sind. Die Coefficienten der Gleichung 1′) enthalten also neben den $n-2$ Lösungen $x_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \beta_{n-2}$ keine weiteren Veränderlichen des Systems der drei Gleichungen, und sind demzufolge selbst als Lösungen der Gleichung 2′) zu betrachten.

Es ist schon erwähnt worden, dass die Gleichung 2′) die Lösung $\varphi = x_1$ habe. Ich bestimme durch die Integration dieser Gleichung eine zweite Lösung $\varphi = \beta_2$, und erhalte alsdann weitere Lösungen derselben Gleichung in der Form:

$$\beta_3 = \frac{A(\beta_2)}{A(x_1)}, \quad \beta_4 = \frac{A(\beta_3)}{A(x_1)} \cdots \beta_{n-2} = \frac{A(\beta_{n-3})}{A(x_1)}.$$

Die $n-2$ Lösungen der Gleichung 2′) sind als neue Veränderliche in die Gleichung $A(\varphi)=0$ einzusetzen. Die transformirte Gleichung 1′) hat $n-2$ unabhängige Veränderliche. Durch deren Integration ergeben sich die verlangten $n-3$ gemeinsamen Lösungen der Gleichungen 1), 2), 3).

10. Es hat nun keine Schwierigkeit, diese Methode auf die Integration eines vollständigen Systems von $m$ partiellen Differentialgleichungen anzuwenden, wo selbstverständlich $m<n$ ist. In der ersten Gleichung behalte man die sämmtlichen $n$ partiellen Differentialquotienten von $\varphi$ nach $x_1, x_2 \dots x_n$. Durch lineare Verbindungen der $m$ Gleichungen bilde man eine zweite, in welcher der Differentialquotient $\frac{d\varphi}{dx_1}$ fehlt, eine dritte, in welcher die Differentialquotienten $\frac{d\varphi}{dx_1}$ und $\frac{d\varphi}{dx_2}$ fehlen u. s. w., eine $m^{\text{te}}$, in welcher die Differentialquotienten $\frac{d\varphi}{dx_1}, \frac{d\varphi}{dx_2} \cdots \frac{d\varphi}{dx_{n-m+1}}$ fehlen. Es ist zu beachten, dass die $m-1$ letzten Gleichungen ein vollständiges System bilden, weil sie neben den $n-m$ Lösungen des Systems der $m$ Gleichungen die weitere gemeinsame Lösung $\varphi=x_1$ haben. Ebenso bilden die $m-2$ letzten Gleichungen ein vollständiges System, weil sie neben jenen $n-m$ Lösungen die weiteren gemeinsamen Lösungen $\varphi=x_1$ und $\varphi=x_2$ haben u. s. w. Auch die zwei letzten Gleichungen bilden ein vollständiges System. Denn es haben dieselben neben jenen $n-m$ Lösungen die weiteren gemeinsamen Lösungen $\varphi=x_1,\ \varphi=x_2 \dots \varphi=x^{m-2}$.

Die Integration des vollständigen Systems gestaltet sich in folgender Weise: **Von der letzten Gleichung und von jedem der vorerwähnten $m-2$ vollständigen Systeme hat man je eine Lösung durch die Integration einer gegebenen partiellen Differentialgleichung mit $n-m+1$ unabhängigen Veränderlichen zu bestimmen. Auch die $n-m$ Lösungen des Systems der $m$ Gleichungen bestimmen sich durch die Integration einer partiellen Differentialgleichung mit $n-m+1$ unabhängigen Veränderlichen. Im Ganzen sind also $(m-1)+(n-m)=n-1$ Integrationen von partiellen Differentialgleichungen mit je $n-m+1$ unabhängigen Veränderlichen auszuführen, um die $n-m$ Lösungen des Systems der $m$ Gleichungen zu erhalten.**

Die zu integrirenden partiellen Differentialgleichungen haben eine bemerkenswerthe Eigenschaft: **Nur die an erster Stelle zu integrirende Gleichung $m$) enthält die sämmtlichen $n$ Veränderlichen $x_1, x_2 \dots x_n$ des Systems der $m$ partiellen Differentialgleichungen, $m-1$ derselben übrigens nicht als Veränderliche der Gleichung $m$), sondern als blose Parameter. In der Reihenfolge der zu integrirenden Gleichungen enthält die zweite neben den $n-m+1$ unabhängigen Veränderlichen nur $m-2$ derartige Parameter, die dritte deren nur $m-3$ u. s. w.** Die

**$m^{\text{te}}$ Gleichung, aus welcher sich die $n-m$ Lösungen des vollständigen Systems der $m$ partiellen Differentialgleichungen ergeben, enthält neben den $n-m+1$ unabhängigen Veränderlichen keinen derartigen Parameter.**

Infolge dieser Eigenschaft der zu integrirenden partiellen Differentialgleichungen werden die $n-m$ Lösungen des vollständigen Systems in einer vorzugsweise einfachen Form dargestellt. Diese $n-m$ Lösungen ergeben sich als Functionen von $n-m+1$ Veränderlichen. Neben den letzteren enthalten dieselben nicht noch andere Veränderliche des Systems der $m$ Gleichungen. Man kann dieselben leicht auch als Functionen der ursprünglichen Veränderlichen darstellen. Denn es sind jene $n-m+1$ Veränderlichen als Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ bestimmt worden. Man darf aber annehmen, dass durch die hierzu erforderlichen Substitutionen die $n-m$ Lösungen des Systems eine Gestalt annehmen, welche meist verwickelter ist als die vorliegende.

### § 2. Die allgemeine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung wird zurückgeführt auf vollständige Systeme partieller Differentialgleichungen von linearer Form.

11. Ich schreibe die allgemeine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung in der Form:

$$\psi_1(z, x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n) = 0,$$

wo $p_1, p_2 \ldots p_n$ die partiellen Differentialquotienten von $z$ nach $x_1, x_2 \ldots x_n$ sind. Entsprechend der von Lagrange für den Fall $n=2$ gegebenen Lösung der Aufgabe sollen nun die $n$ partiellen Differentialquotienten $p_1, p_2 \ldots p_n$ als Functionen der $n+1$ Veränderlichen $z, x_1, x_2 \ldots x_n$ dargestellt werden. Sind diese Functionen bekannt, so gelangt man zu dem Integral der Gleichung $\psi_1 = 0$ durch die Integration der vollständigen Differentialgleichung:

$$dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \cdots + p_n\,dx_n.$$

Die Bestimmung der Werthe von $p_1, p_2 \ldots p_n$ wird bekanntlich in folgender Weise zu Stande gebracht. Aus der vorliegenden Gleichung $\psi_1 = 0$ werden die $n-1$ ähnlichen $n$ Gleichungen hergeleitet:

$$\text{I)} \qquad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = 0 \ldots \psi_n = 0,$$

in deren jeder links eine Function der $2n+1$ Veränderlichen $z, x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n$ steht. Durch die Auflösung der $n$ Gleichungen

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = 0 \ldots \psi_n = 0$$

ergeben sich die Werthe von $p_1, p_2 \ldots p_n$ als Functionen der $n+1$ Veränderlichen $z, x_1, x_2 \ldots x_n$.

Die Gleichungen I) sind bekanntlich Integrale gegebener Systeme partieller Differentialgleichungen von linearer Form. Auf die Herleitung *dieser* Systeme brauche ich hier nicht einzugehen. Die Herleitung, welche

von mir im § 1 meines Aufsatzes II (1875) gegeben ist, stimmt im Wesentlichen mit den auch anderen Orts gegebenen Herleitungen überein. Ich setze zur Abkürzung:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\left(\frac{d\psi}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\psi}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right)=(\psi\varphi).$$

Durch die den partiellen Differentialquotienten nach $x_i$ beigefügten Klammern wird angezeigt, dass bei der partiellen Differentiation auch die Grösse $z$ als Function von $x_i$ gedacht wird, dass also die identischen Gleichungen bestehen:

$$\left(\frac{d\psi}{dx_i}\right)=\frac{d\psi}{dz}p_i+\frac{d\psi}{dx_i},\quad \left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)=\frac{d\varphi}{dz}p_i+\frac{d\varphi}{dx_i}.$$

Es ist $\varphi=\psi_2$ eine Lösung der Gleichung:

$$(\psi_1\varphi)=0.$$

Es ist ferner $\varphi=\psi_3$ eine gemeinsame Lösung der zwei Gleichungen:

$$(\psi_1\varphi)=0,\quad (\psi_2\varphi)=0,$$

$\varphi=\psi_4$ eine gemeinsame Lösung der drei Gleichungen:

$$(\psi_1\varphi)=0,\quad (\psi_2\varphi)=0,\quad (\psi_3\varphi)=0,$$

und schliesslich $\varphi=\psi_n$ eine gemeinsame Lösung der $n-1$ Gleichungen:

$$(\psi_1\varphi)=0,\quad (\psi_2\varphi)=0,\quad (\psi_3\varphi)=0\ldots(\psi_{n-1}\varphi)=0.$$

12. Man bestimmt aber auf diesem Wege nicht das allgemeine Integral der Gleichung $\psi_1=0$, sondern nur ein vollständiges Integral. Das letztere hat die Form $\alpha=c_1$, wo $c_1$ eine willkürliche Beständige und $\alpha$ eine bestimmte Function der $n+1$ Veränderlichen $z, x_1, x_2\ldots x_n$ ist, welche $n-1$ weitere willkürliche Beständige $c_2, c_3\ldots c_n$ enthält. Ist ein vollständiges Integral bekannt, so gelangt man zu dem allgemeinen Integral auf dem folgenden Wege. Man setze in das vollständige Integral an die Stelle von $c_1$ eine willkürliche Function von $c_2, c_3\ldots c_n$, schreibe dasselbe demzufolge in der Form:

$$\alpha=\psi(c_2, c_3\ldots c_n).$$

Es zeigt sich, dass man aus der Function $\alpha$ leicht $n-1$ weitere Functionen von $z, x_1, x_2\ldots x_n$ ableitet, welche die Eigenschaft haben, das vollständige Integral in das allgemeine Integral überzuführen, sobald sie an die Stelle von $c_2, c_3\ldots c_n$ eingesetzt werden.

Durch die Differentiation des vollständigen Integrals $\alpha=\psi$ entsteht die Gleichung:

$$\frac{d\alpha}{dz}dz+\frac{d\alpha}{dx_1}dx_1+\frac{d\alpha}{dx_2}dx_2+\cdots+\frac{d\alpha}{dx_n}dx_n=0,$$

welche auf Grund der Gleichungen:

$$\text{II)}\quad \frac{d\alpha}{dz}p_1+\frac{d\alpha}{dx_1}=0,\quad \frac{d\alpha}{dz}p_2+\frac{d\alpha}{dx_2}=0\cdots\frac{d\alpha}{dz}p_n+\frac{d\alpha}{dx_n}=0$$

in die unter 11. erwähnte vollständige Differentialgleichung:

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$$

übergeht. Es sind die Gleichungen II) durch partielle Differentiationen aus $\alpha = \psi$ abgeleitet, und gleichbedeutend mit jenen Gleichungen, durch welche sich die partiellen Differentialquotienten $p_1, p_2 \ldots p_n$ als Functionen der $n+1$ Veränderlichen $z, x_1, x_2 \ldots x_n$ und der Beständigen $c_2, c_3 \ldots c_n$ bestimmen.

Betrachtet man bei der Differentiation der Gleichung $\alpha = \psi$ die Grössen $c_2, c_3 \ldots c_n$ als veränderlich, so entsteht die folgende Gleichung:

$$\frac{d\alpha}{dz}dz + \frac{d\alpha}{dx_1}dx_1 + \frac{d\alpha}{dx_2}dx_2 + \cdots + \frac{d\alpha}{dx_n}dx_n$$
$$+ \left(\frac{d\alpha}{dc_2} - \frac{d\psi}{dc_2}\right)dc_2 + \left(\frac{d\alpha}{dc_3} - \frac{d\psi}{dc_3}\right)dc_3 + \cdots + \left(\frac{d\alpha}{dc_n} - \frac{d\psi}{dc_n}\right)dc_n = 0.$$

Werden aber zum Behufe einer Bestimmung der veränderlich gedachten Grössen $c_2, c_3 \ldots c_n$ die folgenden $n-1$ Gleichungen aufgestellt:

$$\text{III)} \qquad \frac{d\alpha}{dc_2} = \frac{d\psi}{dc_2}, \quad \frac{d\alpha}{dc_3} = \frac{d\psi}{dc_3} \cdots \frac{d\alpha}{dc_n} = \frac{d\psi}{dc_n},$$

so hat man wieder die vollständige Differentialgleichung:

$$\frac{d\alpha}{dz}dz + \frac{d\alpha}{dx_1}dx_1 + \frac{d\alpha}{dx_2}dx_2 + \cdots + \frac{d\alpha}{dx_n}dx_n,$$

welche sich von der obigen gleichlautenden nur dadurch unterscheidet, dass in derselben die Grössen $c_2, c_3 \ldots c_n$ nicht beständig, sondern veränderlich sind.

Auch die Gleichungen II) erleiden bei dieser Anordnung keine Aenderung. Indem man die $n-1$ Grössen $c_2, c_3 \ldots c_n$ zwischen den $n$ Gleichungen

$$\text{II)} \quad \frac{d\alpha}{dz}p_1 + \frac{d\alpha}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dz}p_2 + \frac{d\alpha}{dx_2} = 0 \cdots \frac{d\alpha}{dz}p_n + \frac{d\alpha}{dx_n} = 0$$

eliminirt, gelangt man zu ein und derselben partiellen Differentialgleichung $\psi_1 = 0$, mögen nun die Grössen $c_2, c_3 \ldots c_n$ als beständig oder als veränderlich gedacht werden. Es folgt hieraus, dass die Gleichung

$$\alpha = \psi(c_2, c_3 \ldots c_n)$$

auch dann ein Integral der partiellen Differentialgleichung $\psi_1 = 0$ ist, wenn an die Stelle der Beständigen $c_2, c_3 \ldots c_n$ die erwähnten veränderlichen Werthe eingesetzt werden. Die Gleichung $\alpha = \psi$ ist in dem letzteren Falle als das allgemeine Integral der Gleichung $\psi_1 = 0$ zu betrachten.

13. Es lassen sich nun leicht auch diejenigen Werthe der partiellen Differentialquotienten $p_1, p_2 \ldots p_n$, welche in die vollständige Differentialgleichung eingesetzt zu dem allgemeinen Integral der Gleichung $\psi_1 = 0$ führen, aus den dem vollständigen Integral entsprechenden Werthen dieser Differentialquotienten ableiten. Werden die $n$ Gleichungen

II) $\frac{d\alpha}{dz}p_1 + \frac{d\alpha}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dz}p_2 + \frac{d\alpha}{dx_2} = 0 \cdots \frac{d\alpha}{dz}p_n + \frac{d\alpha}{dx_n} = 0,$

durch welche die partiellen Differentialquotienten $p_1, p_2 \ldots p_n$ als Functionen von $z, x_1, x_2 \ldots x_n$ und von $c_2, c_3 \ldots c_n$ ausgedrückt sind, nach den $n-1$ Grössen $c_2, c_3 \ldots c_n$ aufgelöst, so ergeben sich hiermit neben der zu integrirenden Gleichung $\psi_1 = 0$ die $n-1$ weiteren Gleichungen:

IV) $\varphi_2 = c_2, \quad \varphi_3 = c_3 \ldots \varphi_n = c_n.$

Betrachtet man die Grössen $c_2, c_3 \ldots c_n$ als beständig, so dienen diese Gleichungen in Verbindung mit der zu integrirenden Gleichung $\psi_1 = 0$ zur Bestimmung eines vollständigen Integrals. Setzt man aber die aus den Gleichungen

III) $\frac{d\alpha}{dc_2} = \frac{d\psi}{dc_2}, \quad \frac{d\alpha}{dc_3} = \frac{d\psi}{dc_3} \cdots \frac{d\alpha}{dc_n} = \frac{d\psi}{dc_n}$

herzuleitenden Werthe von $c_2, c_3 \ldots c_n$ in die Gleichungen IV) ein, so sind die letzteren identisch mit jenen Gleichungen

I) $\psi_2 = 0, \quad \psi_3 = 0 \ldots \psi_n = 0,$

welche in Verbindung mit der zu integrirenden Gleichung $\psi_1 = 0$ zu dem allgemeinen Integral führen.

Die veränderlichen Werthe von $c_2, c_3 \ldots c_n$ betreffend führe ich die neuen Veränderlichen

$$\frac{d\alpha}{dc_2} = \varkappa_2, \quad \frac{d\alpha}{dc_3} = \varkappa_3 \cdots \frac{d\alpha}{dc_n} = \varkappa_n$$

in die Gleichungen III) ein. Offenbar sind nun die Werthe von $c_2, c_3 \ldots c_n$ willkürliche Functionen von $\varkappa_2, \varkappa_3 \ldots \varkappa_n$. Man hat demgemäss jede der Grössen $\psi_2, \psi_3 \ldots \psi_n$ als eine willkürliche Function der $n-1$ Veränderlichen $\varkappa_2, \varkappa_3 \ldots \varkappa_n$ und je einer der Veränderlichen $\varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_n$ zu betrachten.

**14.** Da es sich nun um die Bestimmung eines vollständigen Integrals handelt, da also die Gleichungen

IV) $\varphi_2 = c_2, \quad \varphi_3 = c_3 \ldots \varphi_n = c_n$

für den Fall hergeleitet werden sollen, dass die Grössen $c_2, c_3 \ldots c_n$ beständig sind, so treten andere Systeme partieller Differentialgleichungen an die Stelle der unter 11. angegebenen. Es ist $\varphi = \varphi_2$ eine Lösung der Gleichung:

1) $(\psi_1 \varphi) = 0.$

Es ist ferner $\varphi = \varphi_3$ eine gemeinsame Lösung der zwei Gleichungen:

2) $(\psi_1 \varphi) = 0, \quad (\varphi_2 \varphi) = 0,$

$\varphi = \varphi_4$ eine gemeinsame Lösung der drei Gleichungen:

3) $$(\psi_1 \varphi) = 0, \quad (\varphi_2 \varphi) = 0, \quad (\varphi_3 \varphi) = 0,$$

und schliesslich $\varphi = \varphi_n$ eine gemeinsame Lösung der $n-1$ Gleichungen:

$n-1$) $$(\psi_1 \varphi) = 0, \quad (\varphi_2 \varphi) = 0, \quad (\varphi_3 \varphi) = 0 \ldots (\varphi_{n-1} \varphi) = 0.$$

Der Nachweis, dass die Systeme 2), 3) ... $n-1$) vollständige sind, hat keine Schwierigkeit, wenn man den Zusammenhang, welcher zwischen dem vollständigen Integral der Gleichung $\psi_1 = 0$ und dem allgemeinen Integral dieser Gleichung besteht, nicht aus dem Auge verliert. Ich brauche zu dem Vorausgehenden nur hinzuzufügen, dass es nicht nöthig ist, in der Gleichung

$$\alpha = \psi(c_3, c_3 \ldots c_n)$$

die Beständigen $c_2, c_3 \ldots c_n$ sämmtlich zu variiren, um neben dem vollständigen ein weiteres Integral der Gleichung $\psi_1 = 0$ zu erhalten. Es ist anheim gestellt, von diesen Beständigen beliebig viele zu variiren, auf Grund von ebenso vielen der Gleichungen III), und die übrigen Beständigen unvariirt zu lassen. Man gelangt auf diesem Wege jedesmal zu einem Integral der Gleichung $\psi_1 = 0$, welches zwar nicht das allgemeine Integral, doch allgemeiner als das vollständige Integral ist.

Jede der unter 11. angegebenen partiellen Differentialgleichungen

$$(\psi_1 \varphi) = 0, \quad (\psi_2 \varphi) = 0, \quad (\psi_3 \varphi) = 0 \ldots (\psi_{n-1} \varphi) = 0$$

hat die $2n+1$ unabhängigen Veränderlichen $z, x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n$, und demzufolge $2n$ Lösungen. Der Entstehungsart dieser Gleichungen ist bekanntlich zu entnehmen, dass dieselben neben der Lösung $\varphi = \psi_1$ die $n-1$ gemeinsamen Lösungen:

$\alpha$) $$\varphi = \psi_2, \quad \varphi = \psi_3 \ldots \varphi = \psi_n$$

haben. Dass die Gleichung $(\psi_1 \varphi) = 0$ diese $n-1$ Lösungen hat, ist mit Bezug auf das unter 13. Gesagte nur damit ermöglicht, dass in derselben neben den Lösungen

$\beta$) $$\varphi = \varphi_2, \quad \varphi = \varphi_3 \ldots \varphi = \varphi_n$$

auch die Lösungen:

$\gamma$) $$\varphi = \varkappa_2, \quad \varphi = \varkappa_3 \ldots \varphi = \varkappa_n$$

vorhanden sind.

Ich habe unter 13. gezeigt, dass die Gleichungen

IV) $$\varphi_2 = c_2, \quad \varphi_3 = c_3 \ldots \varphi_n = c_n$$

in Verbindung mit der Gleichung $\psi_1 = 0$ gleichbedeutend sind mit jenen Gleichungen II), welche durch partielle Differentiationen der Gleichung $\alpha = c_1$ entstanden sind, und zufolge der unter 11. vorgeschlagenen Abkürzung in der einfacheren Form:

$$\left(\frac{d\alpha}{dx_1}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\alpha}{dx_2}\right) = 0 \cdots \left(\frac{d\alpha}{dx_n}\right) = 0$$

geschrieben werden. Es folgt hieraus, dass in jeder der obigen partiellen Differentialgleichungen, wenn dieselbe neben der Lösung $\psi = \psi_1$ die

Lösungen $\beta$) hat, auch die Lösung $\varphi = \alpha$ vorhanden ist. Denkt man sich die Veränderlichen $p_1, p_2 \dots p_n$ vermittelst der Gleichungen

$$\psi_1 = 0, \quad \varphi_2 = c_2, \quad \varphi_3 = c_3 \dots \varphi_n = c_n$$

eliminirt, so fallen die partiellen Differentialquotienten von $\varphi$ nach $p_1, p_2 \dots p_n$ aus der Gleichung weg. Wird alsdann $\varphi = \alpha$ gesetzt, so ist dieselbe auf Grund der Gleichungen II) eine identische. Da also $\varphi = \alpha$ eine Lösung der Gleichung $(\psi_1 \varphi) = 0$ ist, so sind nun die sämmtlichen $2n$ Lösungen dieser Gleichung auf das vollständige Integral $\alpha = c_1$ zurückgeführt.

Daraus, dass die Gleichung $(\psi_2 \varphi) = 0$ die Lösungen $\alpha$) hat, kann nicht gefolgert werden, dass sie auch die Lösungen $\beta$) und $\gamma$) habe. Führt man aber die Gleichung $(\psi_2 \varphi) = 0$ über in $(\varphi_2 \varphi) = 0$, indem man an die Stelle von $\psi_2 = 0$ die weniger allgemeine Gleichung $\varphi_2 = c_2$ setzt, in welcher $c_2$ eine Beständige ist, so hat die Gleichung $(\varphi_2 \varphi) = 0$ neben den Lösungen $\varphi = \psi_1$, $\varphi = \varphi_2$ die weiteren $n-2$ Lösungen

$$\alpha') \qquad \varphi = \psi_3, \quad \varphi = \psi_4 \dots \varphi = \psi_n.$$

Da also $c_2$ eine Beständige ist, so fällt die erste der Gleichungen III) weg, und es ist die Veränderliche $\varkappa_2$ nicht vorhanden. Die Werthe von $c_3$, $c_4 \dots c_n$ sind nun als willkürliche Functionen der Veränderlichen $\varkappa_3, \varkappa_4 \dots \varkappa_n$ zu betrachten. Die Gleichung $(\varphi_2 \varphi) = 0$ kann aber die $n-2$ Lösungen $\alpha'$) nur dann enthalten, wenn sie neben den Lösungen

$$\beta') \qquad \varphi = \varphi_3, \quad \varphi = \varphi_4 \dots \varphi = \varphi_n$$

auch die Lösungen:

$$\gamma') \qquad \varphi = \varkappa_3, \quad \varphi = \varkappa_4 \dots \varphi = \varkappa_n$$

hat. Die Gleichung $(\varphi_2 \varphi) = 0$ hat auch die Lösung $\varphi = \alpha$. Es sind daher im Ganzen $2n-1$ Lösungen dieser Gleichung bekannt.

Daraus, dass ferner die Gleichung $(\psi_3 \varphi) = 0$ die Lösungen $\alpha'$) hat, kann nicht gefolgert werden, dass sie auch die Lösungen $\beta'$) und $\gamma'$) habe. Lässt man aber diese Gleichung übergehen in $(\varphi_3 \varphi) = 0$, indem man an die Stelle von $\psi_3 = 0$ die weniger allgemeine Gleichung $\varphi_3 = c_3$ setzt, in welcher $c_3$ eine Beständige ist, so hat die Gleichung $(\varphi_3 \varphi) = 0$ neben den Lösungen $\varphi = \psi_1$, $\varphi = \varphi_2$, $\varphi = \varphi_3$ die weiteren $n-3$ Lösungen:

$$\alpha'') \qquad \varphi = \psi_4 \dots \varphi = \psi_n.$$

Aus der Annahme, dass $c_3$ eine Beständige sei, folgt, dass hier die Veränderliche $\varkappa_3$ wegfällt, dass also die Werthe von $c_4 \dots c_n$ als willkürliche Functionen von $\varkappa_4 \dots \varkappa_n$ vorliegen. Die Gleichung $(\varphi_3 \varphi) = 0$ kann aber die $n-3$ Lösungen $\alpha''$) nur dann enthalten, wenn neben den Lösungen

$$\beta'') \qquad \varphi = \varphi_4 \dots \varphi = \varphi_n$$

auch die Lösungen

$$\gamma'') \qquad \varphi = \varkappa_4 \dots \varphi = \varkappa_n$$

vorhanden sind. Die Gleichung $(\varphi_3 \varphi) = 0$ hat auch die Lösung $\varphi = \alpha$, und es sind hiermit $2n-2$ Lösungen dieser Gleichung festgestellt. Schliess-

lich findet man, dass in der Gleichung $(\varphi_{n-1}\varphi)=0$ neben den $n+1$ Lösungen $\varphi=\psi_1$, $\varphi=\varphi_2$, $\varphi=\varphi_3\dots\varphi=\varphi_n$, $\varphi=\alpha$ nur die eine weitere Lösung $\varphi=\varkappa_n$ gegeben ist, dass also im Ganzen $n+2$ Lösungen der Gleichung $(\varphi_{n-1}\varphi)=0$ bekannt sind.

Das Vorausgehende führt zu dem folgenden Resultat: **Das System 2) ist ein vollständiges, weil es $2n-1$ Lösungen, 2 weniger als unabhängige Veränderliche hat; das System 3) ist ein vollständiges, weil es $2n-2$ Lösungen, 3 weniger als unabhängige Veränderliche hat u. s. w. Auch das System $n-1$) ist ein vollständiges, weil es $n+2$ Lösungen, $n-1$ weniger als unabhängige Veränderliche hat.**

### § 3. Bestimmung des vollständigen Integrals.

15. Zur Bestimmung des vollständigen Integrals bedarf es der Gleichungen:

IV) $$\varphi_2=c_2,\quad \varphi_3=c_3\dots\varphi_n=c_n,$$

und es sind unter 14. die vollständigen Systeme partieller Differentialgleichungen aufgestellt, aus welchen sich die Gleichungen IV) herleiten. Die Integration der vollständigen Systeme vereinfacht sich erheblich auf Grund der folgenden Regel: Kennt man ein Integral des vollständigen Systems, so eliminire man hiermit ein und dieselbe Veränderliche aus den Coefficienten einer jeden Gleichung des Systems. Es wird also in jeder Gleichung die Anzahl der Veränderlichen und auch die Anzahl der den Gleichungen gemeinsamen Lösungen um eine vermindert. Das transformirte System partieller Differentialgleichungen ist gleichfalls ein vollständiges.

Ich habe unter 11. die Abkürzung

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\left(\frac{d\psi}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\psi}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right)=(\psi\,\varphi)$$

eingeführt, und es ist $\varphi=\varphi_2$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung:

1) $$(\psi_1\varphi)=0.$$

Diese Gleichung hat $2n+1$ unabhängige Veränderliche. Eliminirt man aus den Coefficienten vermittelst der Gleichung $\psi_1=0$ die Veränderliche $p_1$, so ist die gesuchte Function $\varphi$ unabhängig von $p_1$, also $\frac{d\varphi}{dp_1}=0$. Die transformirte Gleichung, welche mit $(\psi_1\varphi)_1=0$ bezeichnet wird, hat $2n$ unabhängige Veränderliche. Durch ein Integral dieser Gleichung ist die Gleichung $\varphi_2=c_2$ gegeben.

Es ist ferner $\varphi=\varphi_3$ eine gemeinsame Lösung der partiellen Differentialgleichungen:

2) $$(\psi_1\varphi)_1=0,\quad (\varphi_2\varphi)_1=0.$$

Wegen $\frac{d\varphi_2}{dp_1}=0$ ist in der zweiten Gleichung der Differentialquotient $\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right)$ *nicht* vorhanden. Dieselbe hat daher $2n-1$ unabhängige Veränderliche.

Eliminirt man vermittelst der Gleichung $\varphi_2 = c_2$ die Veränderliche $p_2$, so geht das System 2) über in das neue System:

$$(\psi_1 \varphi)_2 = 0, \quad (\varphi_2 \varphi)_2 = 0,$$

in welchem die zweite Gleichung $2n-2$ unabhängige Veränderliche hat. Eine Lösung dieser Gleichung ist $\varphi = x_1$. Durch Integration bestimme ich eine zweite Lösung $\varphi = \beta_2$ und erhalte alsdann die weiteren Lösungen dieser Gleichung:

$$\beta_3 = \frac{(\psi_1 \beta_2)_2}{(\psi_1 x_1)_2}, \quad \beta_4 = \frac{(\psi_1 \beta_3)_2}{(\psi_1 x_1)_2} \cdots \beta_{2n-2} = \frac{(\psi_1 \beta_{2n-3})_2}{(\psi_1 x_1)_2}.$$

Diese Lösungen führe ich als neue Veränderliche in die Gleichung $(\psi_1 \varphi)_2 = 0$ ein. Ich bestimme alsdann ein Integral der transformirten Gleichung, welche gleichfalls $2n-2$ unabhängige Veränderliche hat. Dies ist die Gleichung $\varphi_3 = c_3$.

Es ist ferner $\varphi = \varphi_4$ eine Lösung des vollständigen Systems:

$$3) \qquad (\psi_1 \varphi)_2 = 0, \quad (\varphi_2 \varphi)_2 = 0, \quad (\varphi_3 \varphi)_2 = 0.$$

Wegen $\frac{d\varphi_3}{dp_1} = 0$, $\frac{d\varphi_3}{dp_2} = 0$ sind in der dritten Gleichung die Differentialquotienten $\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right)$ und $\left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right)$ nicht vorhanden. Diese Gleichung hat daher $2n-3$ unabhängige Veränderliche. Eliminirt man vermittelst der Gleichung $\varphi_3 = c_3$ die Veränderliche $p_3$, so geht das System 3) über in das folgende:

$$(\psi_1 \varphi)_3 = 0, \quad (\varphi_2 \varphi)_3 = 0, \quad (\varphi_3 \varphi)_3 = 0,$$

in welchem die dritte Gleichung $2n-4$ unabhängige Veränderliche hat.

Die beiden letzten Gleichungen des Systems bilden für sich genommen ein vollständiges System, weil sie neben den Lösungen des Systems der drei Gleichungen die gemeinsame Lösung $\varphi = x_1$ haben, welche nicht eine Lösung der ersten Gleichung ist. Im Uebrigen ist die Integration des Systems 3) etwas abweichend von dem unter 9. vorgeschriebenen Verfahren, insofern, als hier nicht wie dort die letzte, sondern die vorletzte Gleichung zuerst integrirt wird, weil die Lösungen der Gleichung $(\varphi_2 \varphi)_3 = 0$ gegeben sind. Die Gleichung $(\varphi_2 \varphi)_2 = 0$ hat nämlich die $2n-2$ Lösungen $x_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \ldots \beta_{2n-2}$. Ich habe die Gleichung $\varphi_3 = c_3$ zur Elimination von $p_3$ verwendet. Da $\varphi_3$ eine Function der Lösungen $x_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, $\beta_4 \ldots \beta_{2n-2}$ ist, so hat die Gleichung $(\varphi_2 \varphi)_3 = 0$ die $2n-3$ Lösungen $x_1$, $\beta_3$, $\beta_4 \ldots \beta_{2n-2}$, welche als Functionen der $2n-2$ Veränderlichen $z$, $x_1$, $x_2 \ldots x_n$, $p_4 \ldots p_n$ gegeben sind. Vermittelst dieser $2n-3$ Lösungen eliminiren sich die sämmtlichen $2n-2$ unabhängigen Veränderlichen $z$, $x_1$, $x_2 \ldots x_n$, $p_4 \ldots p_n$ der Gleichung $(\varphi_3 \varphi)_3 = 0$. Die transformirte Gleichung hat die Lösung $\varphi = x_1$ und die $2n-4$ unabhängigen Veränderlichen $\beta_3$, $\beta_4 \ldots \beta_{2n-2}$. Durch deren Integration bestimme ich eine zweite Lösung $\varphi = \gamma_2$ und erhalte alsdann die weiteren Lösungen dieser Gleichung in der Form:

$$\gamma_3 = \frac{(\psi_1 \gamma_2)_3}{(\psi_1 x_1)_3}, \quad \gamma_4 = \frac{(\psi_1 \gamma_3)_3}{(\psi_1 x_1)_3} \cdots \gamma_{2n-4} = \frac{(\psi_1 \gamma_{2n-5})_3}{(\psi_1 x_1)_3}.$$

Diese Lösungen sind als neue Veränderliche in die Gleichung $(\psi_1 \varphi)_3 = 0$ einzuführen. Die transformirte Gleichung hat gleichfalls $2n - 4$ Veränderliche. Durch ein Integral derselben ist die Gleichung $\varphi_4 = c_4$ gegeben.

Die Integration des Systemes 2) führt bekanntlich nicht immer zu den sämmtlichen $2n-4$ Lösungen $\beta_3, \beta_4 \dots \beta_{2n-2}$ der Gleichung $(\varphi_2\varphi)_3 = 0$. Wenn mindestens die beiden Lösungen $\beta_3, \beta_4$ gegeben sind, so erhält man die weiteren Lösungen der Gleichung $(\varphi_2\varphi)_3 = 0$ vermittelst der Gleichung $(\varphi_3\varphi)_3 = 0$, in welche sie eingesetzt werden sollen, nach der bekannten Regel in der Form:

$$\beta_5 = \frac{(\varphi_3 \beta_4)_3}{(\varphi_3 \beta_3)_3}, \quad \beta_6 = \frac{(\varphi_3 \beta_5)_3}{(\varphi_3 \beta_3)_3} \dots$$

Es ist ferner $\varphi = \varphi_5$ eine Lösung des vollständigen Systems:

$$4) \qquad (\psi_1 \varphi)_3 = 0, \quad (\varphi_2 \varphi)_3 = 0, \quad (\varphi_3 \varphi)_3 = 0, \quad (\varphi_4 \varphi)_3 = 0.$$

Wegen $\frac{d\varphi_4}{dp_1} = 0$, $\frac{d\varphi_4}{dp_2} = 0$, $\frac{d\varphi_4}{dp_3} = 0$ sind in der vierten Gleichung die Differentialquotienten $\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right)$, $\left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right)$, $\left(\frac{d\varphi}{dx_3}\right)$ nicht vorhanden. Dieselbe hat daher $2n-5$ unabhängige Veränderliche. Eliminirt man vermittelst der Gleichung $\varphi_4 = c_4$ die Veränderliche $p_4$, so geht das System 4) über in das folgende:

$$(\psi_1 \varphi)_4 = 0, \quad (\varphi_2 \varphi)_4 = 0, \quad (\varphi_3 \varphi)_4 = 0, \quad (\varphi_4 \varphi)_4 = 0,$$

in welchem die vierte Gleichung $2n-6$ unabhängige Veränderliche hat.

Die drei letzten Gleichungen des Systems bilden gleichfalls ein vollständiges System, weil sie neben den Lösungen des Systems der vier Gleichungen die gemeinsame Lösung $\varphi = x_1$ haben, welche nicht eine Lösung der ersten Gleichung ist. Zum Behuf der Integration des Systems dieser drei Gleichungen hat man darauf zu achten, dass die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen $(\varphi_2\varphi)_4 = 0$ und $(\varphi_3\varphi)_4 = 0$ bekannt sind. Die beiden Gleichungen $(\varphi_2\varphi)_3 = 0$ und $(\varphi_3\varphi)_3 = 0$ haben nämlich die $2n-4$ gemeinsamen Lösungen $x_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \dots \gamma_{2n-4}$. Ich habe die Gleichung $\varphi_4 = c_4$ zur Elimination von $p_4$ verwendet. Da $\varphi_4$ eine Function der $2n-4$ Lösungen $x_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \dots \gamma_{2n-4}$ ist, so haben die Gleichungen $(\varphi_2\varphi)_4 = 0$ und $(\varphi_3\varphi)_4 = 0$ die $2n-5$ Lösungen $x_1, \gamma_3, \gamma_4 \dots \gamma_{2n-4}$, welche als Functionen der $2n-3$ Veränderlichen $z, x_1, x_2 \dots x_n, p_5 \dots p_n$ gegeben sind. Vermittelst dieser $2n-5$ Lösungen eliminiren sich die sämmtlichen $2n-3$ unabhängigen Veränderlichen $z, x_1, x_2 \dots x_n, p_5 \dots p_n$ der Gleichung $(\varphi_4\varphi)_4 = 0$. Die transformirte Gleichung hat die Lösung $\varphi = x_1$ und die $2n-6$ unabhängigen Veränderlichen $\gamma_3, \gamma_4 \dots \gamma_{2n-4}$. Man bestimme durch Integration eine zweite Lösung $\varphi = \delta_2$ dieser Gleichung, und erhält alsdann die weiteren Lösungen in der Form:

$$\delta_3 = \frac{(\psi_1 \delta_2)_4}{(\psi_1 x_1)_4}, \quad \delta_4 = \frac{(\psi_1 \delta_3)_4}{(\psi_1 x_1)_4} \dots \delta_{2n-6} = \frac{(\psi_1 \delta_{2n-7})_4}{(\psi_1 x_1)_4}.$$

Diese Lösungen werden nun als neue Veränderliche in die Gleichung $(\psi_1 \varphi)_4 = 0$ eingeführt. Die transformirte Gleichung hat $2n-6$ unabhängige

Veränderliche. Durch ein Integral derselben ist die Gleichung $\varphi_5 = c_5$ gegeben.

Es hat keine Schwierigkeit, auch die übrigen Systeme partieller Differentialgleichungen zu integriren. **Demzufolge hat man zur Bestimmung der Gleichungen $\varphi_2=c_2$, $\varphi_3=c_3$, $\varphi_4=c_4 \ldots \varphi_n=c_n$ je eine Integration auszuführen:**
**von einer Differentialgleichung mit $2n$ unabhängigen Veränderlichen**
**„ zwei Differentialgleichungen „ $2n-2$ „ „**
**„ „ „ „ $2n-4$ „ „**
**und schliesslich:**
**von zwei Differentialgleichungen mit 4 unabhängigen Veränderlichen.**

16. Da nun die Gleichungen $\varphi_2 = c_2$, $\varphi_3 = c_3 \ldots \varphi_n = c_n$ bekannt sind, so gelangt man zu dem vollständigen Integral durch die Integration der vollständigen Differentialgleichung:

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n.$$

Man kann übrigens die Rechnung so einrichten, dass das vollständige Integral durch je eine Integration von zwei partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen bestimmt wird. Es ist offenbar, dass auch die partielle Differentialgleichung $(\varphi_n \varphi) = 0$ neben den Lösungen

$$\varphi = \psi_1, \quad \varphi = \varphi_2, \quad \varphi = \varphi_3 \ldots \varphi = \varphi_n$$

die Lösung $\varphi = \alpha$ hat. Man kann daher das System der Gleichungen II), welches gleichbedeutend ist mit der obigen vollständigen Differentialgleichung, durch das folgende System ersetzen:

$$(\psi_1 \varphi)_{n-1} = 0, \quad (\varphi_2 \varphi)_{n-1} = 0, \quad (\varphi_3 \varphi)_{n-1} = 0 \ldots (\varphi_n \varphi)_{n-1} = 0.$$

Lässt man die erste und die letzte Gleichung fort, so hat das System der übrigen $n-2$ Gleichungen die vier Lösungen $x_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, $\sigma_4$, welche als Functionen von $z$, $x_1$, $x_2 \ldots x_n$, $p_n$ gegeben sind. Vermittelst der Gleichung $\varphi_n = c_n$ eliminire ich die Veränderliche $p_n$. Da $\varphi_n$ eine Function der Veränderlichen $x_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, $\sigma_4$ ist, so hat das transformirte System der erwähnten $n-2$ Gleichungen die Lösungen $x_1$, $\sigma_3$, $\sigma_4$, welche als Functionen der Veränderlichen $z$, $x_1$, $x_2 \ldots x_n$ gegeben sind. Diese Lösungen sind als neue Veränderliche in die Gleichung $(\varphi_n \varphi)_n = 0$ einzuführen. Die transformirte Gleichung hat die Lösung $\varphi = x_1$ und die zwei unabhängigen Veränderlichen $\sigma_3$, $\sigma_4$. Durch die Integration dieser Gleichung bestimme ich eine zweite Lösung $\varphi = \tau_2$. Führt man diese beiden Lösungen als neue Veränderliche in die Gleichung $(\psi_1 \varphi)_n = 0$ ein, so ergiebt sich durch deren Integration das vollständige Integral $\alpha = c_1$.

Dies ist die Integrationsmethode, welche ich 1863 veröffentlicht habe. Ich behaupte nicht, dass man durch andere Methoden nicht zu noch weiteren Resultaten gelangen könne. Aber es giebt keine andere Methode, durch welche das, was diese Methode leistet, in einer ebenso einfachen Weise erreicht wird.

Karlsruhe, im Mai 1894.

# Kleinere Mittheilungen.

## XX. Ueber vollständige und complementäre Perioden und Restreihen unendlicher Decimalbrüche.

Die periodischen Decimalbrüche zerfallen in solche $2n$-stellige, in welchen die Ziffern der ersten Hälfte der Periode die entsprechenden der zweiten zu 9 und die zugehörigen Reste sich zum Nenner $P$ des gemeinen Bruches, aus welchen dieselben hervorgegangen sind, ergänzen, und in solche $2n$- oder $(2n-1)$-stellige, in welchen die Ziffern der Periode und die Reste sich zu den Ziffern und den Resten eines anderen aus einem gemeinen Bruche mit demselben Nenner $P$ hervorgegangenen Decimalbruches sich zu 9 bezw. $P$ ergänzen. Erstere Perioden und Restreihen heisst man vollständige, letztere complementäre.

In den mir zur Hand gekommenen diesbezüglichen Schriften sind diese Eigenschaften der Decimalbrüche auf elementarem und daher weitläufigen Wege oder nur für Brüche mit einem Primzahlnenner nachgewiesen und ist überhaupt nur gezeigt, dass solche Decimalbrüche existiren, ohne dass darauf eingegangen wird, ob nur die eine oder andere Art vorkommt, oder ohne dass untersucht wird, wann diese vorkommen. Ich nehme bei der Untersuchung dieser Frage das zunächst Liegende, nämlich die Lehre von den Potenzresten zu Hilfe, wodurch auch noch erreicht wird, dass die erhaltenen Resultate für jedes Zahlensystem gelten. Wenn allerdings dann und wann statt allgemein einer Zahl $a$ die Grundzahl unseres Zahlensystems eingeführt wird, so geschieht es, um möglichst an darauf folgende bestimmte Beispiele anschliessen zu können. Im Uebrigen beschränke ich mich aus naheliegenden Gründen auf rein periodische Decimalbrüche, da ein gemeiner Bruch $\frac{z}{P}$ in der Form $\frac{1}{2^\alpha.5^\beta}\cdot\frac{z}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots}$ geschrieben werden kann, $\frac{1}{2^\alpha.5^\beta}$ aber einen $\alpha$- oder $\beta$-stelligen Decimalbruch, je nachdem $\alpha \gtrless \beta$, und $\frac{z}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots}$ einen rein periodischen giebt und das Product beider ein gemischt-periodischer mit $\alpha$ oder $\beta$ ausserperiodischen Ziffern ist. Die Buchstaben $p_1, p_2, \ldots$ bedeuten immer Primzahlen ausser 2 und 5 und $P$ ist im Folgenden immer das Product aus solchen Primzahlen oder aus Potenzen derselben.

Gehört $a$ zu $t = 2m\,(mod\,P)$, ist also $a^t \equiv 1\,(mod\,P)$, so ist auch

$$z(a^t-1) = z(a^m+1)(a^m-1) \equiv 0\,(mod\,P),$$

wobei wir $z$ relativ prim zu $P$ voraussetzen.

Ist nun $a^m - 1$ **auch relativ prim zu** $P$, dann muss $z(a^m+1)$ **durch** $P$ **theilbar**, also

$$z a^{\frac{t}{2}} \equiv - z a^t,$$

folglich auch

$$z a^{\frac{t}{2}-v} \equiv - z a^{t-v} (mod P)$$

sein.

Wenn dann $z a^{\frac{t}{2}-v} \equiv r_{\frac{t}{2}-v}$ und $z a^{t-v} \equiv r_{t-v} (mod P)$, wo $r_{\frac{t}{2}-v}$ und $r_{t-v}$ die kleinsten positiven Reste $(mod P)$ sind, so ist

$$1) \qquad r_{\frac{t}{2}-v} \equiv - r_{t-v} (mod P) \text{ oder } r_{\frac{t}{2}-v} + r_{t-v} = P.$$

Sind die kleinsten positiven Reste von $az$, $a^2 z$, $a^3 z$, $\ldots a^t z (mod P)$ bezw. $r_1, r_2, r_3, \ldots r_t$ und die zugehörigen Quotienten $q_1, q_2, q_3 \ldots q_t$, so ist:

$$a r_{\frac{t}{2}-v} = q_{\frac{t}{2}-v+1} . P + r_{\frac{t}{2}-v+1},$$

$$a r_{t-v} = q_{t-v+1} . P + r_{t-v+1} = q_{t-v+1} . P + P - r_{\frac{t}{2}-v+1},$$

daher:

$$2) \qquad a\left(r_{\frac{t}{2}-v} + r_{t-v}\right) = P\left(q_{\frac{t}{2}-v+1} + q_{t-v+1}\right) + P,$$

oder

$$aP = P\left(q_{\frac{t}{2}-v+1} + q_{t-v+1}\right) + P,$$

oder

$$q_{\frac{t}{2}-v+1} + q_{t-v+1} = a - 1,$$

mithin für $a = 10$:

$$q_{\frac{t}{2}-v+1} + q_{t-v+1} = 9.$$

Zum Beispiel: $10^4 \equiv 1 (mod 101)$

und $10^6 \equiv 1 (mod 13)$,

also $10^{12} \equiv 1 (mod 13 . 101)$.

Nun ist aber $10^{12} - 1 = (10^6+1)(10^6-1) \equiv 0 (mod 13 . 101)$.

$10^6 - 1$ ist aber $\equiv 0 (mod 13)$.

Daher giebt $\frac{z}{1313}$ keine vollständige Periode. In der That ist zum Beispiel $\frac{19}{1313} = 0,\overline{014470677837}\,0144\ldots$

Oder: $10^5 \equiv 1 (mod 41)$

und $10^4 \equiv 1 (mod 101)$,

daher $10^{20} \equiv 1 (mod 41 . 101)$.

Nun ist

$$10^{20} - 1 = (10^{10}-1)(10^{10}+1) = (10^5+1)(10^5-1)(10^{10}+1) \equiv 0 (mod 4141).$$

Weil aber $10^5 \equiv 1 (mod 41)$, so giebt auch $\frac{z}{4141}$ keine vollständige Periode. Es ist zum Beispiel $\frac{3}{4141} = 0,\overline{00072446269017145617}\,00072\ldots$

Hingegen erhält man aus:

$$10^6 \equiv 1 \,(mod\, 13)$$

und

$$10^{10} \equiv 1 \,(mod\, 9091)$$

$$10^{30} \equiv 1 \,(mod\, 118183),$$

oder

$$10^{30} - 1 = (10^{15} + 1)(10^{15} - 1) \equiv 0 \,(mod\, 118183).$$

$10^{15} - 1$ ist aber weder $(mod\, 13)$ noch $(mod\, 9091) \equiv 0$, daher giebt $\frac{z}{118183}$ eine vollständige Periode. Es ist auch zum Beispiel:

$$\frac{5}{118183} = 0,\overline{000042307269234999957692730765}\,0000423\ldots$$

Es ist ferner:

$$10^{22} \equiv 1 \,(mod\, 11^2),$$

und

$$10^{78} \equiv 1 \,(mod\, 13^2),$$

also

$$10^{2\cdot 3\cdot 11\cdot 13} - 1 = (10^{3\cdot 11\cdot 13} + 1)(10^{3\cdot 11\cdot 13} - 1) \equiv 0 \,(mod\, 11^2 . 13^2).$$

Da $10^{3\cdot 11\cdot 13} - 1$ weder $(mod\, 11)$ noch $(mod\, 13)$, folglich auch nicht $(mod\, 11^2)$ und $(mod\, 13^2) \equiv 0$ ist, so giebt $\frac{z}{11^2 . 13^2}$ eine vollständige Periode.

Man überzeugt sich leicht, dass nach Obigem $a^m - 1$ relativ prim zu $P$ ist, oder dass man eine vollständige Periode erhält, wenn die Hälfte des kleinsten Vielfachen der Exponenten, zu welchen 10 nach den einzelnen in $P$ enthaltenen Primzahlpotenzen gehört, durch keinen dieser Exponenten theilbar ist.

Es gehöre $a$ zu $\frac{p_1 - 1}{\lambda_1} p_1^{\alpha'_1} (mod\, p_1^{\alpha_1})$, zu $\frac{p_2 - 1}{\lambda_2} p_2^{\alpha'_2} (mod\, p_2^{\alpha_2})$ u. s. w., es sei also:

$$a^{\frac{p_1 - 1}{\lambda_1} \cdot p_1^{\alpha'_1}} \equiv 1 \,(mod\, p_1^{\alpha_1}),$$

$$a^{\frac{p_2 - 1}{\lambda_2} \cdot p_2^{\alpha'_2}} \equiv 1 \,(mod\, p_2^{\alpha_2}),$$

$$a^{\frac{p_3 - 1}{\lambda_3} \cdot p_3^{\alpha'_3}} \equiv 1 \,(mod\, p_3^{\alpha_3}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wenn nun $\mu$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser Exponenten von $a$, daher $a^\mu \equiv 1 \,(mod\, p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots)$ ist, so entsteht die Frage, ob $\frac{\mu}{2}$ nicht durch einen der obigen Exponenten, zu welchen $a (mod\, p_1^{\alpha_1})$, $(mod\, p_2^{\alpha_2}) \ldots$ gehört, oder durch eine Zahl, zu welcher $a (mod\, p_1^{\alpha''_1})$, $(mod\, p_2^{\alpha''_2}), \ldots$, wo $\alpha''_1$, $\alpha''_2 \ldots$ bezw. kleiner als $\alpha_1$, $\alpha_2 \ldots$ seien, theilbar ist. Diese letzteren Zahlen sind aber von der Form $\frac{p_1 - 1}{\lambda_1} \cdot p_1^{\alpha''_1}$, $\frac{p_2 - 1}{\lambda_2} p^{\alpha''_2}, \ldots$, enthalten also keine niedrigere Potenz von 2 als bezw. $\frac{p_1 - 1}{\lambda_1} \cdot p_1^{\alpha'_1}$, $\frac{p_2 - 1}{\lambda_2} \cdot p_2^{\alpha'_2}, \ldots$

In meiner Abhandlung: „Ueber die Grösse der Periode eines unendlichen Decimalbruches oder die Congruenz $10^x \equiv 1 \,(mod\, P)$“ (Programm der königl. Studienanstalt Burghausen 1887/88) wurde in § 33 be-

wiesen, dass, wenn die Zahl $a$ zu $\frac{p-1}{\lambda}(\mathit{mod}\,p)$ gehört, wo $\lambda$ eine in $p-1$ enthaltene ganze Zahl bedeutet, und $p^\tau$ die höchste Potenz von $p$ ist, durch welche $a^{\frac{p-1}{\lambda}}-1$ getheilt werden kann, $a$ zum Exponenten $\frac{p-1}{\lambda}p^{n-\tau}(\mathit{mod}\,p^n)$ gehört. Es lässt sich auch umgekehrt zeigen, dass, wenn $a$ zu $\frac{p-1}{\lambda}p^{n-\tau}(\mathit{mod}\,p^n)$ gehört, $a$ zu $\frac{p-1}{\lambda}p^{n-\tau-\tau'}(\mathit{mod}\,p^{n-\tau'})$ gehören muss, d. h., dass beide Exponenten von $a$ dieselbe Potenz von 2 enthalten müssen, da diese Potenzen von 2 nur in $\frac{p-1}{\lambda}$ vorkommen können. Denn wenn nicht $\frac{p-1}{\lambda'}p^{n-\tau-\tau'}$ dieser kleinste Exponent wäre, so müsste er von der Form $\frac{p-1}{\lambda}p^{n-\tau-\tau''}$ sein, wo $\lambda' > \lambda$ und $\tau'' > \tau'$ ist. Es würde sich aber dann nach den dortselbst durchgeführten Schlussfolgerungen ergeben, dass $a^{\frac{p-1}{\lambda'}p^{n-\tau-\tau''+\tau'}} \equiv 1\ (\mathit{mod}\,p^n)$, dass also $a$ nicht zu $\frac{p-1}{\lambda}p^{n-\tau}(\mathit{mod}\,p^n)$, sondern, gegen die Voraussetzung, zu einem kleineren Exponenten $(\mathit{mod}\,p^n)$ gehören würde.

Ist daher $a^{\frac{\mu}{2}}-1$ durch keinen der Moduln $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots$ theilbar, so kann es auch durch keine niedrigere Potenz der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots$ getheilt werden. Durch eine oder mehrere der ersten Gruppe angehörige Primzahlpotenzen ist es aber theilbar, wenn $\frac{p_1-1}{\lambda_1}, \frac{p_2-1}{\lambda_2}, \ldots$ nicht dieselbe Potenz von 2 enthalten, ausserdem aber nicht. Denn ist $\mu = 2^n.q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\ldots p_1^{\alpha'_1}p_2^{\alpha'_2}\ldots$, wo $q_1, q_2, \ldots$ ungerade Primzahlen bedeuten und $2^n.q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\ldots$ das kleinste Vielfache von $\frac{p_1-1}{\lambda_1}, \frac{p_2-1}{\lambda_2}, \ldots$ ist, so ist $\frac{\mu}{2} = 2^{n-1}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\ldots p_1^{\alpha'_1}p_2^{\alpha'_2}\ldots$ Dieses kann aber durch einen oder einige der Exponenten $\frac{p_1-1}{\lambda_1}p_1^{\alpha'_1}, \frac{p_2-1}{\lambda_2}p_2^{\alpha'_2}\ldots$ getheilt werden, wenn $\frac{p_1-1}{\lambda_1}, \frac{p_2-1}{\lambda_2}, \ldots$ nicht dieselbe Potenz von 2 enthalten, ausserdem nicht.

Mittelst des „Canon arithmeticus" von C. G. J. Jacobi ergiebt sich zum Beispiel Folgendes:

1. Es sei

$$p^{\alpha_1} = 7^3,$$

$$p_2^{\alpha_2} = 19^2.$$

Nun ist: $$10 \equiv 3^{223}(\mathit{mod}\,7^3),$$

also: $$10^x \equiv 3^{223\,x} \equiv 3^0 \equiv 1\,(\mathit{mod}\,7^3).$$

daher: $223x \equiv 0 (mod\, 6.7^2)$,

mithin: $x = 294$.

Ferner ist: $10 \equiv 2^{233} (mod\, 19^2)$,

also: $10^x \equiv 2^{233x} \equiv 2^0 \equiv 1 (mod\, 19^2)$,

daher: $233x \equiv 0 (mod\, 18.19)$,

folglich: $x = 342$.

Mithin hat man $10^{294} \equiv 1 (mod\, 7^3)$

und $10^{342} \equiv 1 (mod\, 19^2)$,

folglich: $10^{18 \cdot 19 \cdot 49} \equiv 1 (mod\, 7^3 . 19^2)$.

Nun enthalten 294 und 342 dieselbe Potenz von 2, nämlich $2^1$; daher ist die Hälfte ihres kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen durch keine dieser Zahlen theilbar. $\frac{z}{7^3 . 19^2}$ giebt folglich eine vollständige Periode, da $10^{9 \cdot 19 \cdot 49} - 1$ nach keinem der Modulen 19, $19^2$, 7, $7^2$, $7^3 \equiv 0$ ist.

2. Es sei:

$$p_1^{\alpha_1} = 3^4,$$

$$p_2^{\alpha_2} = 11^2.$$

Nun findet man wie in 1):

$$10^9 \equiv 1 (mod\, 3^4)$$

und $10^{22} \equiv 1 (mod\, 11^2)$,

also ist $10^{198} \equiv 1 (mod\, 3^4 . 11^2)$.

9 und 22 enthalten verschiedene Potenzen von 2; die Hälfte ihres kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen ist daher durch 9, $10^{99} - 1$, aber auch schon $10^9 - 1$ durch $3^4$ theilbar. Mithin giebt $\frac{z}{3^4 . 11^2}$ keine vollständige Periode.

Giebt der Bruch $\frac{z}{P}$ keine vollständige Periode, was auch immer der Fall ist, wenn in $10^t \equiv 1 (mod\, P)$, wo 10 zu $t$ gehört, $t$ eine ungerade Zahl ist, so erhält man für alle möglichen zu $P$ relativ primen Werthe von $z$ eine gerade Anzahl von Perioden und Restreihen, deren Glieder sich paarweise zu 9 bezw. $P$ ergänzen, d. i. complementäre.

Sind die Reste, welche sich bei der Verwandlung eines solchen Bruches mit dem Nenner $P$ in einen Decimalbruch ergeben, $r_1, r_2, \ldots r_\delta$, so geben die Brüche $\frac{r_1}{P}, \frac{r_2}{P}, \ldots \frac{r_\delta}{P}$ dieselben Perioden mit derselben Reihenfolge der Ziffern, nur mit verschiedenen Anfangsgliedern. Alle diese Reste sind relativ prim zu $P$. Denn ist z. B. $10^\mu \equiv r_\mu (mod\, P)$ und hätten $r_\mu$ und $P$ einen gemeinschaftlichen Theiler, so müsste derselbe auch in $10^\mu$, das ist in 10 enthalten sein gegen die Voraussetzung, dass $P$ nur aus ungeraden Primzahlen ausser 5 zusammengesetzt ist. Nimmt man einen anderen der $\varphi(P)$

zu $P$ relativ primen Zahlen, welche kleiner als $P$ sind, etwa $s$, als Zähler, so giebt $\frac{s}{P}$, in einen Decimalbruch verwandelt, wieder $\delta$ Reste $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\delta$, welche wieder als Zähler zu dem Nenner $P$ genommen dieselben Perioden mit anderen Anfangsziffern geben und von den Resten $r_1, r_2, \ldots r_\delta$ verschieden sind. Ist nun allgemein $m$ irgend eine zu $P$ relativ prime Zahl und kleiner als $P$, so kann sie als Zähler eines solchen Bruches mit dem Nenner $P$ genommen werden; dann ist aber auch $P-m$ relativ prim zu $P$ und kleiner als $P$, kann daher ebenfalls zum Zähler eines Bruches mit dem Nenner $P$ gemacht werden. Die Reste und Quotienten, die sich bei der Verwandlung des Bruches $\frac{m}{P}$ in einen Decimalbruch ergeben, ergänzen die entsprechenden Reste und Quotienten bei der Verwandlung des Bruches $\frac{P-m}{P}$ zu $P$ bezw. 9, welches letztere sich ebenso wie oben beweisen lässt. Da nun zu je zwei solchen sich ergänzenden Brüchen $2\delta$ Reste, welche kleiner als $P$ und relativ prim zu $P$ sind, gehören, und auf diese Weise alle $\varphi(P)$ Zahlen, welche kleiner als $P$ und relativ prim zu $P$ sind, erschöpft werden, so ist die Anzahl dieser Paare von complementären Perioden $\frac{\varphi(P)}{2\delta}$.

Zusätze und Folgerungen:

1. Ist $p^a$ der Nenner eines gemeinen Bruches und der Exponent $\delta$, zu welchem $10 (mod\, p^a)$ gehört, eine gerade Zahl $= 2\nu$, so ist die Periode immer eine vollständige.
2. In einer vollständigen $\mu$-stelligen Periode ist die Summe der Reste $\frac{\mu}{2} \cdot P$, wenn $P$ der Nenner des gemeinen Bruches ist, und die der Ziffern der Periode $\frac{\mu}{2} \cdot 9$.
3. Die Summe der Reste zweier $\delta$-stelligen complementären Restreihen ist $\delta . P$ und die der Ziffern beider Perioden $9\delta$.
4. Dass die Summe der Ziffern einer $p-1$-stelligen Periode eines gemeinen Bruches mit dem Primzahlnenner $p = \frac{9(p-1)}{2}$, lässt sich auch folgendermaassen beweisen:

Ist $z$ der Zähler, sind ferner $q_1, q_2, \ldots q_{p-1}$ die Ziffern der Periode und $r_1, r_2, \ldots r_{p-1}$ die Reste, so ist:

$$10z = q_1 . p + r_1,$$
$$10r_1 = q_2 . p + r_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$10r_{p-3} = q_{p-2} . p + r_{p-2},$$
$$10r_{p-2} = q_{p-1} . p + r_{p-1}.$$

Daher

$$10(z + r_1 + r_2 + \cdots + r_{p-3} + r_{p-2}) = p(q_1 + q_2 + \cdots + q_{p-1}) \\ + (r_1 + r_2 + \cdots + r_{p-2} + r_{p-1}),$$

oder weil $r_{p-1} = z$ ist,

$$9(r_1 + r_2 + \cdots + r_{p-1}) = p(q_1 + q_2 + \cdots + q_{p-1}).$$

Aber $r_1 + r_2 + \cdots + r_{p-1}$ ist die Summe der ersten $p-1$ Zahlen, also $= \frac{p(p-1)}{2}$, daher

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_{p-1} = \frac{9(p-1)}{2}.$$

Ebenso erhält man die bekannte Eigenschaft, auch wenn die Periode allgemein eine $\delta$-stellige ist und man die Summe der Reste mit $R$ und die der Quotienten mit $Q$ bezeichnet:

$$10R = P.Q + R,$$

oder

$$9R = P.Q,$$

daher

$$R = \frac{P.Q}{9}$$

und

$$Q = \frac{9R}{P},$$

d. i., wenn $P$ den Primfactor 3 nicht enthält, ist die Summe der Reste immer durch 9 und die Summe der Ziffern der Periode immer durch $P$ theilbar.

Freising. Jos. Mayer.

---

## XXI. Ueber Iterirung gebrochener Functionen.

Bezeichnet man mit $\theta(x)$ eine rationale gebrochene Function der Veränderlichen $x$ und setzt, wie gewöhnlich,

$$\theta[\theta(x)] = \theta_2(x), \quad \theta[\theta_2(x)] = \theta_3(x), \ldots$$

dann ist bei der Form

$$\theta(x) = \frac{ax + b}{\alpha x + \beta}$$

die Frage häufig beantwortet worden, unter welchen Bedingungen für ein gegebenes $n$

$$1) \qquad \theta_n(x) = x$$

wird. Ich werde zeigen, dass, wenn in $\theta(x)$ der Zähler oder der Nenner von höherem als dem ersten Grade wird, für keine Wahl der Constanten und kein $n$ die Gleichung 1) erfüllt werden, dass also bei der Iterirung keine Periode entstehen kann.

Zu diesem Zwecke betrachten wir den Quotienten

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots}{\alpha_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots}$$

zweier ganzer Functionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, die keinen Theiler mit einander gemeinsam haben sollen, so dass bei der Zerlegung in lineare Factoren kein

$\alpha_\lambda$ einem $a_\mu$ gleich wird ($\lambda$, $\mu > 0$). Für $x$ setzen wir in diesen Quotienten nun

$$\theta(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

ein, wobei mindestens eine der beiden ganzen Functionen $Z(x)$ und $N(x)$ von höherem als dem ersten Grade sein soll, und $Z(x)$ und $N(x)$ keinen gemeinsamen Factor besitzen. Dann wird

$$\frac{\varphi[\theta(x)]}{\psi[\theta(x)]} = \frac{a_0(Z - a_1 N)(Z - a_2 N)\dots}{\alpha_0(Z - \alpha_1 N)(Z - \alpha_2 N)\dots} N^\mu,$$

wobei $\mu$ die Differenz der Grade von $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ bedeutet.

In dem Bruche auf der rechten Seite kann sich kein Factor in $x$, der im Zähler auftritt, gegen einen gleichen des Nenners wegheben. Denn hätten zwei Klammern von der Form

$$Z(x) - a_\lambda N(x) \quad \text{und} \quad Z(x) - \alpha_\mu N(x)$$

einen gemeinsamen Theiler, dann hätte ihn auch ihre Differenz

$$(a_\lambda - \alpha_\mu) N(x)$$

und da $a_\lambda - \alpha_\mu$ eine von Null verschiedene Constante ist, auch $N(x)$ und folglich ebenso $Z(x)$. Dass aber in

$$\theta(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Theiler besitzen, hatten wir ja von vornherein vorausgesetzt.

Wäre nun $\theta_n(x) = x$, so setzen wir für

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \theta_{n-1}(x);$$

dann folgt aus dem bewiesenen Hilfssatze, dass $\theta_n(x)$ nur dann $= x$ sein kann, wenn schon $\varphi : \psi$ und $\theta$ selbst linear ist, und damit ist die Richtigkeit der Behauptung dargelegt.

So einfach der gegebene Beweis des Hilfssatzes ist, so hat er doch nach der Seite hin einen Mangel, dass bei einem rein arithmetischen Satze die Existenz der Wurzeln, also ein algebraisches Theorem vorausgesetzt wurde. Um dem abzuhelfen mag ein zweiter, zwar etwas weniger einfacher, aber doch rein arithmetischer Beweis des Hilfssatzes folgen.

Es seien $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zwei ganze Functionen, unter denen $\varphi(x)$ dem Grade nach höher oder mindestens gleich $\psi(x)$ sei. Ferner sollen beide Functionen ohne gemeinsamen Theiler angenommen werden. Setzt man nun in $\varphi$ und in $\psi$ für die Variable $x$ den Bruch

$$\theta(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

ein und entfernt die Nenner durch Multiplication mit den niedrigsten dazu nöthigen Potenzen von $N$; dann behaupte ich, dass die neuen Functionen,

die mit $\varphi(Z, N)$ und $\psi(Z, N)$ bezeichnet werden mögen, auch keinen gemeinsamen Theiler haben.

Zum Beweise wenden wir auf $\varphi$ und $\psi$ die Euklid'sche Methode des grössten gemeinsamen Theilers an. Dabei möge

$$\varphi(x) = q_1(x)\psi(x) + \psi_1(x)$$

die erste Zeile des Schemas sein; $q_1$ ist der Quotient, $\psi_1$ der Rest der Division. Setzt man jetzt wieder $\theta$ für $x$ ein und bezeichnet ähnlich wie soeben, dann entsteht

$$\varphi(Z, N) = q_1(Z, N)\psi(Z, N) + N^{\mu_1}.\psi_1(Z, N).$$

Hier ist $\mu_1$ die Differenz der Grade von $\varphi(x)$ und $\psi_1(x)$. Hätten nun $\varphi(Z, N)$ und $\psi(Z, N)$ einen gemeinsamen Theiler, so hätte ihn auch

$$N^{\mu_1}\psi_1(Z, N).$$

Es kann ihn aber $N$ nicht haben, weil ihn sonst wegen $\varphi(Z, N)$ auch $Z$ besässe; also kommt er in $\psi_1(Z, N)$ vor.

Die zweite Zeile des Euklid'schen Schemas sei

$$\psi(x) = q_2(x)\psi_1(x) + \psi_2(x)$$

und entsprechend bilden wir

$$\psi(Z, N) = q_2(Z, N)\psi_1(Z, N) + N^{\mu_2}\psi_2(Z, N)$$

und schliessen, dass auch $\psi_2(Z, N)$ den Theiler besitzt. So geht es weiter, und da wir schliesslich auf eine Constante $\psi_r$ kommen, so folgt die behauptete Unmöglichkeit.

Giessen. E. Netto.

# Historisch-literarische Abtheilung

der

# Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch** und **Dr. M. Cantor.**

**39. Jahrgang.**

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1894.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

# Inhalt.

## I. Abhandlungen.



## II. Recensionen.

### Geschichte der Mathematik.



### Arithmetik, Zahlentheorie, Analysis.

## Synthetische und analytische Geometrie. Trigonometrie.

## Mechanik, Physik, Mathematische Geographie, Technik.

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Geschichte der optischen und katoptrischen Anamorphosen.

Von

Dr. H. Ruoss
in Cannstatt.

Hierzu Tafel II, Figur 1–9.

Als Anamorphosen bezeichnet man verzerrte Bilder eines Vorbildes (prototyp), welche von einem gewissen Punkte aus, direct oder in einem Spiegel gesehen, als unverzerrtes Vorbild wieder erscheinen.

Die Construction der Anamorphosen ist von den Mathematikern und Physikern des 17. und 18. Jahrhunderts behandelt worden, und der berühmte Mechaniker und Physiker Jacob Leupold hat drei Maschinen hergestellt, mit denen man dieselben zeichnen kann.

Diese Ansicht, die sich von Buch zu Buch fortgepflanzt hat, zu berichtigen, wird Gegenstand dieser Abhandlung sein; es wird sich zeigen, dass alle Constructionen, die sich auf Cylinderspiegel beziehen, vom wissenschaftlichen Standpunkte aus unrichtig sind, und dass die drei Maschinen Leupold's Anamorphosen liefern, welche den Gesetzen der Anamorphosen widersprechen.

Als der Erste, der sich mit Anamorphosen beschäftigte, wird in französischen Werken* Simon Stevin bezeichnet. In der Geschichte der Physik von Heller dagegen wird besonders dem Jesuiten Caspar Schott das Verdienst zugeschrieben, Regeln für die Anamorphosen der cylindrischen und conischen Spiegel aufgestellt zu haben.

Was Simon Stevin anlangt, so liegt offenbar eine Verwechslung mit Schott vor. Dies geht daraus hervor, dass das vermeintliche Werk Stevin's „Magia universalis, Herbipol. 1657“ unter demselben Titel im gleichen Jahre in Würzburg von Schott erschienen ist, dass Stevin 1620 in Leyden gestorben ist, und dass weder ein von ihm herausgegebenes Werk, noch das nach seinem Tode erschienene „les oeuvres mathem. de S. Stevin, Leyden 1634“ obigen Titel trägt.

* Cfr. Cours de physique de l'école polyt. von Jamin 1892 „Miroirs coniques et cylindriques“.

Was Schott anlangt, so bin ich nach dem Studium seiner „Magia universalis“ der Ansicht, dass ihm bezüglich der Förderung der Anamorphosen nur das Verdienst zukommt, die verschiedenen, in anderen Werken zerstreut liegenden Constructionen gesammelt zu haben, ohne indessen etwas Neues zu liefern.

Der Erste, der über Anamorphosen geschrieben haben dürfte, ist

Vaulezard: Perspective cylindrique et conique, Paris 1630,

daran würden sich anreihen:

Herigonius: Cursus mathematicus, Paris 1634;

Athanasius Circherius: Ars magna lucis et umbrae, Rom 1646;

Phil. Harzdörfer: Mathematische und philosophische Erquickungsstunden, Nürnberg 1653;

Jean François Niceron: La perspective curieuse, Paris 1652;

Casparus Schottus: Magia universalis naturae et artis, (Herbipol.) Würzburg 1662;

Joh. Christ. Sturm: Mathesis juvenalis, Nürnberg 1699;

Leonh. Chr. Sturm: Kurzer Begriff der gesammten Mathesis, Frankfurt a. O. 1710.

Als das umfassendste dieser Werke, in Bezug auf Anamorphosen, muss das von Schott bezeichnet werden. Obgleich die Darstellung an Klarheit und Kürze zu wünschen übrig lässt, so ist sie doch noch übersichtlicher als die anderer Autoren. Dass in einem solch' vielseitigen Werke, das die reine und angewandte Mathematik, die Physik und praktische Mechanik etc. behandelt und alle nur denkbaren Anwendungen im praktischen Leben in Betracht zieht, Manches aufgenommen wurde, das der Verfasser selbst nicht genügend beherrschte, ist wohl zu entschuldigen und trifft auch für dieses Werk zu. Ich verweise hier z. B. auf die ganz unverständliche Construction S. 162 pragmatia II des obigen Werkes.

Die Beschreibung der Maschinen Leupold's erschien 1713 in Leipzig unter dem Titel:

Jacob Leupold's Mechanici, zu Leipzig, Anamorphosis mechanica nova oder Beschreibung dreier Maschinen, mit welchen sehr geschwinde und leicht, auch von Denen, die solcher Wissenschaft unerfahren, mancherlei Bilder und Figuren können gezeichnet werden, dass sie ganz ungestalt und unkenntlich, dennoch aber die ersteren durch einen Cylinderspiegel, die anderen durch einen conischen und die dritten mit einem flachen Spiegel von einem gewissen Augpunkt aus wiederum in rechter Gestalt und Proportion erscheinen.

Man wird sich, namentlich bezüglich der drei letzten Maschinen, fragen, wie die unrichtigen Constructionen der Anamorphosen als solche so lange unerkannt blieben. Wir finden eine Erklärung dafür, wenn wir uns den damaligen Zweck der Anamorphosen klar machen. Es handelte sich *darum*, etwa von einer Person oder irgend einem Thier eine Cylinder-

anamorphose herzustellen, also ein verzerrtes Bild des Originals, das, im Cylinderspiegel gesehen, richtig erscheint. War auch das im Spiegel gesehene Bild in vielen Punkten dem Original nicht ähnlich, so war doch der Gesammteindruck der eines wohlgestalteten Bildes, das man um so mehr dem Original ähnlich halten musste, als das letztere bei der Besichtigung nicht zur Verfügung stand, und so ein Vergleich im Einzelnen nicht angestellt werden konnte.

Hätten dagegen die Physiker und Mathematiker jener Zeit sich die Aufgabe gestellt, eine Curve zu zeichnen, welche in einem Cylinderspiegel gesehen als Gerade erscheint, so hätten sie finden müssen, dass ihre Constructionen und Apparate die richtigen Anamorphosen der Gerade nicht liefern konnten.

## Optische Anamorphosen.

Die Aufgabe ist hier, auf eine beliebige Fläche ein verzerrtes Bild eines Vorbildes zu zeichnen, das von einem Punkte aus richtig erscheint. Diese Anamorphosen fanden in jener Zeit mannigfache Anwendungen. So erwähnt Schott*, dass in dem Kloster des Franciscus de Parula auf dem Monte Pincio in Rom das Bild des Franciscus de Parula von einem Punkte aus an einer Wand zu sehen sei, dass aber von anderen Punkten aus nur Bäume, Menschen, Thiere an dieser Stelle zu sehen seien. Diese Anamorphose wurde von P. Emanuel Magnanus hergestellt und in seiner perspectiva horaria lib. 3 prop. 77 beschrieben.

Weitere Anwendungen, die in Capellen damals oft gesehen wurden, waren die Anamorphosen schiefer Balken.**

Auf zwei zusammenstossende Wände wurden Balken gemalt, die von einem gewissen Punkte der Capelle aus so erschienen, als ob sie in beide Wände eingefügt und über den Winkel der Wände gespannt wären.

Schott schreibt darüber, dass, wenn man sich vom richtigen Standpunkte entferne, das Bild sich aufzulösen, die Säulen sich zu bewegen und einzustürzen scheinen.***

Auch in Gärten wurden solche Anamorphosen angelegt, welche, von einem Punkte ausserhalb gesehen, die Form eines Adlers, Löwens etc. zeigten.

Diese Anamorphosen wurden theils auf geometrische Weise, theils auf praktisch mechanische hergestellt; wir werden im Folgenden beide Methoden behandeln.

Zunächst handelt es sich darum: Was ist ein nicht verzerrtes (richtiges) Bild eines Vorbildes und was ein verzerrtes?

Betrachtet man einen Körper von einem Punkte $P$ aus in bestimmter Richtung (Richtung der Augenachse), so erhält man eine bestimmte An-

* p. 138 „Vidi saepissime Romae etc."
** p. 135 coroll. II. ibid.
*** p. 135 ann. ad. cor. II.

sicht desselben. Dieselbe kann graphisch wiedergegeben werden durch das perspectivische Bild, das auf einer Ebene senkrecht zur genannten Richtung durch Zentralprojection aus dem Auge entstehen würde.

Hat man ein ebenes Vorbild, so erscheint es von allen Punkten aus unverzerrt, wenn man es in einer Richtung betrachtet, die senkrecht zur Ebene des Vorbildes ist; denn die graphische Wiedergabe der Ansichten giebt perspectivische Bilder, welche dem Vorbild ähnlich sind.

### I. Anamorphosen in der Ebene $E$, welche von einem Punkte $P$ aus nach vorgeschriebener Richtung gesehen eine unverzerrte Ansicht des Vorbildes liefern.

1. Geometrische Lösung. Ist $E_1$ die Ebene senkrecht zur vorgeschriebenen Richtung, so lautet die Aufgabe in geometrischer Fassung:

Das Vorbild in der Ebene $E_1$ von $P$ aus auf Ebene $E$ zu projiciren.

Diese Aufgabe wurde besonders einfach durch die sogenannten Quadratnetze gelöst. Figur 1 und 2 giebt eine solche Construction wieder. Das Vorbild wird mit einem Netz von Quadraten überzogen, wie $ABCD$ zeigt. In der Ebene $E$ wird eine Strecke $A'D'$ in ebenso viel Theile getheilt als $AD$. Ist nun $O$ die Projection des Auges auf Ebene $E$, so ziehe man durch $O$ und die Theilpunkte Strahlen. In unserer Figur liegt $O$ auf $K'J'$ und zwar so weit von $J'$ entfernt, dass $OJ' = 16 . A'D'$. Die Aughöhe ist $PO = 4A'D'$. Trägt man diese Höhe in der Ebene $E$ auf der Senkrechten in $O$ auf, und bezeichnet den Endpunkt mit $P'$, so giebt $P'A'$ die Diagonale $A'C'$ der Anamorphose, und wenn man durch die Schnittpunkte der Diagonale Parallelen mit $A'D'$ zieht, so erhält man die Anamorphose des Quadratnetzes. Zeichnet man nun in die einzelnen Vierecke derselben die entsprechenden Theile des Vorbildes, so erhält man die gesuchte Anamorphose. Durch Construction der Diagonalen von den Quadraten des Netzes und den Diagonalen der Vierecke der Anamorphose lassen sich die Punkte des Vorbildes und seiner Anamorphose noch genauer bestimmen.

Hält man in $O$ (wo also $J'O = 16A'D'$) ein Papier senkrecht zur Zeichenebene und bringt in einer Höhe von $4A'D'$ im Papier ein kleines Loch an, so erscheint die Anamorphose, durch dieses Loch gesehen, als Quadrat und unverzerrt. Einfacher kann man dies auch erreichen, wenn man das Zeichenblatt schief hält und mit einem Auge dasselbe so betrachtet, dass die Sehstrahlen schief auffallen und von dem genannten Punkte $O$ aus gehen. Später wird noch gezeigt, wie sich diese Anamorphosen bequem in einem Spiegel betrachten lassen.

Die Richtigkeit obiger Construction ergiebt sich sofort, wenn man sich das Vorbild $ABCD$ senkrecht zur Ebene $E$ über $A'D'$ aufgestellt denkt.

2. Mechanische Lösung. Hierbei kamen zwei Instrumente zur Anwendung; das velum mesopticum und die später zu beschreibende *portula optica*.

Das velum mesopticum Kirchers* war ein Rahmen, der mit einem Schleier oder transparenten Papier überzogen war, und in die Ebene $E_1$ des Vorbildes gebracht wurde. Auf das Velum wurde das Vorbild gezeichnet und von $P$ aus beleuchtet. Es entstand dann auf $E$ ein Schatten des Bildes, der nachgezeichnet wurde. Häufig wurde auch das Bild durch Löcher markirt, und die Lichtpunkte dieser Löcher auf $E$ aufgezeichnet. Eine weitere Anwendung des Velum bestand darin, dass man das Bild beinahe ganz ausschnitt und mit gespanntem Faden, der durch $P$ ging, dem Ausschnitt nachfuhr; der Schnittpunkt des Fadens mit $E$ beschrieb dann die Anamorphose.

### II. Anamorphosen auf convexen und concaven Pyramiden.

Geometrisch wurden nur die Anamorphosen regulärer Pyramiden behandelt. Diese Anamorphosen wurden längs der Höhe der Pyramiden betrachtet, so dass sich das Auge über (bei convexen) oder unter (bei concaven) der Spitze befand.

Figur 3 und 4 giebt eine solche Construction für eine fünfseitige Pyramide. Um das Vorbild wird ein reguläres Fünfeck beschrieben, und in dasselbe weitere concentrische Fünfecke, deren Seiten sich wie 1 : 2 : 3 : 4 verhalten. In einem Achsenschnitt, durch eine Kante der Pyramide, wird die Seite der Basis in vier gleiche Theile getheilt (Fig. 4) und dieselben von $P$ aus auf die Kante projicirt. Parallelen durch die Projectionspunkte mit den Seiten des Fünfecks der Pyramidenbasis ergeben dann die entsprechende Eintheilung der Anamorphose.

Diese Eintheilung kann noch weiter vervollständigt werden durch Strahlen aus der Pyramidenspitze. Das Einzeichnen der Anamorphose geschieht dann wie bei I.

Durch Umlegen eines Papiers um die Pyramide, das hernach in eine Ebene ausgebreitet wird, kann die Anamorphose bequem auf das Papier gezeichnet und nachher wieder um die Pyramide gelegt werden.

Die mechanische Herstellung geschah durch Licht und Schatten oder durch Fäden wie bei I.

### III. Anamorphosen auf convexen und concaven Kegeln.

Statt der regulären concentrischen Polygone wurden, da es sich nur um senkrechte Kreiskegel handelte, concentrische Kreise verwendet; im Uebrigen aber ganz das vorige Verfahren eingeschlagen.

### IV. Anamorphosen auf beliebig unterbrochenen Flächen.

Es handelte sich hier z. B. darum, in einem Hof mit Säulen, Fenstern, Thüren eine Anamorphose eines Vorbildes auf diesen Gegenständen zu entwerfen.

* Kircher, lib. II. de lum. et umbr. par. II.

Die Ausführung, welche P. Marius Bettinus (Apiar. 5, Progymn. 2 cap. 3) beschreibt, war eine mechanische und geschah unter Anwendung des velum mesopticum mit Licht, Schatten oder Fäden.

Bei diesen Anamorphosen wurde auch die portula optica von Albert Dürer in Nürnberg benützt und z. B. bei Herstellung des oben genannten Bildes des François de Parula verwendet.

Dieses Instrument bestand aus zwei Rahmen, die wie zwei Blätter eines Buches zusammengeklappt werden konnten; auf dem einen überspannten Rahmen befand sich das Vorbild, der andere besass an der Umrahmung Haken, zwischen denen zwei Fäden gespannt werden konnten. Dieser zweite Rahmen wurde in der Lage befestigt, welche das Vorbild einnehmen sollte. Um zum Punkte $A$ des Vorbildes den Punkt $A'$ der Anamorphose zu erhalten, wurde die Portula geschlossen, die zwei Fäden so gespannt, dass sie durch $A$ gingen, sodann die Portula wieder geöffnet. Ein Faden, der im Augpunkte $P$ über eine Rolle ging und dort ein Gewicht trug, wurde nun durch den Kreuzungspunkt der Fäden gelegt und angezogen; derselbe bestimmte dann $A'$. Von den besprochenen Methoden wurden mancherlei Anwendungen gemacht auf gefurchte Flächen. So wurden Anamorphosen erzeugt auf aneinander gelegten dreiseitigen Pyramiden; von unten, von der Mitte und von oben gesehen erschien je ein verschiedenes Bild. Aehnliche Anamorphosen wurden mit Fäden gemacht, die auf einen Rahmen aufgezogen waren. Solche Anamorphosen werden noch heute im Grossen hergestellt.

## Katoptrische Anamorphosen.

Die Anamorphosen eines Vorbildes werden hier in einem Spiegel von einem Punkte $P$ aus nach bestimmter Richtung betrachtet und müssen dann eine unverzerrte Ansicht des Vorbildes liefern.

Diese Richtung wurde bei Planspiegeln senkrecht zum Spiegel angenommen, bei Kegelspiegeln wurde $P$ in die Achse des Kegels gelegt und die Richtung parallel dieser Achse gewählt.

Bei Cylinderspiegeln war das Vorbild ausnahmsweise kein ebenes mehr, vielmehr ein auf einem Cylinder befindliches Bild. Die Anamorphose dieses Vorbildes, im Spiegel gesehen, musste dann eine richtige (unverzerrte) Ansicht des Vorbildes liefern.

Den genannten Autoren lag indessen das Vorbild in einer Ebene abgewickelt vor, und sie bezeichneten die Anamorphose als Anamorphose dieses ebenen Bildes. Da nun aber eine solche Anamorphose nie dieselbe Ansicht liefern kann wie das ebene Vorbild, sondern nur wie das cylindrische Vorbild, so ist eine derartige Bezeichnung nicht correct; sie war eine Folge des Mangels einer Definition über verzerrte und unverzerrte Bilder.

### Anamorphosen der Planspiegel.

Die Aufgabe ist hier: Eine Anamorphose eines ebenen Vorbildes zu zeichnen, welche, von einem bestimmten Punkte $P$ aus senkrecht zu einem Planspiegel $E_1$ gesehen, im letzteren unverzerrt erscheint.

Stellt man nun in Figur 1 einen Spiegel auf $A'B'$ senkrecht zur Zeichnungsebene und sucht zum Punkte $P$ dieser Figur den symmetrischen Punkt in Bezug auf die Spiegelebene, so erhält man, von diesem Punkte aus gesehen, ein unverzerrtes Spiegelbild. Hieraus folgt, das jede Planspiegel-Anamorphose auf ganz dieselbe Weise construirt wird, wie eine optische Anamorphose.

Ueber die Accommodation der Augen. Die perspectivische Wiedergabe einer Ansicht ergab, wie wir früher anführten, ein ebenes Bild. Dasselbe bringt im Auge nicht ganz denselben Eindruck hervor, wie die Ansicht selbst, denn jedes Auge kann durch Accommodation auch die dritte Dimension der Ansicht zum Bewusstsein bringen, indem es die einzelnen Theile der Ansicht für sich nach einander fixirt, und beide Augen vermögen dieses Bewusstsein durch die stereoskopische Ansicht noch deutlicher zu machen.

Damit die optische Täuschung bei den Anamorphosen eine vollkommene ist, empfiehlt es sich daher, die Anamorphosen wenigstens bei kleinen Entfernungen mit einem Auge zu betrachten und dieselben auf ein gleichförmiges weisses oder schwarzes Papier auszubreiten. Bei Planspiegeln kann man auch den Spiegel so gross als das Vorbild ($ABCD$ der Fig. 1) nehmen, indem man auf dem Spiegel ein Papier ausbreitet, aus dem man ein Rechteck von der Grösse $ABCD$ ausgeschnitten hat. Ist der Spiegel vertical, so kann man auch die Anamorphose über dem oberen Rand senkrecht zur Spiegelebene anbringen. In diesem Falle wird das verzerrte Bild selbst nicht gesehen, wodurch die Täuschung noch vollständiger wird.

Die früher erwähnten Anamorphosen auf gefurchten Flächen (aneinander gereihten Prismen) können ebenso in einem Spiegel betrachtet werden und zeigen dann drei verschiedene Bilder, je nachdem man in den Spiegel sieht.

### Die Anamorphosen des Cylinderspiegels und des Kegelspiegels.

Die Aufgabe ist hier: Eine Anamorphose eines auf einem Cylinder ausgespannten Vorbildes zu suchen, das, von einem bestimmten Punkte $P$ im Cylinderspiegel gesehen, eine richtige (unverzerrte) Ansicht des Vorbildes ergiebt.

Die hier vorhandenen Methoden von P. Marius Bettinus Ap. 5 Progymn. 1 cap. 3; von Petrus Herigonius tom. 5, cursus math. prop. 9 perspectivae; von P. Athanasius Kircherus lib. 2, lucis et. umbr. par. 2. cap. 3 prop. II können keinen Anspruch auf Genauigkeit machen, denselben liegen willkürliche Annahmen über die Verzerrungen der Anamorphosen zu Grunde.

Auch hier wird das ebene Bild mit einem Quadratnetz überzogen, und so auf den Cylinder aufgeklebt gedacht, dass die einen Seiten, die Horizontalen, parallel der Basis, die anderen, die Verticalen, parallel den Mantellinien gehen. Der Cylinder ist immer ein Rotationscylinder.

Dass die Verticalen im Anamorphosenbild als Gerade erscheinen müssen, findet sich bei Herigonius und Kircherus; die Horizontalen dagegen, welche im Bilde der Anamorphosen Pascal'sche Schnecken sind, wie ich am Schlusse zeigen werde, sind nicht richtig übertragen.

Besonders ungenau ist das Verfahren des Bettinus. Er zieht über den Cylinderspiegel ein Papier, auf das das Vorbild aufgezeichnet ist, und nimmt dasselbe als Papiercylinder ab; projicirt das Bild von einem Punkte auf der concaven Seite desselben auf die Ebene. Die Projection geschieht mittelst Construction oder mittelst eines Lichtes. Diese Projection ist dann seine Anamorphose.

Für die Kegelspiegel findet man in dem Werke von Schott nur eine Methode angegeben, die der Projection mittelst eines Lichtes aus dem Innern eines Papierkegels, der wie obiger Papiercylinder hergestellt wird. Die Lage des Augpunktes, der jedenfalls nicht senkrecht über der Kegelspitze angenommen ist, ist dabei ganz ausser Acht gelassen. Das Werk von Leonh. Chr. Sturm giebt für Cylinder- und Kegel-Anamorphosen bessere Constructionen. Bei Cylinderspiegeln sind die Verticalen ganz richtig in den Anamorphosen abgebildet, unter Berücksichtigung des Reflectionsgesetzes; für die Abbildung der Horizontalen sind wenigstens drei Punkte derselben richtig angegeben.

Wir sehen daher, dass die richtigen Abbildungen der Horizontalen keinem der genannten Physiker und Mathematiker geglückt ist, obgleich die Schnecken Pascal's damals schon bekannt waren.

Wir geben im Folgenden die richtigen Constructionen für Cylinderspiegel und Kegelspiegel.

Denkt man sich den Cylinder mit einem Quadratnetz von oben angegebener Beschaffenheit überzogen, so lässt sich in der Zeichnungsebene $E$ ein Netz zeichnen, das, von $P$ aus im Spiegel gesehen, mit dem Cylindernetz zusammenfällt. Greift man eine Mantellinie heraus und zieht von $P$ Strahlen nach ihr, so liegen die reflectirten Strahlen in einer Ebene der Reflectionsebene zu derjenigen Ebene, die durch $P$ und die Mantellinie gelegt wird. Diese Reflectionsebene wird die Ebene $E$ in einer Geraden schneiden, welche Anamorphose der Mantellinie ist.

Ist (Fig. 5) $O$ die Projection von $P$ auf Ebene $E$, $AB$ die Mantellinie, so ist $ABOP$ die Ebene durch $P$ und $AB$. Macht man jetzt

$$\angle A'BN = \angle OBN,$$

so erhält man die Anamorphose $A'B$ von $AB$ und Ebene $ABA'$ ist jene *Reflectionsebene*.

Ist $A$ ein Punkt des Cylinders, $Q$ Mittelpunkt des entsprechenden Kreises auf dem Cylinder, so erhält man den Anamorphosenpunkt $A'$ durch folgende Construction:

Ziehe $PQ$ und $PA$, diese liefern mit Ebene $E$ die Schnittpunkte $J$ und $A''$, wo $J$ auf $OM$ liegt, und $JA'' \parallel QA$ geht. Der Einfallsstrahl $PA$ wird nun nach $A'$ so reflectirt, dass $\angle A'AR = RAP$ ist. Im $\Delta AA'A''$ geht also die Halbirungslinie $AR$ des Aussenwinkels parallel $A'A''$, das Dreieck ist also gleichschenklig, somit $AA'' = AA'$ und $A''B = BA'$. Ist nun $OP = c$ und $h$ der Abstand des Punktes $P$ vom Kreise um $Q$, so ist $JA'' = p = \frac{c}{h} \cdot a$, wo $a$ der Cylinderadius. Betrachtet man jetzt in der Ebene $E$ die Figur $JMBA'A''$, in der $MB = a$, $JA'' = p$ und $BA'' = A'B$ ist, so ergeben einfache Betrachtungen, dass ein um $M$ mit Radius $MJ$ beschriebener Kreis $JA'$ in einem Punkte $S$ so schneidet, dass $A'S = 2a - p$ ist; denn ist $A''A' = 2x$, so ist $JS = 2(p + x - a)$, $JA' = p + 2x$. Sucht man jetzt für alle Punkte $A$ des Kreises um $Q$ die Punkte $A'$, so bleibt $J$ und $p$ constant, die Punkte $A'$ liegen auf einer Pascal'schen Schnecke*, deren Verlängerungsstück (oder Verkürzungsstück) $2a - p$ ist. Diese Schnecke hat $J$ entweder als Doppelpunkt, Rückkehrpunkt oder isolirten Punkt.

Um diejenigen Punkte $x$ und $y$ auf $JM$ zu finden, durch welche die Schnecke noch weiter geht, ziehe man $QL \parallel MO$ und Mantellinie $LK$.

Macht man jetzt $\angle PLQ = \angle xLQ$, so ergiebt sich $x$; denn der einfallende Strahl $PL$ giebt den Reflectionsstrahl $Lx$.

Wiederholt man die Construction für den zweiten Endpunkt des Durchmessers $LQ$, so findet man $y$ ($y$ ist in der Fig. 5 nicht gezeichnet).

Aus drei von den Punkten $J$, $M$, $x$ und $y$ lässt sich aber die Schnecke construiren.

Ist daher in Figur 6 das Zeichnungsblatt die Ebene der Basis des Rotationscylinders, Kreis $M$ diese Basis und $O$ die Projection des Augpunktes, so mache man $OP \perp MO$ und gleich der Aughöhe, trage auf den Lothen in $K$, $M$ und $D$ die Theile der Verticalen des Quadratnetzes auf und construire zu $P$ die in Bezug auf die Lothe in $K$ und $D$ symmetrischen Punkte $\pi$ und $\pi_1$. Nunmehr projicire man die ersten Theile (die auf $KL$) aus $\pi$, die zweiten aus $P$, die dritten aus $\pi_1$ auf $OM$. Diese Projectionen liefern die Punkte $x$, $J$, $y$.

Die Pascal'schen Schnecken, die dann durch $x$ und $y$ gehen und $J$ zum mehrfachen Punkte haben, sind dann die Anamorphosen der Horizontalen des Netzes. Alle diese Schnecken haben concentrische um $M$ beschriebene Grundkreise.

---

* Zieht man von einem Punkte eines Kreises aus Sehnen und verlängert oder verkürzt dieselben von ihren Endpunkten aus um eine constante Strecke, so beschreibt der Endpunkt dieser Strecke eine Pascal'sche Schnecke.

Trägt man endlich von $K$ aus nach beiden Seiten auf der Basis Bögen ab, gleich den Theilen der Horizontalen des Quadratnetzes und verbindet die so erhaltenen Punkte $B$ mit $O$ und macht $\angle MBA' = \angle MBO$, so erhält man die Anamorphosen $BA'$ der Verticalen des Netzes.

Anmerkung. Das Spiegelbild der Anamorphosen liegt nicht etwa auf dem Spiegel, sondern in der Basisebene selbst, wie aus Figur 5 ersichtlich ist. Die Strahlen, welche nämlich von $A'$ ausgehen und das Auge treffen, gehen (nach der Reflection) in ihrer Verlängerung durch $A''$.

Um auch für den Fall des convexen Cylinderspiegels die Anamorphosen der Verticalen des Quadratnetzes zu erhalten, trägt man (wie bei $K$) von $D$ aus auf der Basis die Theile der Horizontalen des Netzes nach beiden Seiten auf und construirt, wie bei $B$, die Reflectionsstrahlen. Wir behandeln jetzt, da sich wesentliche Unterschiede herausstellen werden, beide Arten von Spiegeln.

### 1. Der convexe Cylinderspiegel.

Die mehrfachen Punkte der Schnecken liegen der Construction gemäss auf der abgelegnen Hälfte $MJ$ des Cylinders; vom Cylinder und den Anamorphosen kommt nur der Theil in Betracht, welcher von den Verlängerungen der Grenztangenten aus $O$ und dem zugewandten Theile des Spiegels eingeschlossen wird, der andere Theil der Ebene ist unsichtbar. Bei denjenigen Schnecken (wie die grosse der Figur), welche zwei Bögen in den sichtbaren Theil senden, kommt nur einer (der vollständig ausgezogene) in Betracht, der andere bezieht sich auf den concaven Spiegel. Da sich in dem betrachteten Theile weder die Schnecken unter einander, noch die Geraden unter einander schneiden, so wird die Anamorphose im Spiegel nur einmal gesehen.

### 2. Der concave Spiegel.

Ueber denselben dürften nach meinen Kenntnissen der einschlägigen Literatur noch keine theoretischen Untersuchungen angestellt worden sein. Da sich dieselben indessen enge an die vorigen anreihen, so habe ich sie dieser historischen Abhandlung beigefügt.

Entweder befindet sich hier das Auge im Cylinderraum, oder bei unvollständigen Cylindern ausserhalb.

Im ersteren (selteneren) Fall bedeckt das im Spiegel sichtbare Anamorphosennetz die Basis, im anderen Fall bedeckt es den durch die Grenzstrahlen abgeschnittenen sichtbaren Theil der Ebene. Da sich die Schnecken, namentlich in der Nähe von $D$, gegenseitig schneiden, so wird jeder solche Schnitt, wie auch die Doppelpunkte, mehrmals im Spiegel gesehen. Dazu kommt noch, dass sich auch die Geraden der Anamorphosen schneiden.

Zeichnet man jetzt in ein Fach des Netzes der Anamorphosen eine Figur, so sieht man dieselbe von $P$ aus mehrere Male, wobei es sogar *möglich* ist, dass Theile der Figur auf anderen Theilen derselben Figur zu

liegen kommen. Von diesen Bildern wird im Allgemeinen von $P$ aus nur ein einziges unverzerrt erscheinen.

Indessen giebt es auch einen Theil des Netzes der Anamorphose, von dem höchstens ein Bild im Spiegel erscheinen kann; es ist dies derjenige Theil der Ebene, welcher von der Berührungsebene*, die man durch die Grenztangenten von $O$ an den Spiegel erhält, und dem Spiegel begrenzt wird.

Das Netz dieses Theiles darf nicht mit dem des convexen Spiegels verwechselt werden. In unserer Figur wird es gebildet von den punktirten Schneckentheilen und von den verlängerten Strahlen, die in der Nähe von $D$ (nicht etwa $K$) gezogen worden sind.

### Der convexe Kegelspiegel.

Punkt $P$ befinde sich in der Achse des Rotationskegels, die Anamorphose in der Basisebene. Der Strahl nach der Spitze trifft dann die Anamorphose noch, wenn der Oeffnungswinkel des Kegels kleiner als $45^0$ ist.

Das Vorbild wird durch concentrische Kreise und Radien mit einem Netz überzogen. Die Basis des Kegels ebenfalls mit einem Netz, das dem genannten ähnlich ist. In Figur 7 ist die Hälfte dieses Netzes durch die concentrischen Halbkreise 1, 2, 3 dargestellt. Projicirt man die Punkte 1, 2, 3 auf die Mantellinie $SA$ des Kegels und construirt zu $PS$, $P1'$, $P2'$, $P3'$ die Reflectionsstrahlen $So$, $SI$, $SII$, $SIII$ (vermittelst der Strahlen nach dem symmetrischen Punkte $P'$), so erhält man die Punkte $o$, $I$, $II$, $III$ und durch Kreise um $O$ die Anamorphosen der Kreise des Vorbildes, durch die verlängerten Radien endlich die Anamorphosen der Radien.

Wäre der Kegel concav (etwa ein Kegelrumpf, auf dessen kleinerem Kreise die Anamorphose aufliegt, während man vom grösseren aus in den Rumpf hineinsieht), so würde im Allgemeinen jeder Punkt mehrfach gesehen.

### Der Kugelspiegel.

Legt man bei beliebigen Rotationsflächen den Augpunkt $P$ in die Rotationsachse, die Ebene der Anamorphosen senkrecht zu dieser Achse und überzieht das Vorbild wieder mit einem Netz durch concentrische Kreise und Radien, so lässt sich, ganz wie beim Kegel die Anamorphose derselben construiren, man erhält wieder concentrische Kreise und Radien.

Bei der Kugel wird man dann im Mittelpunkte der Anamorphose eine Oeffnung anbringen, die Anamorphose der Kugel zuwenden und durch die Oeffnung das unverzerrte Bild erblicken.

* Genauer wäre dieser Theil durch die caustische Linie des leuchtenden Punktes $O$ anzugeben. Diese ist für den ganzen Basiskreis eine Curve mit zwei Rückkehrpunkten auf $DK$ und Evolute einer Pascal'schen Schnecke. Bei Angabe des oben genannten Theiles der Ebene wäre dann statt der Berührungssehne die caustische Linie der Spiegelbasis, welche ein Theil der Evolute ist, zu setzen. Von den Pascal'schen Schnecken sei hier noch erwähnt, dass sie verlängerte oder verkürzte Epicykloiden sind, für die Rollkreis und fester Kreis gleich gross sind.

Es bleibt jetzt noch übrig, die Instrumente Leupold's zu behandeln.

Würde man die früheren Netze des Vorbildes für Plan-, Cylinder- und Kegelspiegel mit diesen Instrumenten übertragen, so würden auf jeder Geraden der Anamorphosen gleiche Theile entstehen.

Beim Cylinderspiegel wären neben diesen Theilpunkten auch die Geraden selbst unrichtig; statt der Pascal'schen Schnecken würde man concentrische Kreise erhalten.

Bei den Planspiegeln wären die Anamorphosen richtig, wenn der Augpunkt unendlich fern wäre, da aber dies ausdrücklich nicht der Fall ist, so sind auch diese Anamorphosen uncorrect.

Figur 8 giebt die Radtransmission der Maschine für Kegel-Anamorphosen. Das grosse Rad $R$ ist mit einer Saite überzogen, deren beide Enden $a$ und $b$ an einem horizontalen Lineal befestigt sind. Mit dem grossen Rad dreht sich das mit ihm fest verbundene kleine $r$, das durch eine Saite ein anderes $r_1$ in Drehung versetzen kann. Diese Saite geht nach den Enden $c$ und $d$ eines anderen Lineals. Die drei Räder sind in einem Gehäuse, das um den Punkt $O$ des Zeichnungsblattes gedreht werden kann, wobei die Mittelpunkte der Räder in der Drehachse bleiben. Fährt man mit Stift $t$ dem Vorbilde auf der Zeichnungsebene nach, so beschreibt Stift $s$ die Anamorphose. Aus der Figur folgt, dass, wenn $t$ gegen $O$ hin den Weg $y$ macht, $s$ den Weg $y\frac{R}{r}$ machen muss, also ein constantes Vielfaches des vorigen.

Beim Cylinderspiegel hat man wieder ein Wellrad (Fig. 9) mit Rädern $R$ und $r$, nebst Saiten, von denen die über $R$ gespannte nach den Enden $a$ und $b$ eines horizontalen Lineals geht, während die andere, über $r$ gespannte, nach den Enden $c$ und $d$ eines verticalen Lineals geht.

In Wirklichkeit sind noch zwei weitere Räder vorhanden, die durch die letzte Saite in Drehung gebracht werden können, aber nur den Zweck haben, das Verschieben gleichmässig zu reguliren. Am verticalen Lineal ist ein Arm mit Stift $s$, ebenso am horizontalen. Das Vorbild wird auf einen Holzcylinder aufgeklebt, um dessen Achse $x$ das Gehäuse der Rollen gedreht werden kann. Fährt man mit dem Stifte $s$ dem Vorbilde auf dem Cylinder nach, so beschreibt Stift $t$ die Anamorphose. Die Unrichtigkeit dieser Anamorphosen folgt schon daraus, dass die Lage des Auges gar nicht in Betracht gezogen wurde.

Die Planspiegel-Anamorphosen werden mit einem Apparat gemacht, der ein Wellrad ohne weitere Rolle besitzt und dem Apparat für Kegelspiegel sonst ganz entspricht.

Cannstatt, April 1893.

# UN FRAGMENT DES MÉTRIQUES DE HÉRON.

Von

PAUL TANNERY

in Paris.

Dans son édition de Pappus, Hultsch a publié (vol. III, praef. XVII—XXI, 1139—1165) le début de Prolégomènes à la Syntaxe de Ptolémée, qui dans certains manuscrits sont anonymes, dans d'autres sont attribués à Pappus ou encore à Diophante. En réalité ces Prolégomènes ont été compilés, principalement d'après Pappus et Théon, par un auteur postérieur à Syrianus* (5e siècle de notre ère), mais qui doit avoir vécu à Alexandrie et parait devoir être rattaché à l'école d'Ammonius le fils d'Hermias. Ainsi il qualifie Ptolémée de θεῖος (divin); ce n'est donc pas un chrétien; etc.

Dans la partie inédite de ces Prolégomènes, j'ai rencontré un fragment des Métriques de Héron, que je crois d'autant plus intéressant de publier qu'il s'agit de l'extraction approchée de la racine d'un nombre non carré parfait, c'est à dire de la question pour laquelle Eutocius (comm. in dim. circuli Archimedis p. 270, Heiberg) renvoie précisément aux Métriques de Héron, en même temps qu'à Pappus, à Théon et à d'autres commentateurs de la Syntaxe de Ptolémée.**

Je donnerai le texte d'après le manuscrit de la Bibliothèque Nationale de Paris grec 2390, du XIIe siècle (folio 9 verso 2e colonne):

* Il attribue à ce philosophe, le maitre de Proclus, d'avoir inventé, pour faciliter la division d'une fraction sexagésimale simple par une autre, par exemple de 120‴ par 240$^{IV}$, de substituer au dividende et au diviseur leurs quotients par un facteur commun. Preuve singulière des lacunes que, dans l'antiquité, présentait l'enseignement classique pour le calcul.

** Il est possible que parmi ces autres commentateurs, Eutocius, disciple d'Ammonius, ait précisément en vue l'auteur des Prolégomènes. Le manuscrit auquel nous les empruntons semble d'ailleurs dériver d'un exemplaire ayant appartenu à Héliodore, le frère d'Ammonius; cet Héliodore y avait noté des observations faites par lui-même; ce sont celles qui ont été rapportées par Boulliau sous le nom de Thius (parce qu' Héliodore en a ajouté une faite à Athènes sous le mention τοῦ Θείου τήρησις; ce divin n'est autre évidemment que Proclus). Elles ont été publiées, très fautivement, par Halma (Chronologie de Ptolémée, seconde partie, pages 10—12) qui a omis la phrase importante dont elles sont précédées: ταῦτα ἀπὸ τοῦ ἀντιγράφου τοῦ φιλοσόφου ἔγραψα. D'après cet indice, on pourrait attribuer les Prolégomènes à Héliodore.

*Δείξομεν οὖν ὡς δεῖ εὑρίσκειν τῶν διδομένων ἀριθμῶν πλευρὰν τετραγωνικήν. ἔστω δὲ καθ' ὑπόθεσιν ὡς ἐν τοῖς Μετρικοῖς Ἥρωνος ἐπὶ τῇ τοῦ καθολικοῦ τριγώνου [μερίσει εἴτουν] μετρήσει*... εἰρημένοις ὑπὸ τοῦ φιλοσόφου Θέωνος διὰ τοῦ ὑπομνήματος** δεῖξαι τὸ προκείμενον. Ὁ γὰρ Ἥρων εἴς τινα ἀριθμὸν τουτέστιν τὸν ψκ περιτυχὼν λαμβάνει τούτου τὴν πλευρὰν ἵνα εὕρῃ τὸ ἐμβαδὸν τῆς καθολικῆς μετρήσεως τοῦ τριγώνου. λέγει δὲ οὕτω. „Καὶ ἐπεὶ αἱ ψκ ῥητὴν πλευρὰν οὐκ ἔχουσι, ληψόμεθα μετὰ διαφόρου ἐλαχίστου τὴν πλευρὰν οὕτως. ἐπεὶ ὁ συνεγγίζων τῷ ψκ τετράγωνός ἐστιν ὁ ψκθ καὶ πλευρὰν ⟨ἔχει⟩*** τὸν κζ, μέρισον τὸν ψκ εἰς τὸν κζ. γίνονται κς δίμοιρον.“ εἴρηται δὲ πῶς δεῖ μερίζειν καὶ ὡς ὅτι μάλιστα τὰ τοιαῦτα εὐμαρέστερον διὰ τὸ ὁμοειδῆ εἶναι τὰ μέρη τῶν ἀριθμῶν τούτων.† „Καὶ“ (φησί) „τούτῳ πρόσθες τὰς κζ“ τουτέστιν τοῖς κς δίμοιρον, „γίνονται νγ δίμοιρον. τούτων τὸ ἥμισυ, γίνονται κς L′ γ′. ἔσται ἄρα τοῦ ψκ ἡ πλευρὰ ἔγγιστα κς L′ γ′. ταῦτα γὰρ ἐφ' ἑαυτὰ γίνονται ψκ λς′. ἐὰν δὲ (φησί) βουλοίμεθα ἐλάσσονι μορίῳ τοῦ λς′ ἀριθμοῦ τὴν διαφορὰν γίνεσθαι, λαμβάνομεν τὸν ψκ λς′ καὶ ταὐτὰ ποιήσαντες, εὑρήσομεν πολλῷ ἔλασσον τοῦ λς′ τὴν διαφορὰν γινομένην.“ οὕτως μὲν οὖν ὁ Ἥρων.*

Traduction. Nous montrerons donc comment il faut trouver la racine carrée d'un nombre donné. Proposons-nous de le montrer à la fois suivant ce qui se trouve dans les Métriques de Héron pour la mesure du triangle en général et d'après ce qu'en dit le philosophe Théon dans son Commentaire. Héron en effet rencontre un certain nombre 720, dont il prend la racine, pour trouver l'aire du triangle d'après la mesure générale. Voici ce qu'il dit.

„Puisque 720 n'a pas de racine rationelle, nous prendrons comme suit la racine avec la différence minima. Comme le carré le plus voisin de 720 est 729, dont la racine est 27, divisez 720 par 27; il vient $26\frac{2}{3}$.“ ††

* Le texte de l'original avait primitivement porté *μερίσει*; *εἴτουν μετρήσει* est l'indication de la véritable leçon, qui de la marge a passé dans le corps. Après *μετρήσει* j'indique une lacune; on peut suppléer *καὶ ἐν τοῖς*.

** Il s'agit du commentaire de Théon sur Ptolémée, que notre auteur compile ensuite.

*** J'ai ajouté le mot *ἔχει*.

† Toute cette phrase, qui se rapporte aux précédents développements donnés sur la division n'appartient pas au texte de Héron.

†† Je supprime la phrase intercalée dans le texte héronien: „on a dit comment il faut effectuer la division; dans le cas actuel, elle est très simple, les ordres (de fractions sexagésimales) étant les mêmes pour ces nombres“ c'est à dire qu'ils peuvent être considérées comme des degrés, et qu'il ne s'agit pas de diviser, par exemple, des tierces par des quartes.

Ajoutez-y 27, il vient $53\frac{2}{3}$; prenez la moitié, qui est $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Ainsi la racine de 720 sera à très peu près $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$; car en multipliant ce nombre par lui-même, on a $720\frac{1}{36}$. Si nous voulons que la différence soit encore moindre que la fraction $\frac{1}{36}$, nous prenons $720\frac{1}{36}$ et faisant la même chose, nous trouverons que la différence tombe beaucoup au dessous de $\frac{1}{36}$.

Voilà ce que dit Héron."

**Remarques.** L'extraction de la racine carrée de 720 se trouve dans la Geometria Heronis (p. 110 de l'éd. Hultsch) pour le calcul d'un triangle fuisant partie d'un trapèze et dont les côtés sent les nombres 7, 8, 9 (périmètre $2p = 24$). L'aire est obtenue par la formule:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Il est évident que c'est l'application de cette formule que notre auteur entend par les mots *καθολικὴ μέτρησις τοῦ τριγώνου*. Or dans la Geometria, nous trouvons précisément ces mots comme titre pour les problèmes où la même formule est employée pour le calcul de l'aire (p. 71, n° 31). Mais nous ne la rencontrons là que pour deux triangles dont l'aire est rationelle avec les côtés (13, 14, 15 et le rectangle 5, 12, 13).

On doit en conclure que la Geometria ne peut tout au plus valoir que comme un extrait incomplet des *Μετρικά*.

2°. Soit $A = a^2 + r$, un nombre non carré parfait, $\underline{a}$ une valeur approchée de la racine, $r$ positif ou négatif. Héron enseigne à prendre pour $\sqrt{A}$ la valeur approchée

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right) = a + \frac{r}{2a}$$

qui, comme on sait, explique à peu près le tiers des 25 racines non exactes de la collection héronienne ($\underline{a}$ étant supposé entier).

Comme second degré d'approximation, il enseigne de prendre

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right).$$

C'est également le procédé connu de Barlaam et de Nicolas Rhabdas* au XIV° siècle; l'antiquité de ce procédé est donc démontrée. Mais comme aucune des racines non exactes de la collection héronienne ne parait être donnée directement par un calcul de ce genre, le problème que soulèvent ces racines pour le second degré d'approximation reste entier.

---

* Voir Notices et extraites des Manuscrits XXXII, 1886; Lettre de Rhabdas à Tsavoukhe 7, 8, 9, 10, 11.

# Recensionen.

---

KARL KRUMBACHER, **Woher stammt das Wort Ziffer (Chiffre)?** Sonderabdruck aus den Études de philologie néo-grecque. Paris 1892. 11 S. und **Noch einmal das Wort Ziffer.** Sonderabdruck aus der Byzantinischen Zeitschrift. Leipzig 1893. 5 S.

Herr Krumbacher hat in zwei Aufsätzen mit dem Ursprung des Wortes Ziffer sich beschäftigt, hat das zweite Mal eine Meinung selbst widerlegt, die er das erste Mal wahrscheinlich zu machen wusste. Da unsere Fachgenossen nicht leicht in die Lage kommen dürften, die Zeitschriften zur Hand zu nehmen, in welchen beide Aeusserungen erschienen, so gestatten wir uns, in aller Kürze deren Inhalt anzudeuten. Die Abstammung der Wörter Ziffer, Chiffre von *aṣ — ṣifr* ist nie angezweifelt worden, aber was ist aṣ — ṣifr? Ist es ein arabisches Wort mit der ursprünglichen Bedeutung *leer*, welches dann später die abgeleitete Bedeutung *Null* annahm, oder ist es ein fremdes Lehnwort? Herr Krumbacher war zuerst geneigt, diese Meinung für die richtige zu halten. Er glaubte, das griechische ψῆφος sei allmälig in *ṣifr* übergegangen, habe dabei den Sinn der Null angenommen, und da diese auf Sanskrit *sunya*, d. h. leer hiess, habe auch ṣifr als arabisches Wort für leer eintreten müssen. In dem zweiten Aufsatze ist dagegen aṣ — ṣifr als ein arabisches Wort erkannt, welches früher leer als Null hiess. Ueberdies ist gezeigt, dass der Laut ψ niemals in ein arabisches ṣ überzugehen vermag, sondern — mit Rücksicht darauf, dass den Arabern ein p fehlt — entweder in b s oder in f s zerfällt. So wurde nachweislich ψῆφος zu fsifsâ, vocalisirt fesîfisâ.

CANTOR.

---

**Die Arithmetik des Elia Misrachi.** Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik von GUSTAV WERTHEIM, Oberlehrer. Programm der Realschule der israelitischen Gemeinde (Philanthropin) zu Frankfurt a. M. [1893. Programm Nr. 419.] 42 S. Druck von Kumpf und Reis. Frankfurt a. M.

Die Frage ist dem Referenten schon vorgelegt worden, ist ihm beim Niederschreiben der beiden ersten Bände seiner Vorlesungen über Geschichte

der Mathematik von selbst aufgetaucht, ob die Mathematik der Juden nicht einen eigenen Abschnitt beanspruche? Er hat die Frage stets verneint und hat auch in die am Jahresende 1893 erschienene neue Auflage des I. Bandes keinen solchen Abschnitt eingeschoben. Er wüsste in der That für denselben keinen Inhalt. War die mathematische Begabung der Juden zur Zeit, als sie noch ein Volk bildeten, sowie im Mittelalter, so lange sie in hebräischer Sprache zu schreiben pflegten, eine wesentlich geringere, als sie im Laufe der Jahrhunderte alsdann geworden ist, bis sie in unseren Zeiten einen Jacobi, einen Eisenstein, einen Kronecker, einen Halphen, um nur Verstorbene zu nennen, an die Spitze der Forscher brachte? Sind alte Werke von grosser Tragweite spurlos verloren gegangen? Sind solche gar noch vorhanden, aber unbekannt, weil Die, welche sie lesen können, den Inhalt nicht verstehen, und die den Inhalt beurtheilen könnten, der Sprache nicht mächtig sind? Wir wissen es nicht. Wir wissen nur, dass die bekannten mathematischen Schriften hebräisch schreibender Gelehrten von so seltenem Werthe sind, dass sie gar wohl in die Literatur anderer Nationen eingeschaltet werden können. Auch das „Buch der Zahl" des Elia Misrachi, welches 1534 im Original, dann auszugsweise und mit einer lateinischen Uebersetzung von Schreckenfuchs begleitet 1546 im Drucke erschien, macht keine Ausnahme. Es wird künftig in unserem XIII. Abschnitte, wahrscheinlich in Capitel LX, einen angemessenen Platz finden und zugleich aus dem LIV. Capitel [Bd. II S. 210] verschwinden, da natürlich der früher lebende Johannes Widmann keine Kenntniss von Misrachi's Rechenbuch besitzen konnte. Mit dieser Richtigstellnng einer unserer eigenen Angaben haben wir zugleich angedeutet, was wir noch bestimmter auszusprechen wünschen, dass Herr Wertheim in seiner Programmabhandlung einen Gelehrten zu allgemeinerer Kenntniss gebracht hat, der so gut wie verschollen war, und dass wir persönlich ihm für die uns gewordene Belehrung ausserordentlich erkenntlich sind. Misrachi hat zwar, wie Herr Wertheim ausdrücklich hervorhebt, das Material zu seinem Buche Griechen und Arabern, sowie einem Schüler von diesen, Abraham ibn Esra, entnommen, aber doch nicht so, dass nicht an vielen Orten der selbstdenkende Verfasser zu Tage träte. Am Interessantesten vielleicht ist Misrachi's Summirung der Cubikzahlen auf Grundlage der Gleichungen $\frac{1^3+2^3}{1+2}-\frac{1^3}{1}=2$, $\frac{1^3+2^3+3^3}{1+2+3}-\frac{1^3+3^3}{1+2}=3$ u. s. w., deren Verallgemeinerung allerdings auf bloser Induction zu beruhen scheint. Herr Wertheim berichtet (S. 6), Dr. M. Silberberg in Posen besitze eine von ihm angefertigte deutsche Uebersetzung des Musterwerkes von Abraham ibn Esra (1093—1167). Vielleicht würde auch sie eine gelegentliche Veröffentlichung, sei es vollständig, sei es im Auszuge, verdienen.

CANTOR.

**Die Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht** von Max Koppe. Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Andreas-Real-Gymnasiums in Berlin. Ostern 1893 [1893. Programm Nr. 93]. Berlin 1893. R. Gaertner's Verlagsbuchhandlung. Hermann Heyfelder. 34 S. mit 5 Figuren.

Wir stehen nicht an, das uns vorliegende Programm als ein solches zu bezeichnen, welches ganz besondere Beachtung verdient. Die Aufgabe, welche Herr Koppe sich gestellt hat, ist zunächst eine pädagogisch sehr wichtige. Die Bedeutung von Logarithmen- und Sinustafeln für die Praxis steht nicht im Einklange mit der Art, wie der Schüler dort, wo sie ihm zuerst vorgeführt werden, also in der Mittelschule sie kennen lernt. Fertige Tafeln liegen ihm vor; in ihnen als erfahrungsmässig gegebenen nachzuschlagen lernt er; wie die Tafeln entstanden, wird ihm höchstens angedeutet, und zwar so angedeutet, dass der Versuch, das seit dritthalb Jahrhunderten Vorhandene wenigstens an einigen Zahlen selbstständig zu prüfen, statt Reiz nur abschreckendes Grauen erzeugen kann. Herr Koppe sucht nun zu zeigen, wie nach seiner Meinung der Lehrer verfahren soll. Er wünscht, dass die Logarithmen in Verbindung mit der Zinseszinsrechnung gelehrt werden. Dass man Zinseszinsaufgaben mittelst Logarithmen behandle, geschieht ja immer, aber Herr Koppe will den umgekehrten Weg eingeschlagen wissen. Er will von der Zinseszinstafel ausgehend an ihr zeigen, wie nach einer Zeit $Z$ der Anfangswerth sich verdoppelt habe, nach der Zeit $2Z$ vervierfacht u. s. w., und will nun die Interpolation der arithmetischen, wie der geometrischen Reihe vorgenommen wissen, welche in der Zinseszinstafel einander gegenüberstehen. So etwa, allerdings ohne den Namen Zinseszins, verfuhr schon John Neper, und an ihn soll man auch heute noch anknüpfen. Was die Einführung der Sinustafel betrifft, so befürwortet der Verfasser eine Benutzung der Tafel selbst, bevor man logarithmisch-trigonometrische Tafeln anwende, deren Auftreten immerhin ein künstliches genannt werden muss, dessen man sich erwehren soll, so lange der Sinusbegriff selbst noch nicht ganz fest eingeprägt ist. Mit mehreren anderen Verfassern von Schulbüchern verlangt deshalb Herr Koppe, die Lehre von den Logarithmen solle überhaupt erst nach der Trigonometrie auf der Mittelschule in Angriff genommen werden. Herr Koppe ist, wie man aus dieser sehr gedrängten Darstellung seiner Grundgedanken entnehmen mag, Anhänger der geschichtlich beglaubigten Entwickelung. Theoretisch mag eine solche ja oftmals, man wird sogar getrost sagen können meistens, durch späteres Wissen überholt sein, für das Erlernen bleibt sie darum doch, wenigstens auf elementarem Gebiete nach Herrn Koppe's Glaubensbekenntniss, der naturgemässe Weg. Zu einem solchen Glaubensbekenntnisse gelangt man durch eigene geschichtliche Forschung, und Herr Koppe hat in seinem Programme den Beweis geliefert, dass er auch hier mit Glück sich versucht

hat. Er hat die Gelegenheit gehabt, verhältnissmässig seltene Bücher, welche Referent nie in der Hand gehabt hat, zu lesen und hat diese Gelegenheit benutzt und ausgenutzt. Herrn Koppe's Darstellung zu Folge hat z. B. Briggs in seiner Trigonometria Britannica von 1633 die unabhängige Bildung der Binomialcoefficienten bei Potenzen mit ganzen positiven Exponenten gekannt, während bis dahin nur die recurrirende Darstellung derselben vorhanden war. Eine weitere Behauptung geht dahin, Plato von Tivoli habe nicht, wie man allgemein annahm, in seiner Uebersetzung des Al Battani das Wort *sinus* eingeführt; nur Randbemerkungen Regiomontan's enthielten jenes Wort, und aus ihnen sei an einer einzigen Stelle *sinus versus* in den Text eingedrungen. Das Alter des Wortes sinus wird dadurch allerdings nicht wesentlich geändert, da Herr Koppe annimmt, es sei von Gerhard von Cremona eingeführt worden. Eine dritte Bemerkung bezieht sich auf den Almagest. Herr Koppe findet es schwer glaublich, dass die *μεγάλη σύνταξις* zu einer *μεγίστη* geworden und daraus al-megist = Almagest entstanden sei. Er vermuthet vielmehr die Verstümmelung *μεγα. συτι.*, woraus *megasiti* wurde und daraus Almagest. Er beruft sich auf die Thatsache, dass einer alten Uebersetzung des Almagestes aus dem Arabischen in das Lateinische geradezu die Bemerkung beigefügt sei, das Werk habe griechisch „megasiti" geheissen.

Cantor.

**Carl Heinrich Schellbach.** Gedächtnissrede, gehalten in der Aula des Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums am 29. October 1892 von Felix Müller. Mit einem Bildnisse Schellbach's. 35 S. Berlin 1893 bei Georg Reimer.

Schellbach's Leben umspannt eine lange Zeit. Vom 25. December 1804 bis zum 29. Mai 1892 hat er fast $87^1/_2$ Jahre durchmessen, und der grösste Theil dieser vielen Jahre war fruchtbarer Arbeit geweiht. Wir haben nicht das Vergnügen gehabt, in persönlichen Beziehungen zu dem Verstorbenen zu stehen. Als wir 1852 in Berlin studirten, war Schellbach's „Mathematisch-pädagogisches Seminar" noch nicht vorhanden. Erst 1855 hat er es gegründet. Nahe Freunde von uns, welche demselben angehörten, haben uns mit grösster Befriedigung, ja mit einer Art von Begeisterung von dieser Anstalt gesprochen und stimmten hier, wie in Allem, was sie zu Schellbach's Lobe erzählten, vollkommen mit dem Verfasser der uns vorliegenden warmen Gedächtnissrede überein. Schellbach war ja gewiss ein gelehrter und scharfsinniger Mathematiker und Physiker. Diese Ueberzeugung gewinnt jeder Leser seiner weder nach Zahl noch Inhalt unbedeutenden Schriften. Aber der Schwerpunkt seines Wirkens lag doch in seiner Lehrthätigkeit. In der Schule, wie im Seminare war es seine Freude, tüchtige Zöglinge heranzubilden, und diese Freude ist ihm häufig geworden. War doch Rudolf Clebsch der Erste von

Schellbach's Seminaristen, und hundert Andere wirken heute noch in Schellbach's Geist und in seinem Sinne an deutschen Mittelschulen. Wir brauchen nicht erst zu sagen, dass der Verfasser der Gedächtnissrede zu dieser Schaar gehört. CANTOR.

---

**Notice sur les travaux scientifiques de Louis-Philippe Gilbert,** professeur à l'université catholique de Louvain, correspondant de l'institut de France par P. MANSION, professeur ordinaire à l'université de Gand, membre de l'académie royale de Belgique. Paris 1893. Gauthier-Villars & Fils. 86 p. avec le portrait de Mr. Gilbert.

Louis-Philippe Gilbert, von väterlicher Seite Franzose, durch die Mutter einer alten Flamändischen Adelsfamilie entstammend, ist am 7. Februar 1832 geboren, am 4. Februar 1892 gestorben. Schon im October 1855, also im Alter von noch nicht 24 Jahren, wurde er der Nachfolger seines Lehrers Pagani als Professor der höheren Analysis und analytischen Mechanik an der Universität Löwen, und diese Lehrstelle verwaltete er durch 35 Jahre. Im Jahre 1890, demselben Jahre, in welchem ihn die ehrende Wahl zum correspondirenden Mitgliede der Pariser Akademie traf, trat er von der Professur zurück, mit der Absicht, sich ausschliesslicher der *Société scientifique de Bruxelles*, zu deren Gründer er gehörte, zu widmen, und ihr gehörte in der That seine letzte Wirksamkeit an. Gilbert war Lehrer, war Gelehrter. In ersterer Eigenschaft soll er Vortreffliches geleistet haben, und die gedruckten Vorlesungen, *Cours d'analyse infinitésimale* und *Cours de mécanique analytique*, von welchen jene bereits in vierter, diese in dritter Auflage erscheinen konnte, bestätigen das von anhänglichen Schülern gespendete Lob. Die eigentliche Gelehrtenthätigkeit Gilbert's zu schildern, ist die Aufgabe, welche Herr Mansion sich gestellt hat, dem Berufsgenossenschaft und 24jährige Freundschaft mit dem Verstorbenen das Recht einräumten, seinen wissenschaftlichen Nekrolog zu schreiben. Wir folgen ihm nicht in der Kennzeichnung der zahlreichen grösseren und kleineren Abhandlungen Gilbert's. Wir erwähnen nur eine Abhandlung über die Gammafunctionen in dem XLI. Bande der Memoiren der Belgischen Akademie (1873), eine solche über Curven auf Oberflächen (ebenda Bd. XXXVII von 1869), welche eine Ableitung der Sätze von Gauss und von Ossian Bonnet über Krümmungsmaasse enthält, von deren Vorzügen Herr Mansion sich in seinen eigenen Vorlesungen, wo er sich ihrer zu bedienen pflegt, überzeugt hat, endlich drei grosse Arbeiten über Rotationsbewegungen und relative Bewegungen in den Annalen der Société scientifique de Bruxelles für 1878, 1882, 1883. Herr Mansion rühmt auch noch geschichtliche Arbeiten Gilbert's über den Galilei-Process. Unsere wissenschaftliche Ueberzeugung steht in dieser Frage der von Gilbert mit grosser Heftigkeit verflochtenen fast diametral gegenüber. Wir wollen

und können hier nicht so beiläufig die Frage von der Echtheit des Protocolles von 1616 behandeln. Wir wollen es namentlich darum nicht, weil für uns die Frage eine einfach geschichtliche ist; für Gilbert aber und, wie es scheint, auch für Herrn Mansion ist das geschichtliche Interesse hier mit Fragen des kirchlichen Glaubens vermengt, und über solche enthalten wir uns grundsätzlich des Streites. CANTOR.

---

**Vorlesungen über die Bernoulli'schen Zahlen**, ihren Zusammenhang mit den Secanten-Coefficienten und ihre wichtigeren Anwendungen von Dr. LOUIS SAALSCHÜTZ, a. o. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg. Berlin 1893, bei Julius Springer VIII, 208 S.

Von den sechs Seiten, auf welchen im Klügel'schen Wörterbuche mit einer für das Erscheinungsjahr 1803 genügenden Vollständigkeit die Bernoulli'schen Zahlen abgehandelt sind, zu den 26 Seiten, welche sie 30 Jahre später in dem Grunert'schen Supplemente zu jenem Wörterbuche beanspruchten, von diesen zu dem nach weiteren 60 Jahren möglich gewordenen Bändchen, welches vor uns liegt, das ist, an einem einzelnen Beispiele gezeigt, die Erweiterung, welche die Mathematik des XIX. Jahrhunderts nicht blos in Gestalt von Angliederung ganz neuer, früher unbekannter Gebiete, sondern auch im blossen Ausbau von längst Vorhandenem erfahren hat. Wir geben allerdings zu, dass Herr Saalschütz einen sehr günstigen Gegenstand gewählt hat, den er zuerst in Gestalt von Universitätsvorlesungen, dann als Druckwerk monographisch behandelt hat, aber derartige Gegenstände bietet die moderne Wissenschaft noch mehrere, und wir sind überzeugt, es wäre kein Fehlgriff, wenn wieder einmal ein Lehrbuch der Kettenbrüche etwa geschrieben werden wollte, so vortrefflich für seine Zeit Herr Stern vor nahezu 60 Jahren diese Lehre behandelte. Wir haben der Zwischenzeit von 90 Jahren gedacht, welche zwischen dem Klügel'schen Wörterbuche und den Saalschütz'schen Vorlesungen liegt. Eine genau ebenso lange Frist trennt das Erscheinen jenes Wörterbuches nach rückwärts von dem ersten Auftauchen der Bernoulli'schen Zahlen in der 1713 gedruckten, wenn auch früher verfassten Ars conjectandi von Jacob Bernoulli. Mit dessen Recursionsformel beginnt Herr Saalschütz sein Bändchen, dessen vier Abschnitte der Reihe nach die den Inhalt scharf bezeichnenden Ueberschriften tragen: Recursionsformeln. Unabhängige Darstellungen. Zahlentheoretische Untersuchungen. Die Mac-Laurin'sche Summenformel. Innerhalb jedes Abschnittes ist so viel als thunlich die geschichtliche Reihenfolge beibehalten, und vergleicht man das in den einzelnen Abschnitten Dargebotene mit einander, so zeigt sich ein ganz ähnliches Wachsthumsgesetz wie wir es oben aus dem Umfange verschiedener Bearbeitungen erschlossen. Mit Ausnahme einer durchaus ungenügenden Summenformel Mac-Laurin's, welche erst im XIX. Jahr-

hunderte vervollständigt und ausgebeutet worden ist, einer Reihenentwickelung Euler's von 1769, mit fernerer Ausnahme einer unabhängigen Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen durch Laplace (1777) ist Alles, was bis 1820 geleistet worden ist, im ersten Abschnitte enthalten. Recursionsformeln für die Bernoulli'schen Zahlen herzustellen, war der einzige Zielpunkt der Betrachtung derselben. Die zahlentheoretischen Anwendungen vollends stammen erst aus dem Jahre 1840, in welchem Clausen und von Staudt gleichzeitig und unabhängig von einander den Satz entdeckten, dass die *m*. Bernoulli'sche Zahl durch die positiv oder negativ zu nehmende Summe einer Anzahl von Stammbrüchen mit theilerlosen Nennern zu einer positiven oder negativen ganzen Zahl ergänzt werde. Die Thätigkeit des Herrn Verfassers war eine doppelte. Herr Saalschütz hat, möchten wir sagen, seine Befähigung zur geschichtlichen wie zur dogmatischen Darstellung an den Tag legen wollen und wirklich an den Tag gelegt. Seine Berichte über fremde Arbeiten sind getreu und thunlichst im Geiste der Verfasser gehalten. Dabei aber hat er, da er denn doch keine Geschichte der Bernoulli'schen Zahlen, sondern Vorlesungen über dieselben veröffentlichen wollte, es nicht unterlassen, auch eigene neue Untersuchungen da und dort einzuschalten. Unter den verkürzten Recursionsformeln, wie Herr Saalschütz solche nennt, in welchen nicht sämmtliche der gesuchten Bernoulli'schen Zahl Vorhergehenden vorkommt, findet man solche neue Untersuchungen, ebenso einen neuen Beweis des Clausen-Staudt'schen Satzes im dritten Abschnitte, Neues über die Euler'sche Arbeit von 1769 im vierten Abschnitte. Noch Anderes hat der Verfasser allerdings ausserhalb des Rahmens seines Buches zu Tage gefördert, wovon uns ein der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg am 3. November 1892 vorgelegter Auszug in Kenntniss setzt. Das ganze Buch bildet eine höchst interessante und bei dem vielseitigen Gebrauche der Bernoulli'schen Zahlen auch höchst werthvolle Bereicherung der mathematischen Literatur.

Cantor.

---

**Einleitung in die analytische Geometrie und in die Lehre von den Kegelschnitten** von Dr. W. Erler, Professor und Oberlehrer am Königl. Pädagogium bei Züllichau. Mit einer Tafel in Steindruck. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Berlin 1893. Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung. V, 82 S.

Der Verfasser hat sein Bestreben dahin gerichtet, dem Anfänger nicht viele, aber gesicherte Kenntnisse beizubringen. Deshalb ist, nachdem eine Formel an einer bestimmten Figur hergeleitet worden, eine weitere Erörterung daran geknüpft, inwieweit die gleiche Formel auch bei anderer gegenseitiger Lage der in Frage stehenden Raumgebilde Berechtigung besitze. Schon bei der Translation des Coordinatenanfangspunktes (S. 2 — 3) ist hierauf Gewicht gelegt, und an anderen Stellen ist gleich sorgfältig verfahren. Ein zweites Be-

streben ging dahin, die eingeflochtenen Aufgaben derart zu behandeln, dass sie nicht blosse Rechenexempel bilden, sondern dass auf den Sinn der allmälig sich ergebenden Gleichungen geachtet wird, so dass ausser der Auflösung der eigentlichen Aufgabe noch andere geometrische Wahrheiten als Nebengewinn erscheinen. Als Beispiel solcher Behandlung mag die Aufgabe (S. 20—21) erwähnt sein, die Gleichung eines Kreises zu suchen, der durch drei Punkte geht. Sie lässt nebenher erkennen, dass die Senkrechten auf die Mitten der durch die drei Punkte bestimmten Strecken einen gemeinsamen Durchschnittspunkt besitzen. Der in dieser Aufgabe (S. 21 Z. 2) vorkommende Druckfehler $a'^2 b'^2$ statt $a'^2 + b'^2$ dürfte keinem aufmerksamen Schüler Schwierigkeit bereiten. CANTOR.

---

**Leitfaden der analytischen Geometrie der Ebene**, zum Gebrauch für höhere Lehranstalten, von Prof. Dr. MAX SIMON, Oberlehrer am Lyceum zu Strassburg i. E. Mit 38 in den Text gedruckten Figuren. Berlin 1892. Weidmann'sche Buchhandlung. 71 S.

Der Verfasser hat sich durch verschiedene Lehrbücher allzu vortheilhaft in die Literatur eingeführt, als dass nicht gesteigerte Erwartungen an jedes Folgende sich knüpfen und auch die vorwortlichen Bemerkungen Beachtung finden sollten. In seinem diesmaligen Vorworte sieht er bereits die Zeit kommen, wo die grossen und einfachen Gedanken Poncelet's und Steiner's ihren Einzug ins Gymnasium halten werden, und dann werde man mit dem Pascal'schen Sechsecksatze beginnen, vor welchem man heute Halt zu machen genöthigt sei.

Wir wünschen uns mit diesem Zukunftsbilde aus einander zu setzen, an welches wir nun und nimmermehr glauben, so einverstanden wir damit sind, dass Anfangsgründe der analytischen Geometrie der Ebene in der Gymnasialprima gelehrt werden. Die Schulen haben auf allen Stufen dafür zu sorgen, dass der Unterricht der Fassungskraft des mittelbegabten Schülers sich anpasse. Wir verfechten wahrlich nicht die Meinung, es solle ein so langsames Tempo eingehalten werden, dass auch die Geisteslahmen mitkommen können, aber noch weniger darf man der ganzen Classe einen Geschwindschritt zumuthen, der schon bei facultativem Unterrichte, der von selbst eine Auswahl unter den Schülern trifft, den Meisten den Athem rauben müsste. Ein geistreicher Lehrer an einem badischen Realgymnasium, der mit überschwänglichen Hoffnungen auf das Erreichbare an diese Anstalt versetzt worden war, kleidete seine Enttäuschung in die drastischen Worte: In ein Viertelliterglas geht nur ein Viertel liter, mag man es noch so lange unter den geöffneten Hahn der Wasserleitung halten! Die „grossen und einfachen“ Gedanken Poncelet's und Steiner's als gross und einfach zu erkennen, ist nach unserer Ueberzeugung der Mittelschüler der Prima geistig nicht reif und wird dazu nicht reif gemacht werden

können, denn dazu müsste man eben in früheren Classen entsprechend jüngeren Schülern eine Geisteskost vorsetzen, welche diese zu verdauen unfähig sind und bleiben werden. Wir glauben im Grossen und Ganzen mit allen Universitätslehrern der Mathematik in dem Wunsche uns zu begegnen, der mathematische Unterricht an der Mittelschule möge auch künftig die Grenzen nicht überschreiten, die heute schon fast zu weit gesteckt sind, als dass der Schüler das ganze ihm erschlossene Gebiet gründlich kennen lernen könnte. *Multum non multa* sei der Wahrspruch des Mathematiklehrers bis in Oberprima.

Unsere Bemängelung des Vorwortes hat zum Glück auf unser Urtheil über den Leitfaden selbst keinen Einfluss üben können, denn hier hat Herr Simon selbst dasjenige beobachtet, was wir beobachtet wünschen. Er beschränkt das Thema, um, so weit es zur Behandlung kommt, desto tiefer eindringen zu können. So sind beispielsweise nur rechtwinklige Coordinaten benutzt, weder schiefwinklige noch Polarcoordinaten. Von einer Betrachtung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades ist keine Rede. Dagegen sind Symbole für ganze Gleichungpolynome eingesetzt, wie Plücker sie in die Geometrie eingeführt hat, sind die Eigenschaften harmonischer Theilung einer Strecke und harmonischer Strahlen ausgiebig benutzt. Bei der geraden Linie ist die Gleichungsform $L=0$ vorzugsweise in Anwendung, wo $L \equiv y - ax - b$. Hier hätten wir den Verfasser gern den kleinen Schritt bis zur Hesse'schen Normalform weiter machen sehen. Wir glauben nicht, dass diese, insbesondere wenn man bei dem rechtwinkligen Coordinatensysteme es bewenden lässt, also die Form $x \,.\, \cos\alpha + y \,.\, \sin\alpha - \delta = 0$ benutzt, irgend Schwierigkeiten bieten kann, während sie dem Schüler beim Uebergang zur Universitätsvorlesung die Frage erspart, warum er mit dieser unentbehrlichen Form nicht früher bekannt gemacht worden sei. Vielleicht entschliesst sich Herr Simon in einer wiederholten Auflage, welche wir dem kleinen Buche wünschen, zu dieser Aenderung.

Cantor.

---

Gaston Darboux, **Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal.** Première partie. Généralités. Coordonnés curvilignes. Surfaces minima. Paris 1887. Gauthier-Villars. VI und 514 S. 15 Frs.

Das vorliegende Werk, eine der bedeutendsten Erscheinungen im Gebiete der Lehrbücher über krumme Flächen, ist, wie der Verfasser in der Vorrede angiebt, aus Vorlesungen entstanden, die derselbe an der Sorbonne gehalten hat. Es verfolgt den Zweck, neue Anwendungen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen auf die Theorie der Flächen zu finden, und damit ist zugleich die Eigenart des Buches gekennzeichnet. Es giebt nicht eine allgemeine Theorie der krummen Flächen, welche

uns, wie etwa das Salmon-Fiedler'sche Werk, von den Anfängen bis zu den neuesten Ergebnissen führte, es setzt vielmehr bedeutende Kenntnisse sowohl in der Theorie der krummen Flächen, wie der partiellen Differentialgleichungen voraus, führt uns aber, vom Grundgedanken aus, in schönster Weise von Ergebniss zu Ergebniss, ein schönes und wohlgefügtes Gebäude vor uns aufführend.

Eigenartig und in dieser Weise meines Wissens zum ersten Male in einem Lehrbuche der Geometrie durchgeführt ist bereits die Einleitung, die zur Bestimmung einer Curve und einer Fläche von kinematischen Gedanken ausgeht. In einem festen Coordinatensysteme wird ein bewegliches angenommen, dessen Anfangspunkt — je nachdem die Bewegung von ein oder zwei unabhängigen Veränderlichen abhängig ist — eine Curve oder eine Fläche beschreibt, und zwar wird für die allgemeine Raumcurve das bewegliche Coordinatensystem so bestimmt, dass die drei Achsen von der Tangente, der Hauptnormale und der Binormale gebildet werden. Nach Einführung der sphärischen Indicatrix, der Curve auf der Kugel mit dem Radius 1, welche durch Radien parallel zu den Tangenten erzeugt wird, wird sogleich eine Reihe wichtiger bekannter Sätze mit Hilfe der Bewegungstheorie abgeleitet. Die Curven werden bestimmt, bei welchen das Verhältniss der beiden Krümmungsradien constant, ferner diejenigen, deren Hauptnormalen zugleich Hauptnormalen einer anderen Curve sind, und es zeigt sich, dass die Schraubenfläche mit Richtungsebene die einzige geradlinige Fläche ist, deren Hauptkrümmungsradien gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sind.

Es werden dann die Differentialgleichungen integrirt, welchen die drei Gruppen der Richtungscosinus des beweglichen Systems genügen müssen, indem die Lösung auf die Integration einer Riccatischen Gleichung zurückgeführt wird, und damit ist ja zugleich die allgemeinste orthogonale Substitution gegeben. Aus diesen Gleichungen ergeben sich dann ungezwungen die Curven, deren Torsion, sowie die, deren erste Krümmung constant ist, und von den ersteren wird speciell die Gleichung derjenigen bestimmt, deren sphärische Indicatrix ein sphärischer Kegelschnitt ist.

Die Bewegung des beweglichen Systems, abhängig von zwei Variabeln, wird erst für festen Anfangspunkt des beweglichen Systems und dann für beweglichen Anfangspunkt durchgeführt, die Integration der entstehenden Differentialgleichungen wieder von der einer Riccatischen Gleichung abhängig gemacht und sogleich eine Anwendung auf die Theorie der Abwickelung der Flächen auf einander gegeben. Der Verfasser verlässt nun zunächst die kinematische Theorie, um die Gauss'schen Bezeichnungen einzuführen und zeigt bei einigen Flächen an der Form des Linienelementes, dass gewisse Coordinatencurven auf ihnen ein isometrisches Netz bilden, sowie dass andere sich auf einander abwickeln lassen.

Im letzten Capitel des ersten Buches werden dann Gleichungen von Flächen abgeleitet, die durch kinematische Eigenschaften bestimmt sind, so die der Schraubenflächen und Rotationsflächen, die sich in sich selbst verschieben lassen, unter denen besonders die auf die Kugel abwickelbaren Flächen behandelt werden, sowie die Flächen, die durch Bewegung einer Curve entstehen, die Gesimsflächen und die Spiralflächen.

Das zweite Buch führt uns in die verschiedenen Systeme der krummlinigen Coordinaten und zwar zunächst in die conjugirten Systeme. Den Beginn macht der Satz des Herrn Königs, dass man auf jeder Fläche eine unendliche Anzahl von conjugirten Systemen ohne Ausführung einer Integration bestimmen kann. Die Schnittcurven einer Fläche durch Ebenen, die eine bestimmte Gerade enthalten, haben als conjugirte Linien die Berührungscurven der Berührungskegel der Fläche, die ihre Spitze auf der bestimmten Geraden haben. Als Anwendung dieses Satzes werden die Flächen gesucht, bei welchen die eine Schaar der Krümmungslinien in Ebenen liegt, die durch eine Gerade gehen, Flächen, die zuerst von Joachimsthal (1846) behandelt sind. Es werden dann verschiedene Eigenschaften der conjugirten Systeme abgeleitet und die Differentialgleichung bestimmt, der zwei Curvensysteme zu genügen haben, um conjugirte Systeme zu sein. Es ergiebt sich daraus, dass sich eine unendliche Menge von Flächen construiren lässt, auf welchen man conjugirte Systeme kennt, und es werden nun diejenigen Flächen gesucht, welche zwei conjugirte Systeme haben, die aus geraden Linien bestehen. Die Specialisirung der Aufgabe dahin, dass die conjugirten Linien Krümmungslinien sind, liefert die Dupin'schen Cykliden.

Ein Specialfall der conjugirten Linien sind die Asymptotenlinien als die sich selbst conjugirten Linien, die zunächst behandelt werden und die auf den tetraedalen Flächen bestimmt werden, ein Problem, das zuerst von Herrn S. Lie gelöst ist.

Im folgenden Capitel werden die Systeme behandelt, die zugleich orthogonal und isotherm sind und damit zugleich die conforme Abbildung der krummen Fläche auf eine Ebene, die für den wichtigen Fall der Flächen zweiten Grades eingehender durchgeführt wird. Dieses führt dann zu der Aufgabe, ein beliebiges gegebenes Ebenenstück auf die Fläche eines Kreises abzubilden, welche in der Behandlung des Herrn Schwarz für den bis jetzt allein untersuchten Fall gelöst wird, dass die Begrenzung aus geraden Linien und Kreisbogen zusammengesetzt ist.

Die letzten Capitel sind dem wichtigsten unter den orthogonalen Systemen, den Krümmungslinien gewidmet. Es wird zunächst die Differentialgleichung derselben aufgestellt und die Methode auf die Fläche

$$x^m y^n z^p = C$$

angewendet. Nach Ableitung der Rodrigues'schen Formeln geht der

Verfasser zu dem sphärischen Bilde von Gauss durch parallele Normalen über und giebt eine lineare Differentialgleichung, deren Charakteristiken die Krümmungslinien sind und die uns in einer besonders einfachen Form die Krümmungslinien der Cykliden liefert.

Zum genaueren Studium der Krümmungslinien führt der Verfasser ein besonderes Coordinatensystem, das pentasphärische, ein. Man denke sich fünf Kugeln, die sich gegenseitig rechtwinklig schneiden, so sind die pentasphärischen Coordinaten eines Punktes seine Potenzen in Beziehung auf die Kugeln, dividirt durch den Radius derselben, und es sind die fünf pentasphärischen Coordinaten $x_i$ verbunden durch die homogene Gleichung:

$$\Sigma x_i^2 = 0.$$

Es wird die Bedeutung der neueingeführten Coordinaten für das Studium der Krümmungslinien gezeigt und genauer auf die pentasphärischen Coordinaten einer Kugel eingegangen, von denen nachgewiesen wird, dass sie proportional sind den Cosinus der Winkel dieser Kugel mit den Coordinaten-Kugeln. Die Winkelbeziehungen sind für zwei Kugeln analog denen für Ebenen bei Cartesianischen Coordinaten. Nimmt man noch eine sechste Coordinate, definirt durch die Gleichung

$$i m_6 = \sqrt{\sum_1 m_k^2}$$

hinzu, durch welche das Vorzeichen des Kugelradius bestimmt wird, so entsprechen die homogenen pentasphärischen Coordinaten einer Kugel den Plückerschen einer geraden Linie, so dass einer Geraden im einen Systeme eine Kugel im andern Systeme entspricht, einer Schaar von Geraden, die eine Fläche berührt eine Schaar von Kugeln, die eine andere Fläche berührt, den Krümmungslinien der einen die Asymptotenlinien der andern. Diese Transformation, „eine der schönsten Entdeckungen der modernen Geometrie", verdankt man Herrn Lie.

Im Weiteren wird die Gleichung der Krümmungslinien bestimmt, wenn die Fläche in Ebenen-Coordinaten gegeben ist, und speciell die der Fläche

$$p = \frac{au^2 + bv^2 + cw^2}{2}$$

und als weitere Anwendung die partielle Differentialgleichung der Flächen, die als sphärisches Bild zwei beliebig gegebene orthogonale Curvenschaaren auf der Einheitskugel besitzen. Eine besonders einfache Gestalt nimmt die Gleichung der Krümmungslinien an, wenn man ein besonderes zuerst von Bonnet eingeführtes Coordinatensystem annimmt, welches sich aus folgendem Satze ergiebt: Die Berührungscurven der Kegel, die der Fläche umbeschrieben sind und die ihre Spitze auf dem unendlich fernen Kreise haben, bestimmen auf der Fläche ein System krummliniger Coordinaten, die als sphärisches Bild das System der geradlinigen Erzeugenden der

Kugel haben. Die Tangenten an zwei durch einen Punkt der Fläche gehenden Coordinatencurven haben als Halbirungslinien die Richtung der Krümmungslinien der Fläche. Die Gleichung der Krümmungslinien hat unter der Annahme dieses Coordinatensystems sonach die einfache Form:

$$A\,d\alpha^2 + B\,d\beta^2 = 0.$$

Von den entwickelten Formeln werden dann einige schöne Anwendungen gemacht, die sich auf einfache Weise ergeben.

Das letzte Buch des ersten Bandes, das fast die Hälfte desselben einnimmt, enthält eine eingehende Behandlung der Minimalflächen und umfasst ziemlich Alles, was bis jetzt über diesen Gegenstand geschrieben ist.

Das erste Capitel giebt uns eine vollständige Geschichte der Theorie der Minimalflächen bis zum Jahre 1866, in welchem die schönen Untersuchungen von Herrn Weierstrass beginnen, denen sich dann später die von Herrn Schwarz anschliessen. Benutzt ist dazu besonders der Aufsatz des Herrn Beltrami: Sulle proprieta generali delle superficie d'area minima (Mem. della Acad. di Bologna. Ser. 2, Bd. 7. 1868).

Sodann wird die Gleichung der Minimalflächen in Punkt-Coordinaten abgeleitet und zwar die Formeln von Monge, Legendre und Weierstrass, aus welch' letzteren sich die Gleichung sämmtlicher algebraischer und reeller Minimalflächen ergiebt, so dass jeder analytischen Function eine reelle Minimalfläche entspricht. Durch Ableitung der Gleichung der Tangentialebene und der Normale erhält man die Gleichung der Minimalflächen in Ebenen-Coordinaten, die dann zur einfachsten Bestimmung der Krümmungslinien und der Asymptotenlinien führt, und die gewonnenen Formeln werden zur Bestimmung verschiedener Minimalflächen verwendet. Von den conformen Abbildungen wird zuerst die auf eine Kugel durch parallele Normalen durchgeführt, die zugleich eine conforme Abbildung ist, die die Minimalflächen als solche charakterisirt. Darnach lässt sich die Aufgabe lösen, die Minimalflächen zu bestimmen, deren Krümmungslinien als sphärisches Bild die Curven eines gegebenen orthogonalen Systems auf der Einheitskugel haben. Als Beispiel dienen die Minimalflächen, deren Krümmungslinien als sphärisches Bild zwei orthogonale Schaaren von Kreisen haben, die zuerst von Bonnet bestimmt sind, und die Enneper'sche Fläche als Minimalfläche neunten Grades.

Es folgt dann die Behandlung der Biegungsflächen einer Minimalfläche, die wieder Minimalflächen sind (associirte Minimalflächen) und die durch Ersetzen der Function $F(s)$ durch $e^{i\alpha}F(s)$ entstehen, von denen Bonnet (1853) zuerst den speciellen Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ fand, die er die adjungirte Fläche nannte. Auf diese wird näher eingegangen und einzelne Eigenschaften werden abgeleitet, die sich freilich zum grossen Theile auch von den anderen Biegungsflächen aussprechen lassen. Dem Referent will es

hier überhaupt scheinen, als ob die adjungirte Fläche zu sehr vor den anderen Biegungsflächen bevorzugt werde. Zum Schluss wird noch die Umkehrung bewiesen, dass, wenn zwei Flächen so auf einander abwickelbar sind, dass die Tangentialebenen in entsprechenden Punkten parallel bleiben, sie nothwendig zwei associirte Minimalflächen sein müssen.

Der Verfasser kommt dann auf die Formeln von Monge zurück und geht auf die elegante geometrische Interpretation ein, welche Herr S. Lie denselben gegeben hat, die Erzeugung der Minimalflächen durch zwei Minimalcurven. Minimalcurven sind solche, deren Tangenten durch den unendlich fernen Kreis gehen oder den imaginären Kreis aller Kugeln im Unendlichen schneiden, dieselben sind imaginär, da ihre Länge gleich Null ist. Die Mitte der Verbindungsgeraden zweier beliebiger Punkte zweier Minimalcurven beschreibt eine Minimalfläche. Soll die Fläche algebraisch sein, so müssen auch die Minimalcurven algebraisch sein, und damit die Fläche reell ist, muss man mit einer Minimalcurve die conjugirte verbinden. Nehmen wir statt zweier Minimalcurven nur eine, deren Punkte wir durch Gerade verbinden, die wir dann halbiren, so erhalten wir Doppelflächen, die Minimalflächen sind. In der Weierstrass'schen Bezeichnung muss in diesem Falle

$$F(n) = -\frac{1}{n^4} F_1\left(-\frac{1}{n}\right)$$

sein. Soll die Fläche ausserdem reell sein, so ist

$$n^2 F(n) = \varphi(n) - \varphi_1\left(-\frac{1}{n}\right)$$

zu setzen. Auch für die anderen Gleichungsformen werden die Bedingungen aufgestellt, wann eine Minimalfläche einfach oder doppelt ist.

Aus der Gleichung der Minimalcurven wird nun die Ordnung und die Classe der Minimalfläche bestimmt, wie es auch zuerst von Herrn S. Lie geschehen ist, und es wird gezeigt, dass die einfache Minimalfläche niedrigster Ordnung die von Enneper ist, also von der neunten Ordnung und der sechsten Classe, sowie die einfachste Doppelfläche die Henneberg'sche, die von der fünften Classe ist.

Nachdem so eine Reihe allgemeiner Eigenschaften der Minimalflächen entwickelt ist, werden Minimalflächen gesucht, die gewissen Bedingungen genügen und zwar zunächst diejenige, welche durch eine beliebige gegebene Linie geht und in jedem Punkte derselben eine gegebene Tangentialebene hat, eine Frage, die zuerst von Björling und von Bonnet und später in eleganter Weise von Herrn Schwarz in seinen Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen (Crelle, Bd. 80. 1875. S. 280) behandelt ist. Die Sätze von Schwarz, sowie die von Lie und Henneberg, werden dabei abgeleitet. Die folgende Aufgabe, alle algebraischen Minimalflächen zu bestimmen, die einer gegebenen algebraischen Fläche eingeschrieben sind, war bisher nur für den Fall gelöst, dass die gegebene

Fläche eine Kegelfläche ist, oder, wenn eine abwickelbare Fläche, dass man schon eine eingeschriebene Minimalfläche kennt. Der Verfasser löst die Aufgabe allgemein für den Fall, dass die gegebene Fläche eine abwickelbare Fläche ist. Dieses Problem giebt zugleich Anlass zu einer neuen Definition der Minimalflächen, die von Herrn Ribaucour gegeben ist: Die allgemeinste Minimalfläche ist die Enveloppe der Ebenen, die auf den gemeinsamen Tangenten zweier dem unendlich fernen Kugelkreise umbeschriebenen abwickelbaren Flächen senkrecht stehen und von den Berührungspunkten dieser gemeinsamen Tangenten gleich weit entfernt sind. Die letzte der behandelten Aufgaben ist die von Lagrange aufgestellte und von Plateau in praxi gelöste, diejenige Minimalfläche zu bestimmen, welche eine gegebene Begrenzung hat, und die bisher und auch in diesem Werke nur für den Fall in Angriff genommen ist, dass die Begrenzung aus geraden Linien besteht oder aus Ebenen, welche die Fläche normal schneidet. Es werden die Arbeiten von Riemann, den Herren Weierstrass und Schwarz über diesen Gegenstand besprochen und verschiedene Beispiele durchgeführt. Die Lösung des Problems wird gefördert durch Untersuchungen, welche Veränderungen mit $F(u)$ vorgehen, wenn statt $u$ eine Function von $u$ eingeführt wird, oder wenn ein anderes rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde gelegt wird, doch gelingt dieselbe nicht, da die auftretende lineare Differentialgleichung nicht allgemein integrabel ist. Daher wird nun die Aufgabe umgekehrt und von gewissen Formen der Differentialgleichung ausgegangen, deren Integral man kennt und untersucht, für welche Begrenzungen diese die Lösung liefern. Dadurch erhält man unter Anderem die Minimalfläche, deren Begrenzung von Geraden gebildet wird, die einer festen Ebene parallel sind und von Ebenen, die auf dieser Ebene senkrecht stehen, von welcher das letzte Beispiel Riemannns ein specieller Fall ist. WILLGROD.

---

**Magnetische Beobachtungen auf der Nordsee**, angestellt in den Jahren 1884 bis 1886, 1890 und 1891. Von A. SCHÜCK. Hamburg 1893. Selbstverlag des Verfassers. IV. 58 S. 5 Tafeln. gr. 4°.

So namhafte Fortschritte die Lehre vom Erdmagnetismus in neuer Zeit auch gemacht hat, so hat doch gerade in deren eigentlichem Vaterlande die praktische Forscherthätigkeit mit jenen keineswegs gleichen Schritt gehalten. Nicht als ob nicht J. v. Lamont und A. v. Humboldt, auf deren unermüdlicher Thätigkeit das Meiste von dem beruht, was wir über das geomagnetische Verhalten des deutschen Bodens wissen, später noch viele tüchtige Nachfolger gehabt hätten; aber was dieselben leisteten, ging mehr aus der Initiative des Einzelnen hervor, und erst in allerneuester Zeit sehen wir auch staatliche Anstalten wieder mehr diesen Fragen ihre Aufmerksamkeit zuwenden. Der Verfasser der hier vorliegenden

Schrift, durch eine Reihe von Arbeiten auf dem Gebiete der wissenschaftlichen Seemannskunde wohl bekannt, hat sich das deutsche Meer und dessen Küstengegenden zu seinem Operationsfelde ausersehen und auf zahlreichen auf einander folgenden Seereisen eine stattliche Menge von Thatsachen für seinen Zweck zusammengebracht. Er hielt dabei es für nothwendig, sich mit seinen Instrumenten ausschliesslich Holzschiffen anzuvertrauen, und daran that er gewiss recht, denn wenn auch die von Airy u. A. entwickelten Formeln es möglich machen, die durch den permanenten und den zeitweise inducirten Magnetismus bedingten Compassfehler auszugleichen, so wird man es doch jedenfalls für das Beste halten müssen, solchen Störungen von vornherein aus dem Wege zu gehen. Andererseits jedoch wuchsen dadurch die Schwierigkeiten für den Beobachter, der nun auf viele Fahrzeuge verzichten musste, die sonst für ihn und seine Absichten geeignet gewesen wären.

Die Beschreibung, welche Herr Schück von seinen Apparaten giebt, ist eine sehr eingehende, und sowohl dadurch, wie auch durch die Darlegung der Vorsichtsmassregeln, welche auf der Reise selbst zum Schutze dieser Apparate angewendet wurden, dürfte sich die Schrift der Beachtung Derjenigen empfehlen, welche eine ähnliche Studienreise zu unternehmen gedenken. Azimutalcompass, Inclinatorium und Lamont'scher Theodolit waren in der Hauptsache die in Verwendung genommenen Instrumente.* Die Theorie derselben wird vom Verfasser im Besonderen entwickelt, wobei auch auf Probleme Rücksicht genommen ward, für welche sich in der Literatur kein ausreichender Anhalt vorfand; vergl. z. B. die Berechnung der Wärmecorrection bei Inclinationsmessungen mit Hilfe des Theodoliten. Einschaltend möchten wir dabei bemerken, dass wenn der Verfasser (S. 26) die „Gel. Anzeigen“, in welchen ein Lamont'scher Aufsatz über eben diesen Gegenstand zu finden sein soll, nicht kennt, dies leicht zu begreifen ist, denn es werden nur Wenige wissen, dass vor längerer Zeit auch die bayerische Akademie der Wissenschaften eine periodische Veröffentlichung unter diesen Titel besass, und offenbar ist auf diese von Lamont selbst hingewiesen worden. Von entschiedenem Interesse sind die Mittheilungen über die Intensitätsmessungen auf offener See, für welche sich der Verfasser verschiedener Methoden bediente, denn gerade nach dieser Seite hin fehlt es noch sehr an zuverlässigen Bestimmungen, und die Isodynamenkarten sind, soweit dabei das Meer in Frage kommt, vielfach nur als Ergebnisse einer Schätzung zu betrachten. Die unserer Vorlage beigefügten Karten dagegen, deren technische Vollkommenheit freilich unter dem Umstande etwas leiden, dass dem Verfasser für die Publication seiner mühevollen Studien nur seine eigenen Mittel zur Ver-

* Wenn englische Autoren über das Instrumentarium Schück's die Nase rümpften, so vergassen sie, dass ein deutscher Privatmann sich eben nach seiner Decke strecken muss.

fügung standen, verdienen das vollste Vertrauen; sie geben die Curven gleicher Missweisung, Neigung und horizontaler Intensität für den Erdraum zwischen 48° und 61° nördlicher Breite einerseits, zwischen ± 11° Länge (v. Gr.) andererseits. Soweit dabei das Festland in Betracht kommt und die eigenen Beobachtungen nicht ausreichten, hat der Verfasser solche von den besten Fachmännern der betreffenden Staaten zu Hilfe genommen, wie denn für die Niederlande Dr. van Rijkevorsel die noch nicht der Oeffentlichkeit übergebene magnetische Aufnahme dieses Landes zur theilweisen Verfügung stellte. Bei solcher Sachlage hat man alles Recht, in der Schrift des Herrn Schück einen werthvollen Beitrag zur Physik der Erde zu erblicken.

München. Dr. S. Günther.

---

**A treatise on analytical statics with numerous examples,** by Edward John Routh. Vol. II. Cambridge, at the university press. 1892. 224 S.

Das Buch enthält die in den ersten Band nicht mehr aufgenommenen drei Capitel, Attractions, Bending of rods, Astatics. Bei dem ersten Capitel hat der Verfasser mancherlei beigefügt, was nicht leicht zu finden ist, weshalb er sich entschlossen hat, ein ausführliches Inhaltsverzeichniss beizufügen, welches der Vollständigkeit wegen auch die beiden anderen Capitel umfasst. Der Verfasser war bestrebt, zu jedem Resultat den ursprünglichen Autor anzugeben, was sehr anzuerkennen ist. Die Beispiele sind grösstentheils den Examenaufgaben an der Universität Cambridge entnommen. Die äussere Ausstattung ist ebenso sorgfältig behandelt, wie die des ersten Bandes.

B. Nebel.

---

**Lehrbuch der Physik.** Von J. Violle. Deutsche Ausgabe von fünf Assistenten der physikalisch-technischen Reichsanstalt. Erster Theil: Mechanik. Zweiter Band: Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Mit 309 Textfiguren. Berlin 1893. Verlag von Julius Springer. 489 S. Preis 10 Mk.

Dass der zweite Band nicht mehr in einzelnen Lieferungen erschienen ist, kann nur als im Interesse der schnellen Verbreitung des Buches liegend empfunden werden. Die übersichtliche Anordnung des Stoffes, der schöne und reine Druck, sowie die saubere Durchführung der bildlichen Darstellungen stehen der eleganten Schreibweise gut an. Die Schattirung der Glasgefässe ist vielfach so eigenartig, dass man einen Riss statt den Schatten vor sich zu haben glaubt. Bezüglich der gediegenen Darstellung wird auf die Besprechung des ersten Bandes des ersten Theiles verwiesen.

Hoffentlich gelingt es dem Verleger, den zweiten Theil dieses Lehrbuches, welcher die Akustik und Optik umfassen soll, im Laufe dieses Jahres der Oeffentlichkeit zu übergeben.

B. Nebel.

**Aufgaben aus der theoretischen Mechanik nebst Auflösungen.** Von Zech. Zweite Auflage unter Mithilfe von C. Cranz. Stuttgart 1891. Verlag von J. B. Metzler. 225 S. Preis 4 Mk. 20 Pf.

Die zweite Auflage ist gegenüber der ersten nicht nur durch einzelne Beispiele, sondern auch durch neue Capitel vermehrt worden. Die neuen Aufgaben sind grösstentheils den Prüfungen bei dem realistischen Professorats-examen in Württemberg entnommen, weshalb diese Sammlung ein guter Prüfstein für die betreffenden Candidaten sein wird. Die beiden Capitel über Graphostatik und über mechanische Principien rühren von C. Cranz her. Leider sind die Buchstaben und deren Indices bei den Figuren oft so klein ausgefallen, dass man sie nur äusserst schwierig erkennen kann, z. B. Fig. 7—13. Den Aufgaben sind die Lösungen beigefügt, so dass sich das Buch besonders zum Selbststudium der Studirenden eignet.

B. Nebel.

---

**Elementarphysik** unter Zugrundelegung des Grundrisses der Experimentalphysik von E. Jochmann und O. Hermes, für den Anfangsunterricht in höheren Lehranstalten, herausgegeben von O. Hermes. Mit 186 Holzschnitten. Berlin 1892. Verlag von Winkelmann & Söhne. 188 S. Preis 2 Mk.

Das vorliegende Büchlein verdankt seine Entstehung der Einführung der neuen Lehrpläne in Preussen. Im Text schliesst es sich eng an den allseitig sehr beliebten Grundriss der Experimentalphysik von E. Jochmann an, aus dem auch die Figuren entnommen sind. Das letztere Buch bildet die Ergänzung dieser Elementarphysik. In der Wahl des Stoffes hätte nach unserem Dafürhalten mehr Rücksicht auf das tägliche Leben genommen werden sollen, so ist die elektrische Beleuchtung nicht ihrem Werthe nach behandelt, die Glühlampe konnten wir nicht finden. Zu wünschen wäre für eine Neuauflage, dass der Herausgeber diesem Gesichtspunkte seine Aufmerksamkeit zuwenden möchte.

B. Nebel.

---

**Grundzüge der Molecular-Physik und der mathematischen Chemie**, dargestellt von W. C. Wittwer. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Stuttgart 1893. Verlag von Konrad Wittwer. 304 S. Preis 6 Mk.

Die zweite Auflage enthält als Erweiterung diejenigen Ergebnisse, welche seit dem Erscheinen der ersten Auflage von dem Verfasser gefunden wurden. In der Einleitung begründet der Verfasser, weshalb er nicht der modernen Richtung zu folgen vermag, welche mehr und mehr von den Fernewirkungen bei physikalischen Kraftäusserungen abgeht. Er sucht den Nachweis zu liefern, dass die modernen Ausdrücke sich alle auf Fernewirkungen zurückführen lassen. Im Verfolg seiner Anschauungen gelangt der Verfasser zu neuen Vorstellungen über den Aether und dessen Dichtig-

keit im intermolecularen Zustand. Bei der Zusammenfassung der mit den heutigen Anschauungen im Widerspruch stehenden Resultate auf S. 34 muss wohl unter 4 das letzte Wort „zu“ statt „ab“ heissen. Sehr interessant sind die Beziehungen zwischen den Massen- und Aethertheilchen. Die Constitution der Körper bildet die Brücke zu dem grossen Abschnitt, welcher den Grundzügen der Chemie gewidmet ist. Ein ebenso grosser Abschnitt beschäftigt sich mit der Wärme, während das Wesen der Elektricität in einem kleinen Schlussabschnitt in die Betrachtungen hereingezogen wird. Alle die interessanten Resultate und Schlussfolgerungen mitzutheilen, würde hier zu weit führen; wollten wir aber einzelne herausgreifen, so würde der Gegensatz zu den heutigen Anschauungen zu schroff und unvermittelt sein. Daher müssen wir das Lesen des Buches auf's Wärmste empfehlen.

B. Nebel.

---

**Die Bestimmung des Moleculargewichts in theoretischer und praktischer Beziehung** von K. Windisch. Mit einem Vorwort von E. Sell. Mit in den Text gedruckten Figuren. Berlin 1892. Verlag von Julius Springer. 542 S. Preis 12 Mk.

Die neuen Methoden zur Bestimmung des Moleculargewichts und die sich daran anschliessenden Schlussfolgerungen sind für die theoretische Chemie von solcher Wichtigkeit, dass sich auch der lediglich in der Praxis arbeitende Chemiker wenigstens mit den Resultaten bekannt machen muss, wenn er nicht in kurzer Zeit als mit veralteten Anschauungen behaftet erklärt werden will. Um nun das Studium der Moleculargewichts-Bestimmung zu erleichtern, hat es der Verfasser unternommen, in einheitlicher Form die geschichtliche Entwickelung der Methoden der Moleculargewichts-Bestimmung kritisch zusammen zu stellen, an deren Spitze sich die Entwickelung der Moleculartheorie befindet. Mit Bienenfleiss hat der Verfasser Alles zusammengetragen und überall mit Literaturvermerke versehen, so dass auch Derjenige, welcher auf diesem Gebiete selbst forschend thätig ist, den grössten Nutzen von diesem Buche haben wird. Denjenigen, welche sich erst in das Gebiet der physikalischen Chemie einarbeiten müssen, ist das Studium durch dieses Werk wesentlich erleichtert, denn sie finden wohl Alles, was auf diesem Felde geschaffen wurde. Die äussere Ausstattung lässt nichts zu wünschen übrig.

B. Nebel.

---

**Beiträge zur Theorie der centro-dynamischen Körper.** Von Alex. Wernicke. Wissenschaftliche Beilage zu dem Programm des Herzoglichen Neuen Gymnasiums zu Braunschweig 1892. Braunschweig 1892. Joh. Heinr. Meyer. 36 S.

Nach einer geschichtlichen Entwicklung des centro-dynamischen Charakters der Körper geht der Verfasser näher auf die Frage ein: „Welches sind die

allgemeinen Beziehungen zwischen Körper-Formationen und Beschleunigungs-Gesetz, welche die Existenz centro-dynamischer Körper bedingen?“ Diese allgemeine Aufgabe lässt sich zurückführen auf die Beantwortung der Frage: „Welche Form hat das Gesetz $\varphi(\varrho)$ der elementaren Beschleunigung für eine homogen belegte Kugelfläche, wenn dieselbe in Bezug auf ihren Mittelpunkt centro-dynamisch ist?“ Aus dem Gesetz $\varphi(\varrho) = B.\varrho + C \cdot \frac{1}{\varrho^{n-1}}$ folgt für den Sonderfall $n = 3$:

I. Die äussere Umgrenzung jedes (endlichen) centro-dynamischen Körpers ist eine einzige geschlossene Oberfläche, in deren Innenraum das dynamische Centrum liegt.

II. Das dynamische Centrum eines centro-dynamischen Körpers fällt mit dem Schwerpunkte desselben zusammen.

III. Das Trägheits-Ellipsoid, dessen Centrum mit dem dynamischen Centrum eines centro-dynamischen Körpers zusammenfällt, ist stets eine Kugel.

Aus den weiteren Betrachtungen folgt die Behauptung: „Nur bei dem elementaren Beschleunigungsgesetze

$$\varphi(\varrho) = B.\varrho + C \cdot \frac{1}{\varrho^2} \text{ bezw. } \varphi(\varrho) = B.\varrho + C \cdot \frac{1}{\varrho^{n-1}}$$

giebt es in unserem Raume centro-dynamische Körper bezw. in $n$fachen Mannigfaltigkeiten centro-dynamische Gebilde.“ B. Nebel.

---

**Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie,** für den Unterricht bearbeitet von Siegmund Günther. Dritte durchaus umgearbeitete und revidirte Auflage. München 1893. Verlag von Theodor Ackermann. 133 S. und 2 Karten. Preis 2 Mk.

Verfasser hat diese dritte Auflage den Forderungen der neuen Schulordnung in Bayern angepasst, weshalb das Werkchen gegenüber seinem früheren Umfang wesentlich gekürzt wurde. Ein Hauptwerth wurde darauf gelegt, dass dem Schüler für Uebungsmaterial gesorgt wurde. Zur Anregung sind zwei Sternkärtchen beigefügt, bei denen es aber für den Schüler von Werth gewesen wäre, wenn die einzelnen Sternbilder durch dünne Linien umgrenzt wären. Vielleicht nimmt der Verfasser Anlass, diesem Wunsche bei einer Neuauflage zu entsprechen! B. Nebel.

---

**Elektricität und Magnetismus im Lichte einheitlicher Naturanschauung** von Th. Schwartze. Berlin 1892. Verlag von A. Seyder (Polytechnische Buchhandlung). 62 S. Preis 1 Mk. 80 Pfg.

Nach den heutigen Anschauungen in der Physik lässt sich Schall, Licht, Magnetismus und Elektricität auf Bewegungserscheinungen zurückführen, weshalb die scheinbar eine Ausnahme bildende Gravitation von vielen

Seiten schon als eine Bewegungserscheinung zu erklären versucht wurde. In dem ersten Capitel sucht der Verfasser die Gravitation als eine Stosswirkung des Aethers darzustellen, so dass sich die Massenanziehung mit Hilfe der Mechanik erklären liesse. Bei diesen Untersuchungen wird man direct auf das Rotationsproblem gelangen, dem der Verfasser das zweite Capitel gewidmet hat. Das dritte Capitel behandelt Elektricität und Magnetismus. Darin entwickelt der Verfasser eine Anschauung, die uns unverständlich ist und mit den heutigen Anschauungen sich nicht im Einklang befindet. Es soll nämlich eine Winkelfunction die Dimension einer Zeit besitzen. Natürlich sind auch die Folgerungen daraus solche, welche sich mit den heutigen Forschungsergebnissen nicht decken. B. Nebel.

---

**Das räumliche Wirken und Wesen der Elektricität und des Magnetismus** von Max Möller. Mit 8 Textabbildungen und 3 Tafeln. Hannover-Linden 1892. Verlag von Manz & Lange. 73 S. Preis 3 Mk. 50 Pfg.

Aus den vielfachen Beobachtungen, welche der Verfasser als Wasserbau-Ingenieur bei den Wasserwellen gemacht hatte, drängte sich ihm die Frage auf, ob denn das Wirken und Wesen der Elektricität und des Magnetismus nicht auf ähnliche Bewegungen, die der Aether auszuführen hätte, hinauskomme. Seine Vermuthung fand noch Unterstützung durch die Schallwellen in der Luft und durch sonstige meteorologische Studien. Bei diesen Untersuchungen betrachtet der Verfasser die Elektricität als eine Wellenreihe im Aether, und zwar ist der galvanische Strom aufgefasst als eine fortschreitende Welle, während die statische Elektricität mit stehenden Wellen übereinstimme. Die Elektricität und der Magnetismus wird hier von einem ganz anderen Standpunkte aus behandelt, als dies gewöhnlich geschieht, so dass der Physiker vom Fach sicherlich neue Anregung erfährt.

B. Nebel.

---

**Physikalisch-ökonomische Studien.** Die Bedeutung der Elektricität für das sociale Leben. Von J. Sanoy. Konstanz 1892. Verlag von Ernst Ackermann. 60 S. Preis 1 Mk. 50 Pfg.

Der erste Theil umfasst eine analytisch-synthetische Entwicklung eines physikalisch-ökonomischen Standpunktes, von welchem aus theoretische Schlüsse gezogen werden, wie z. B. der Werthunterschied zwischen Arbeitskraft und Arbeitserzeugniss muss ein unendlich grosser werden. Von diesem Standpunkte aus unternimmt der Verfasser eine historische Prüfung dieses Satzes. In der Elektricität glaubt der Verfasser eine Kraft zu besitzen, die nichts kostet und unkörperlich ist, sie allein könne nur zum Ziele führen. — Derartige Phantasiegebilde wollen wir, die wir noch dem festen Boden unter den Füssen haben, nicht mit rauher Hand zerstören.

B. Nebel.

**Principles of the Algebra of Physics.** By A. MACFARLANE. Printed by the salem press publishing and printing Co., Salem Mass 1891.

Verfasser ist bestrebt, die Algebra dahin zu erweitern und zu verallgemeinern, dass sie die Quaternionen, die Grassmann'sche Methode und die Determinanten vereinigt und sich anwenden lässt auf physikalische Grössen im Raum, dass sie aber zur gewöhnlichen Algebra wird, sobald man specialisirt.

B. NEBEL.

---

**Die Wärmequelle der Gestirne in mechanischem Maass**, ein Beitrag zur mechanischen Wärmetheorie. Von W. GEF. Heidelberg und Leipzig 1892. Verlag von August Siebert. 11 S. Preis 1 Mk.

Verfasser geht von der Anschauung aus, dass die Schwerkraft eine zum anziehenden Körper hintreibende Kraft ist, welche von der Sonne vernichtet wird, wobei von der Sonne Arbeit geleistet wird. Diese Arbeit berechnet nun der Verfasser und setzt sie in Vergleich mit der von der Sonne abgegebenen Calorien. Eine Uebereinstimmung, die nicht einmal in der Dimension auftritt, sei deshalb unmöglich, weil unsere Messinstrumente für den grössten Theil der von der Sonne ausgehenden Strahlen durchlässig seien. Das Ergebniss fasst der Verfasser in folgenden Zusätzen zur mechanischen Wärmetheorie zusammen: „Dem Energieverlust der Weltkörper durch Ausstrahlung steht gleichwerthig gegenüber Energieerzeugung innerhalb der Gestirne durch die Schwerkraft“ und „Die Arbeit, die der Körper im Widerstand gegen Druckkräfte verbraucht, ist umgesetzte Energie der Schwerkraft.“

B. NEBEL.

---

**Lehrbuch der Physik** für höhere Lehranstalten, sowie zur Einführung in das Studium der neueren Physik. Von H. BÖRNER. Mit 470 in den Text gedruckten Abbildungen. Berlin 1892. Verlag der Weidmann'schen Buchhandlung. 584 S. Preis 6 Mk.

Dieses Physikbuch ist mit Rücksicht auf die neuen Lehrpläne in den preussischen Schulen geschrieben worden und zerfällt demnach in zwei (fortschreitende) Stufen. Die erste Stufe, welche einen mehr inductiven Charakter trägt, umfasst Alles, was ein gebildeter Mensch von Physik wissen soll, während die zweite Stufe, die ein mehr deductives Gepräge besitzt, für die oberen Classen bestimmt ist, wo sich auch die Mathematik besser verwenden lässt. Das Buch ist aber auf beiden Stufen doch so reich mit Stoff versorgt, dass schon der Verfasser diejenigen Partien, die ohne Weiteres übergangen werden können, durch ein Sternchen versehen hat. Nach unserer Auffassung hätte der Verfasser bei dem absoluten Maass-System auch auf die Dimensionen eingehen sollen; denn dadurch erhält der Schüler erst den richtigen Einblick in das Wesen desselben und erkennt den damit verbundenen grossen Vortheil bei der rechnerischen Verwandlung der Energieformen. Bei dem so inhaltsreichen Buche wird dieser wichtige

Theil der Physik um so mehr vermisst, wir hoffen, dass der Verfasser bei einer Neuauflage diesen Wunsch berücksichtigen werde. B. NEBEL.

---

**Einleitung in das Studium der modernen Elektricitätslehre** von JGNAZ G. WALLENTIN. Mit 253 in den Text gedruckten Holzschnitten. Stuttgart 1892. Verlag von Ferdinand Euke. 560 S. Preis 12 Mk.

Zur Zeit existiren nicht viele Physikbücher, welche dem Schüler den Uebergang von der Experimentalphysik zu der theoretischen Physik erleichtern. Die Bücher über theoretische Physik sind bezüglich der mathematischen Ansprüche vielfach nur für die eigentlichen Fachleute bestimmt und nehmen auf solche, welchen die Kenntnisse in der höheren Mathematik abgehen, keinerlei Rücksicht. Nun giebt es aber eine grosse Zahl unter den Studirenden, welche etwas tiefer in die Physik einzudringen wünschen, als dies bei der Experimentalphysik möglich ist. Für einen solchen Leserkreis ist das vorliegende Werk bestimmt, das die gewaltigen Fortschritte der Elektricitätslehre in der Neuzeit zum Gegenstande hat. Die mathematischen Kenntnisse, welche bei dem Abschluss eines Gymnasiums erlangt werden, reichen vollständig aus, um das Werk mit Nutzen lesen zu können. Auf angehende Elektrotechniker ist besondere Rücksicht genommen, die Maschinen und Messmethoden sind relativ eingehend behandelt worden; auch wurde den elektrischen Einheiten, der Wichtigkeit entsprechend, ein besonderes Capitel zugewiesen. Ausserdem zeichnet sich das Werk durch einen deutlichen Druck und sorgfältig ausgeführte Figuren aus, so dass es Vielen sehr zweckdienlich sein wird. B. NEBEL.

# Bibliographie

vom 1. October bis 15. November 1893.

### Periodische Schriften.

Verhandlungen der vom 27. September bis 7. October zu Brüssel abgehaltenen 10. allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessungs-Commission. Redigirt von A. Hirsch. Berlin, G. Reimer. 12 Mk.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorologischen Instituts. Jahrgang 1893. Herausgegeben von W. v. Bezold. Berlin, Asher & Co.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Ohrtmann. 22. Bd. (Jahrgang 1890), 3. Heft. Herausgegeben von E. Lampe. Berlin, G. Reimer. 13 Mk.

Fortschritte der Physik, 43. Theil, 2. Abtheilung für das Jahr 1887. Physik des Aethers. Redigirt von E. Budde. Ebendaselbst. 18 Mk.

Mémoires de l'académie des sc. de St. Petersbourg. VII. série, tome XLI, Nr. 2—5. Leipzig, Voss. 7 Mk. 75 Pfg.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du bulletin de l'acad. de St. Petersbourg. Tome VII, livr. 2. Ebendaselbst. 3 Mk. 75 Pfg.

### Reine Mathematik.

Lie, S., Theorie der Transformationsgruppen. 3. Abschnitt (Schluss). Unter Mitwirkung von F. Engel bearbeitet. Leipzig, B. G. Teubner. 20 Mk. compl. 60 Mk.

—— Vorlesungen über continuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen. Bearbeitet von G. Scheffers. Ebendaselbst. 24 Mk.

Kämpfe, B., Tafel des Integrales $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}\,dt$. Leipzig, Engelmann. 60 Pfg.

Goursat, E., Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Bearbeitet von C. Bourlet. Deutsche Ausgabe von H. Moser, mit Begleitwort von S. Lie. Leipzig, B. G. Teubner. 10 Mk.

Rohn, K. und E. Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Bd. Leipzig, Veit & Co. 11 Mk.

THOMAE, J., Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung. Halle a. d. S., Nebert. 6 Mk.

PÖZL, W. und G. EFFERT, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik und Algebra für Gymnasien. München, Lindauer. 3 Mk.

SCHEFFLER, H., Beleuchtung und Beweis eines Satzes aus Legendre's Zahlentheorie. Leipzig, Förster. 1 Mk.

## Physik und Meteorologie.

BOLTZMANN, L., Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichts. II. Theil. Leipzig, Barth. 5 Mk.

FLETCHER, L., Die optische Indicatrix; eine geometrische Darstellung der Lichtbewegung in Krystallen. Uebersetzt von H. AMBRONN u. W. KÖNIG. Ebendaselbst. 3 Mk.

SCHIÖTZ, E., Ueber die Reflexion longitudinaler Wellen von einer festen Ebene. Christiania, Dybwad. 1 Mk.

GÄNGE, C., Anleitung zur Spectralanalyse. Leipzig, Quandt & Händel. 2 Mk.

SCHEFFLER, H., Die Aequivalenz der Naturkräfte und das Energiegesetz als Weltgesetz. Leipzig, Förster. 9 Mk.

SCHREIBER, P., Generalbericht über die Gewitter etc. im Königreich Sachsen. Chemnitz, Bülz. 30 Pfg.

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Ueber die Wasseruhr und das Astrolabium des Arzachel.

Von

Dr. ARMIN WITTSTEIN.

### Einleitung.

Wohl die Geschichte jeder Wissenschaft hat einige *homines veteres* aufzuweisen, über die nicht selten in um so bestimmterer Ausdrucksweise geschrieben wird, je weniger man von ihnen weiss, je mangelhafter die Anhaltspunkte sind, welche kärgliche Nachrichten von ihren äusseren Lebensumständen uns gewähren. Als ein solcher Mann erscheint in der Astronomie des Mittelalters der Arabo-Hispanier *Arzachel* (corrumpirten Namens), dessen Gestalt immer noch merklich verstärkter Beleuchtung bedarf, um hinreichend scharf begrenzt wahrgenommen werden zu können. Ueber seine Lebensdauer, deren Fixirung im 11. Jahrhunderte und die Zeit seiner wissenschaftlichen Thätigkeit sind wir so gut wie gar nicht unterrichtet. Letztere vermuthe ich zwischen 1060 und 1080, ihren Schauplatz aber im überwiegenden Maasse in *Toledo*, woselbst er u. A. im Jahre 1080 die geocentrische Länge des Regulus (le lieu de Régulus à 132° 33′ de l'équinoxe vrai) zu 132° 33′ bestimmt haben soll, wie der jüngere *Sédillot*, wahrscheinlich in der Absicht damit stillschweigend den Beweis für die Vortrefflichkeit der angewandten Methode (eines Ausgleichungsverfahrens) zu erbringen, mittheilt.[1]) Schade, dass der „wahre Ort" in Länge um 4°.5 zu klein erhalten wurde! An eine mögliche Verwechselung von 2 und 6 im Arabischen, d. h. an einen nur scheinbaren Bestand jenes bedauerlichen Misserfolges, dabei zu denken, möchte ich nicht befürworten. Dass ich bei meiner Vergleichung nur das mittlere Aequinoctium für den Jahresanfang im Auge haben konnte, dürfte kaum nöthig sein hinzuzufügen, eben so wenig wie die Bemerkung, dass das „wahre Aequinoctium" Sédillot's nicht im Sinne unserer heutigen Terminologie aufzufassen ist. Befreit man nämlich die beobachtete Position irgend eines Gestirnes von den Instrumentalfehlern, sowie von dem Einflusse der astronomischen Refraction und, wenn nöthig, von dem der Parallaxe, so heisst dieselbe jetzt auf das *scheinbare* Aequinoctium zur Zeit der Beobachtung, oder auf die scheinbare Durchschnittslinie von Aequator und Ekliptik bezogen, — während früher, so lange das uralte Dogma von der unendlich grossen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes noch unbeanstandet galt, die am Instrumente

abgelesene und entsprechend verbesserte Coordinate eines Objectes am Himmel schon dessen *wahren* Ort zur angegebenen Epoche repräsentirte. Da ferner der Glaube an die momentane Ausbreitung des Lichtes einen eben so grossen Zeitraum hindurch seine Herrschaft behauptete, als das periodische Schwanken der Erdachse, die Nutation, unbekannt blieb, so war der aus der Beobachtung hervorgehende Ort auch zugleich der *mittlere*.

Hinsichtlich der *Beinamen* unseres Toledaner Astronomen herrscht bei Allen, die sich mit ihm, aber grösstentheils in recht unbefriedigender Weise[2]), beschäftigt haben, nahezu Uebereinstimmung; sie lauteten زرقال Zarkâlî oder زرقالة Zarkâlo und النقاش an-nakkâś. Der erste, wenn auch in der (mindest-)verderbten Schreibweise „Arzachel", wurde von Anfang an von europäischen Schriftstellern conservirt, den zweiten, der verschiedene Uebersetzungen zulässt, mag er sich entweder durch wirkliches Talent zum Malen oder, was wahrscheinlicher ist, durch seine mechanische Kunstfertigkeit in der Herstellung metallener Astrolabien und im Aufreissen der nöthigen Linien darauf erworben haben. Seine *eigentlichen* Namen anlangend, halte ich mich an das, was *M. Steinschneider*[3]) zu Recht erkannt hat; danach hiess er *Abû'l Kâsim Ibn 'Abdi'r-Rahman*. Dieses, die früheren schwankenden Angaben endlich berichtigende Ergebniss scheint nicht allgemein angenommen oder genügend bekannt geworden zu sein; denn noch bei R. Dozy (Supplément aux dictionnaires arabes. Leyden, 1881. 2 Bände in gr. 4°.) lese ich Abou-Ishâc Ibrâhîm ibn-Yahyâ an-Naccâch, surnommé Ibn-az-Zarkél.

Als sicher bekannt lässt sich von Zarkâlî registriren, dass er etwa um das Jahr 1080, gelegentlich der Vergleichung der aus seinen eigenen Beobachtungen folgenden Sonnen-Excentricität mit der *al-Battânî*'s[4]), ein Zurückgehen des Apogaeums der Sonne constatirt zu haben glaubte und dadurch das Zustandekommen der sogenannten Trepidations-Theorie der Fixsterne wesentlich gefördert hat. Letztere, dem Boden griechischer Astronomie entsprossen, war schon *Tâbit ben Korra* (ثابت بن قرة, geb. 836 zu Harrân, gest. 901 zu Bagdad) plausibel erschienen, der mit Zuhülfenahme einer beweglichen Ekliptik, die sich abwechselnd über die feste erhob oder unter sie herabsenkte, die Aequinoctialpunkte um Beträge, die bis zu 10° 45′ steigen konnten, vor- oder rückwärts schreiten liess, an die Stelle der fortschreitenden Rückwärtsbewegung der Aequinoctien in der Ekliptik also eine oscillirende um ein mittleres Aequinoctium setzte. Um seine Beobachtungen mit denen des al-Battânî in Einklang zu bringen, gab Zarkâlî dem Mittelpunkte des excentrischen Kreises eine Bewegung auf der Peripherie eines kleinen Kreises und verfuhr sonach ähnlich, wie Ptolemaeus beim Monde.

Zarkâlî theilt das Schicksal aller halb mythischen Persönlichkeiten: *die Einen* heben ihn, sozusagen, in den Himmel, die Anderen weisen ihm

ein recht bescheidenes Plätzchen hienieden an. Zu den ersteren, so viel steht fest, gehörten seine Fachgenossen im Orient, die ihm, wovon man sich mehrfach überzeugen kann, rückhaltlose Anerkennung zollten; so schätzt ihn z. B. Abû'l Hasan ʿAlî (bekannter marokkanischer Astronom des 13. Jahrhunderts) als einen Gelehrten ersten Ranges. Ihnen ist im Abendlande der jüngere Sédillot beizuzählen, der zwar kein Astronom, dafür aber mit der Verleihung des Prädicates „berühmt" an orientalische Astronomen um so freigebiger war. Von den Vertretern der zweiten Partei, mit entgegengesetzter Ansicht, will ich nur *Delambre* nennen, der in seiner *Histoire de l'astronomie du moyen âge* (Paris, 1819; gr. 4⁰. Mit 17 Figuren-Tafeln.) zu der Vermuthung gelangt, „dass er nichts weiter war, als ein ungeschickter Beobachter". Das Mittel aus diesen divergirenden Urtheilen wird, denke ich mir, das Richtige treffen. Um Zarkâlî's Leistungen in der theoretischen Astronomie, und damit ihn selbst, nach Verdienst, würdigen zu können, ist eine ganz andere Klärung des thatsächlichen Sachverhaltes, vor Allem eine objectivere, erforderlich, als sie augenblicklich das gesammte Material über ihn zu bieten vermag; aber zur Erreichung dieses Zweckes dürfen nicht *ausschliesslich* philologische Kräfte Hand an's Werk legen, so bereitwillig ich auch anerkenne, dass wir die wenigen Lichtstrahlen, die bis jetzt auf Z. gefallen sind, fast allein dem Eifer der Orientalisten zu verdanken haben. Das *dicitur* muss noch gar zu oft bei ihm aushelfen, ja wir sind nicht einmal im Stande genau anzugeben, welche Tafeln (die zu wiederholten Malen ins Lateinische übersetzt und in einigen Manuscripten uns erhalten sein sollen) er eigentlich verfasst habe, ob die „Toledanischen" von ihm herrührten, u. s. w.? Letzteres ist, wenigstens für mich, durchaus nicht erwiesen.

Wenn ich hier versuche, in dem soeben angedeuteten Sinne mit einem, wie ich hoffe, guten Beispiele voranzugehen und zunächst Zweierlei von Dem, was man dem Zarkâlî zuschreibt, ich will nicht gerade behaupten: zum ersten Male zu behandeln, — wohl aber, auf Grund von Urkunden, die mir dabei zu Gebote stehen, in's rechte Licht zu stellen, so glaube ich damit für die Geschichte der Astronomie nichts Ueberflüssiges zu unternehmen, sondern einen Beitrag zu ihr zu liefern, von dem ich nur wünsche, dass er, als Aequivalent für die Mühe, die er mir gekostet hat, Andere zu weiteren Untersuchungen über einen Mann veranlassen möge, dessen Ansehen sich Jahrhunderte lang in ungeschmälertem Fortbestande erhalten hat.

Ein Astrolabium, *Zarkalla*, das unzweifelhaft aus Zarkâlî's Händen hervorgegangen, und dessen Construction wesentlich von der ähnlicher Beobachtungs-Werkzeuge, deren man sich bis dahin allgemein bediente[5]), verschieden war, hat höchst wahrscheinlich seinen Ruhm begründet; und zwar nicht blos im Morgenlande, sondern auch bei den Abendländern, denen das „Zarcallicum" zu Gesicht kam, hat es, hier wie dort, so immenses Erstaunen hervorgerufen, dass man es nur mit Hülfe göttlicher Inspiration

glaubte begreifen zu können: *In primis celebre est illud [instrumentum] Zarcallicum nuncupatum, quod ob eximiam, quâ delineatur, brevitatem, tùm ob mirabilem quam complectitur Astronomiae doctrinam, omnium hujusce disciplinae Professorum manibus teritur. Enimverò ubi primùm id Instrumenti genus ad Orientales Astronomos pervenit, id statim vehementer sunt admirati; nec sine divinâ ope vel intelligere potuerunt.* (Von Casiri l. c. aus dem Arabischen übersetzt.) Hat dieses Instrument, dem eine „äusserst elegante Form" (آلة بديعة المثال جدًّا, nach Ḥâǵi Ḫ.) gefälliges Aussehen verlieh, ihm in astronomischen Kreisen sein Haupt-Renommée verschafft, so war es eine Wasseruhr, die man als sein Werk pries, welche breitere Schichten mit hoher Verehrung für ihn erfüllen musste, wenn sie wirklich das leistete, was die Fama ihr nachrühmte. Sie näher zu betrachten, soll meine erste Aufgabe sein.

---

## Anmerkungen.

1) *L. Am. Sédillot, Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes.* M. 36 lithograph. Tafeln. (Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie royale des inscriptions et belles-lettres de l'Institut de France. Première série. Tome I. Paris, MDCCCXLIV. 4°.) Stets meine ich *dieses* Werk von Sédillot, wenn ich im Verlaufe meiner Arbeit noch einige Male genöthigt sein werde, auf den Verfasser zu recurriren; den Schluss desselben bildet, wie ich gleich anticipiren will, ein sehr werthvoller, 19 Seiten umfassender Index arabischer Kunstausdrücke, die der reinen Mathematik und Astronomie entlehnt sind. — Ausser einer Menge von Beschreibungen und Zeichnungen verschiedener Astrolabien und sonstiger Instrumente, auch der der Sternwarte zu Merâǵah, darunter einer Art von Mauersextant (السدس), der vertical im Meridian stand, mit Sehrohr ausgerüstet und von beträchtlicher Grösse war, — findet der Leser darin die sehr detaillirte Untersuchung eines arabischen Himmelsglobus, womit *Jomard* das Département der geographischen Karten der Pariser Bibliothek bereichert hat. Im Gegensatze zu seinem Entdecker, dem Mailänder Dr. Schiepati, der ihn aus der Mitte des 11. Jahrhunderts stammen lässt, glaubt Sédillot hierfür keine frühere Zeit, als den Anfang des 13. Jahrhunderts, annehmen zu dürfen; vermuthlich ist er in Aegypten verfertigt worden. Ueber den Schrift-Charakter theilt S. nichts mit. Der Globus, welcher einen Durchmesser von etwa 18 cm hat, ist von Messing und besteht aus zwei Halbkugeln, die längs des Horizontalkreises (von 25 cm Durchmesser) zusammengelöthet sind. An seinen Polen ragen, ungefähr 25 mm lange, eiserne Zapfen hervor, die, wie es scheint, einer den ganzen Globus durchdringenden Rotations-Achse angehören und ihre Lager in dem festen, aber nicht mehr vorhandenen Meridian hatten. Letzterer ist unveränderlich mit dem Horizontalkreis verbunden, der selbst wieder von 4 metallenen Armen getragen wird, die zu einem modernen hölzernen Fussgestelle gehören. Das Ganze hat eine Höhe von 39 cm. Ausser denen des Thierkreises, sind noch 22 nördliche und 15 südliche Sternbilder darauf angegeben und, soweit sie nicht

durch das Alter gelitten haben, was leider mehrfach der Fall (Séd. hoffte jedoch von Jom., der solche Lücken nicht dulden werde, eine gründliche Wiederherstellung), ziemlich sauber ausgeführt. In ihrer Bezeichnung weichen sie aber von der auf anderen, uns bekannten, Globen üblichen theilweise sehr ab; so heisst, um nur Ein Beispiel zu nennen, die Andromeda dort المرأة ٱلّتى لم تر بعلا Al-mar'atu'l-latî lam tara ba'lân, „die Frau, welche keinen Mann gesehen hat“, statt المسلسلة Al-musalsela, „die Angekettete“. Aequator und Ekliptik sind in Grade eingetheilt. — Mit diesem Pariser hat ein anderer arabischer Himmelsglobus, der in Florenz aufbewahrt wird, und von dessen Existenz ich leider erst jetzt Kenntniss erhielt, grosse Aehnlichkeit. Herr *F. Meucci* hat ihn in einer besonderen, als *Pubblicazione del R. Istituto di Studi superiori pratici e di Perfezionamento in Firenze,* im Jahre 1878 zu Florenz (in kl. 4°. m. 2 Figuren-Tafeln) erschienenen Schrift näher beschrieben, welche betitelt ist: *Il Globo celeste arabico del secolo XI,* esistente nel Gabinetto degli Strumenti antichi di Astronomia, di Fisica e di Matematica del R. Istituto di Studi superiori. Er ist gleichfalls aus zwei verlötheten messingenen Halbkugeln, von 209 mm Durchmesser, zusammengesetzt und enthält 47 Sternbilder, 21 nördliche, 14 südliche und 12 im Thierkreis; auch bei ihm sind Aequator und Ekliptik in Grade eingetheilt. Unter den Namen der einzelnen Sternbilder, welche nicht selten denen auf dem Pariser Globus (so bei der Andromeda) völlig identisch sind, überraschte es mich, für Cepheus „der Flammige“ zu finden, nämlich eine Bezeichnung, die, wenn ich mich nicht sehr irre, zum ersten Male in den alphonsinischen Tafeln, also in der Mitte des 13. Jahrhundertes, erscheint. Der Florentiner Globus enthält folgende, wie alles Uebrige, in kufischen Charakteren ausgedrückte Inschrift:

صنع هذه الكرة ذات الكرسىّ للذى
الوزارتين القايد الاعلى ابى عيسى
بن لبّون ادام الله عزّه وتأييده عبده
ابراهيم بن سعيد السهلى الوزّان فى
بلنسية مع محمّد ابنه فوضع الكواكب
الثابتة فيها على حسب اعظامها
واقطارها فتمّت فى اوّل صفر عام تعج
لهجرة النبىّ صلّى ٱللّه عليه وسلّم
تسليما

„Diesen, mit einem Fussgestelle versehenen Globus hat für den, mit der Würde beider Wezirate [nämlich des Krieges und des Friedens] belehnten obersten Commandanten, Abû 'Isâ Ibn Labbûn, — Gott verlängere seine Macht und seinen Halt! — sein Diener Ibrâhîm Ibn Sa'îd as-Sahlî, der Wagenmacher, in Valencia, in Gemeinschaft mit seinem Sohne Muhammed, verfertigt und die Fixsterne, nach ihren Grössen und Durchmessern, daraufgesetzt. Er war vollständig im Anfange des Safar des Jahres 473 der Flucht (des Propheten). Gott neige sich über ihn und gebe ihm vollkommenes Heil!“

Herr Professor *F. Lasinio*, der sich der mühsamen Uebersetzung aller auf dem Globus vorkommenden Worte unterzogen hat, ist der Ansicht, dass die Jahreszahl in den Hunderten jedenfalls zuverlässig sei und höchstens 478 gelesen werden könne, in Uebereinstimmung mit Herrn Meucci, der auf einem ganz anderen, von dem seinigen durchaus unabhängigen Wege zu demselben Resultate gelangt sei. Letzterer prüfte die Position des Regulus und fand, dass die Himmelskugel seine Länge um 14° 10′ grösser angiebt, als das Verzeichniss des Ptolemaeus, mithin, die Präcession zu 1° in 66 Jahren nach al-Battânî angenommen, die Zeit der Verfertigung des Globus in die Nähe des Jahres 1075 fallen müsse, Ende Juli 1080, wie die Inschrift besagt. Gleiches constatirte er

dann für die übrigen Sterne. Als maassgebend für die Bestimmung seines Alters, da die Jahreszahl undeutlich gravirt zu sein scheint, und in Folge dessen, was Prof. L. besser als ich weiss, im Kufischen ausserordentlich leicht falsch gelesen werden kann, erachte ich den Umstand, dass die Persönlichkeit des Besitzers eine wohlbekannte und zur angegebenen Zeit lebende war. *So findet sich denn wirklich in einer unserer europäischen Sammlungen ein arabischer Himmelsglobus aus dem letzten Drittel des 11. Jahrhundertes,* und mein früherer Ausspruch, dass wir nirgends einen älteren, als aus dem Anfange des 13. Jahrhundertes stammenden, unter den vorhandenen nachweisen könnten, lässt sich, zu meiner Freude, jetzt nicht mehr aufrecht erhalten. Die Palme, uns zu dieser Entdeckung verholfen zu haben, gebührt unstreitig Prof. F. Lasinio. Was den Präcessions-Werth des Herrn Meucci anlangt, so wäre es erforderlich gewesen, dabei zu bemerken, für welche Gattung von Jahren er gelten sollte, da in Strenge unser Sonnenjahr nicht gemeint sein kann, sondern das altägyptische von 365 Tagen, an das sich die arabischen Astronomen, die es beim Ptolemaeus vorfanden, gewöhnt hatten, während es den persischen besonders bequem war, weil es seit dem 9. Jahrhunderte mit ihrem eigenen beweglichen Sonnenjahre zusammenfiel. Dass weiter die Einführung von 1° Präcession in 66 altägyptischen oder persischen Jahren (die, wenn man die Schalttage hinzurechnet, nahe mit 68 synodischen Mondjahren übereinkommen) von al-Battânî herrühre, wird sich kaum beweisen lassen, sondern dieselbe ist höchst wahrscheinlich schon vor ihm erfolgt, da, so viel ich weiss, bereits die Astronomen des al-Mâmûn danach rechneten; in den *Tabulis probatis* (الزيج الممتحن), als deren Verfasser der 831 verst. Jaḥîa ben abi Manṣûr (يحيى بن ابى منصور) genannt wird, ist sie wenigstens adoptirt. Die sonstigen Präcessions-Werthe der Orientalen und denjenigen, welchen ich einst selbst dem Astronomen aus Battan beigelegt habe, hier näher zu erörtern, würde zu weit führen.

2) 1. *Lexicon bibliographicum et encyclopaedicum* a Mustafa Ben Abdallah *Katib Jelebi* dicto et nomine *Haji Khalfa* celebrato compositum. Ad codicum Vindobonensium, Parisiensium et Berolinensis fidem primum edidit, latine vertit et commentario indicibusque instruxit *Gustavus Fluegel.* Tomus tertius. London, MDCCCXLII. Gr. 4°. S. 540, 541, 556.

Auf der zuletzt angegebenen Seite sagt Ḥâġi Ḫalifa (حاجى خليفة), dass der Spanier Ibn Ḥammâd, auf Grund der Beobachtungen von Ibrâhîm Ben Yahya Naccâsh (nämlich von Arzachel), drei Tafeln entworfen habe, von denen die eine (المقتبس al-moḳtebes, promptuarium) einen kurzen Auszug aus den beiden anderen enthielt.

2. *d'Herbelot, Bibliothèque orientale* etc. III. Band. Paris, 1778. 4°. S. 589.

3. *M. Casiri, Bibliotheca Arabico-Hispana Escurialensis* etc. I. Band. Madrid, 1760. Folio. S. 393.

4. *Géographie d'Aboulféda,* traduite de l'arabe en français et accompagnée de notes et d'éclaircissements, par *Reinaud.* Tome I. (Enthält lediglich Einleitendes.) Paris, MDCCCXLVIII. 4°. S. CII.

Der Werth dieses, im hohen Grade verdienstvollen Werkes liegt darin, dass es mit seltener Umsicht und nicht geringem Fleisse Alles, was nur über arabische (eben so persische und türkische) Reisende und Geographen (zum Theil auch Astronomen) zu erreichen war, in sich vereinigt; weit weniger Interesse bietet es in der Richtung, die hier Veranlassung war, es anzuführen. So begegnen wir darin einer, der des Kosmas sehr ähnlichen, Anschauung arabischer Cosmographen, welche annahmen, dass Erde und Ocean von einem unzugänglichen Ringgebirge,

قاف ḳâf, umgeben seien, hinter dessen Rücken die Sonne des Nachts verschwinde. Ferner wird aus einer türkischen Schrift (محيط moḥŷṭ, Umkreis, häufig an Stelle von بحر محيط baḥr-i moḥŷṭ, Ocean, stehend) eine Windrose, deren Ungenauigkeit übrigens dem Verfasser nicht entgangen war, abgebildet; sie enthält 32 Striche und 16 Sterne, von denen 15, weil ihre Auf- und Untergangsrichtungen angegeben sind, zweimal auftreten. Südpol (قطب سهيل) und Nordpol (قطب جاه) werden Pol des Suhail und Weltpol genannt. Ein einzelner Strich heisst خن ḫenn, das verkürzte persische خانه ḫâne, Haus, Pl. خانها ḫânahâ, hier اخنان, weil in das Türkische nur die ungebräuchliche persische Pluralendung übergegangen ist. Rein türkisch würde der Plural خانه‌لر ḫâneler lauten, der Singular ist der persische.

5. In der *Wüstenfeld'*schen Text-Ausgabe des Ibn Ḫallikân (ابن خلّكان), die in den Jahren 1835 bis 1850 zu Göttingen in zwei Quart-Bänden erschien, habe ich Arzachel nicht finden können.

3) *M. Steinschneider, Vite di matematici arabi* tratte da un' opera inedita di Bernardino Baldi. (Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche — Tomo V. Roma, 1874. gr. 4°.)

S. 68: Osseruò egli cento e trent' anni dopo Albategnio, e trouò che a' suoi tempi la massima declinatione del Sole era di gradi uentitrè e trentaquattro minuti. Der Vordersatz (nicht v. St.) bestätigt meine Vermuthung über die Beobachtungszeit des Zarḳâlî im Grossen und Ganzen.

4) محمد بن جابر بن سنان ابو عبد الله الحرانى المعروف بالبتانى wurde in der Mitte des 9. Jahrhundertes zu Battân in Mesopotamien, in der Nähe von Ḥarrân, geboren und starb 929. Seine Beobachtungen stellte er zu Raḳḳa am Euphrat von 878 bis 918 an.

5) Eines der ältesten arabischen Astrolabien, die wir besitzen, wenn nicht das älteste überhaupt, befindet sich in Paris und wurde in der ersten Hälfte des 10. Jahrhundertes von Aḥmed ben Ḫalaf für den Chalifen Ǵa'far ben Almoktafî Billah verfertigt. Für das fehlende Datum — eine Jahreszahl ist nämlich nicht darauf angegeben — nimmt Sédillot einmal (S. 150) das Jahr 912, das andere Mal, 22 Seiten später, 905 an. Da aber zu beiden Zeiten jener Fürst in noch gar zu jugendlichem Alter stand, als dass man ihm schon ein Beobachtungs-Instrument dedicirt hätte, habe ich mir erlaubt, hierin eine kleine Aenderung vorzunehmen, die allerdings voraussetzt, dass das *tout-comme-chez-nous* für die arabischen Potentaten des frühen Mittelalters noch nicht galt.

## Die Wasseruhr.

Fünfzig Jahre sind verflossen, seit den Abendländern durch *P. de Gayangos*'[1]) Uebersetzung das Geschichtswerk des bereits 1631 — gerade zur Zeit der Wende, wenn auch nicht der *Schrecken* des schlimmsten aller Kriege, so doch der zur *allmäligen Befreiung* von der geistigen Knechtschaft Roms — verstorbenen *Al-Makkarî* in einer ihrer Sprachen bekannt geworden war. Darin konnte man eine gar wundersame Mähre lesen von einer überaus kunstvollen Wasseruhr, welche Az-Zarkal in Toledo ersonnen und daselbst in Gang gesetzt hatte. Da mir die ganze, lebhaft an ähnliche, aber sehr in's Dunkel der Sage gehüllte, Kunstwerke der

وَمِنْ غرائب الاندلس البِيلتان اللتان بطليطلة صنعهما عبد الرحمن

لما سمع بخبر الطلسم الذى بمدينة ارين [Lisez أُزَيْن] من ارض الهند

وقد ذكره المسعودى وانه يدور باصبعه من طلوع الفجر الى غروب

الشمس فصنع هو هاتين البيلتين خارجَ طليطلة فى بيت مجوَّف فى

جوف النهر الاعظم فى الموضع المعروف بباب الدبّاغين ومن عجبهما

انهما تمتلئان وتنحسران [Les man. portent يمتليان ويمحسران] مع

زيادة القمر ونقصانه وذلك ان اولَ الهلال يخرج فيهما يسيرُ ماء فاذا

اصبح كان فيهما [Faut-il ajouter ربع ?] سُبْعهما من الماء فاذا كان

آخر النهار كمل فيهما نصفُ سبع ولا يزال كذلك بين اليوم والليلة

نصف سبع حتى يكمل من الشهر ۷ ايام وسبعةُ ليالٍ فيكون فيهما

نصفهما ولا تزال كذلك الزيادة نصف سبع فى اليوم والليلة حتى

يكمل امتلأوهما بكمال القمر فاذا كان فى ليلة خمس عشرة الخمسة عشر

Chaldäer erinnernde Erzählung ein wenig romanhaft gefärbt erschien, und dazu noch das Bedenken kam, ob Zarḳâlî's Schöpfung ihn, nur vom Jahre seiner Bestimmung des Ortes von $\alpha$ Leonis an gerechnet, wirklich über ein halbes Jahrhundert im Zustande ununterbrochen befriedigenden Functionirens überdauert haben konnte, — habe ich mich, um nach Möglichkeit alle Zweifel zu beseitigen, mit der vorhandenen Uebersetzung nicht begnügt, sondern, auf Grund der Leydener Text-Ausgabe in emendirter Gestalt[2]), eine zweite angefertigt, die ich im Nachstehenden, nebst Urtext und der englischen, absichtlich nicht in's Deutsche übertragenen Conversion, hier vorlege. — Ob *Fleischer's* „Textverbesserungen" und eine spätere Schrift *Dozy's* über diese sich auch auf jene fragliche Stelle erstrecken, weiss ich nicht. — Alles, was ich aus Anlass meiner Uebersetzung in sachlicher oder sprachlicher Hinsicht glaubte betonen oder näher discutiren zu müssen, habe ich im Deutschen durch beigefügte Zahlen gekennzeichnet und dann unter der Rubrik „Anmerkungen" einzeln der Reihe nach abgehandelt.

„Einige berichten, als Merkwürdigkeiten Andalusiens[3]), von zwei Becken[4]), welche *ʿAbdurraḥman*[5]) zu Toledo verfertigt hatte, nachdem ihm Kunde von dem Talisman in der Stadt *Ozein*[6]) in Indien geworden war, von dem *Al-Masʿûdî*[7]) eine Beschreibung gegeben hat, der zu Folge jener vom Eintritte der Morgendämmerung an bis zum Untergange der Sonne einen Zeiger in Bewegung setzte. Diese beiden Becken stellte nun ʿAbdurraḥman ausserhalb Toledo's, dort wo sich das sogenannte Gerber-Thor (Bâbu-'d-dabbâgîn) befindet, an dem Damme des grössten Flusses auf, und zwar in einem Hause, das gewölbte Kellerräume besass.[8]) Seine beiden wunderbaren Gefässe wurden gefüllt oder geleert mit dem Wachsen des Mondes oder mit dem Abnehmen desselben, und das geschah, weil vor dem Erscheinen der ersten Mondphase[9]) sich (bereits) eine Kleinigkeit Wasser in ihnen befand[10]), die bei Tagesanbruch auf ein Viertel Siebentel und am Ende des Tages auf ein halbes Sie-

Several authors describe most minutely two water-clocks which Abu-l-Kasim-Ibn-Abdi-r-rahman, known by the surname of Az-zarkal, built in Toledo, when he heard of the famous talisman which is in the city of Arin in India, and which Mes'udi describes as marking the time with a hand from sunset to sunrise. These clocks consisted of two basins, which filled with water or emptied according to the increasing or waning of the moon. Az-zarkal placed them in a house out of the city, to the southwest, and on the banks of the river Tajoh (Tagus), near to the spot called Babu-l-dabbaghin (the gate of the tanners); their action was as follows. At the moment when the new moon appeared on the horizon water began to flow into the basins by means of subterranean pipes so that there would be at day-break the fourth of a seventh part, and at the end of the day half a seventh part, of

[Les man. portent واخذ القمرُ في النقصان نقصتا بنقصان القمر كل

يوم وليلة نصف سبع حتى يتمّ القمرُ ٢١ يوما فينقص منهما نصفهما ولا

يزال كذلك ينقص في كل يوم وليلة نصف سبع فاذا كان ٢٩ من

الشهر لا يبقى فيهما شيء من الماء واذا تكلّف احد حين تنقصان

[ينقصان Les man. portent] ان يملأهما وجلب لهما الماءَ ابتلعتا ذلك من

حينهما حتى لا يبقى فيهما الا ما كان فيهما في تلك الساعة وكذا

لو تكلّف عند امتلائهما افراغَهما ولم يُبْقِ فيهما منهما [Les man. portent

شيًا ثم رفع يده عنهما خرج فيهما من الماء ما يملأهما في الحين وهما

اعجب من طلسم الهند لان ذلك في نقطة الاعتدال حيث لا يزيد

الليل على النهار واما هاتان فليستا هذان فليسا [Les man. portent

في مكان الاعتدال ولم تزالا في بيت واحد حتى ملك النصارى دمّرهم

الله طليطلةَ فاراد ألْفُنْش ان يعلم حركاتهما فامر ان تقلع الواحدةُ

منهما لينظر من اين ياتي اليها اليهما [S. La. O. الماءُ وكيف الحركة

فيها فقلعت فبطلت حركتُها حركتهما [La. O. وذلك سنة ٥٢٨ وقيل

ان سبب فسادهما حُنَيْن اليهودي الذي جلب حمام الاندلس كلها

الى طليطلة في يوم واحد وذلك سنة ٥٢٧ وهو الذي اعلم الفنشَ ان

ولده سيدخل قرطبة ويملكها فاراد ان يكشف حركة البيلتين فقال

له ايها الملك انا اقلعهما واردّهما احسنَ ممّا كانتا وذلك انّي

اجعلهما تمتلئان بالنهار وتحسران في الليل فلما قلعتا [قلعت Les man.portent]

bentel der ganzen Füllung stieg.[11]) Und diese Füllung von einem halben Siebentel innerhalb eines Zeitraumes von 24 Stunden[12]) hörte nicht auf, bis 7 Tage und 7 Nächte des Monates vorüber, und dann beide Becken halb voll waren; sie dauerte fort bis zur Füllung des noch übrigen Restes, d. h. 14 Tage lang, zu welcher Zeit Vollmond eintrat. Dann waren beide Bassins ganz mit Wasser angefüllt.

In der 15. Nacht, als der Mond abzunehmen begann, nahm auch das Wasser ab, und zwar um ein halbes Siebentel in dem Zeitraume eines Tages und einer Nacht, so dass, als der Mond 21 Tage vollendet hatte, die Becken zur Hälfte leer waren. Und auch dieser Process hörte nicht auf, bis in der 29. Nacht des Monates endlich in den Becken nichts mehr von Wasser übrig blieb.

Wenn Jemand, den die Sache nichts anging, sich zu der Zeit zu den Becken begab, als ihre Füllung abnahm, und Wasser hinzufüllte, so wurde es sogleich verschluckt, so dass kein Wasser in ihnen zurückblieb, als eben das in dem entsprechenden Zeitmomente nöthige. Eben so, sobald ein Unbefugter aus ihnen, wenn sie nahezu gefüllt waren, Wasser entnahm, so füllten sie in demselben Augenblicke, in welchem er seine Hand von ihnen zurückzog, das verlorene Quantum wieder nach. Und seine beiden Becken waren wunderbarer als der indische Talisman, weil sich dieser unter dem Aequator, da wo Tag und Nacht einander gleich sind, befand; was aber diese beiden betrifft, so hatten sie ihren Platz nicht auf dem Aequator.[13])

the water required to fill the basins. In this proportion the water would continue to flow until seven days and as many nights of the month were elapsed, when both basins would be half filled; the same process during the following seven days and nights would make the two basins quite full, at the same time that the moon was at its full. However, on the fifteenth night of the month, when the moon began to wane, the basins would also begin to lose every day and night half a seventh part of their water, until by the twenty-first of the month they would be half empty, and when the moon reached her twenty-ninth night not a drop of water would remain in them; it being worthy of remark that, should any one go to any of the basins when they were not filled, and pour water into them with a view to quicken its filling, the basins would immediately absorb the additional water, and retain no more than the just quantity; and, on the contrary, were one to try, when they were nearly filled, to extract any or the whole of their water, the moment he raised his hands from the work the basins would pour out sufficient water to fill the vacuum in an instant. These clocks were undoubtedly a greater work of science than the Indian talisman, for this latter is placed in a country under the equinoctial line, where the days and nights are of the same length, while in Andalus, which is in the temperate zone, it does not happen thus.

لم يقدر على ردّهما [ردها .G. P. S. La] وقيل انه قلع واحدةً ليسرق

منها الصنعة فبطلت ولم تزل الاخرى تعطى حركتها والله اعلم بحقيقة

الحال.

Der Schluss, der vom Juden Ḥonain, welcher noch Besseres leisten wollte, als schon da war, und seinem misslungenen Versuche handelt, ist, eben so wie das Voraufgehende vom König Alphons, für meine Zwecke durchaus von keinem Interesse; ich habe desshalb auch keine besondere Uebersetzung, die fast genau wie die englische lauten würde (nur nimmt mein Text für die Begebenheit das Jahr 527 an), davon gemacht, sondern geglaubt, nur letztere mittheilen zu sollen: Others say that the cause of their being spoilt was Honeyn the Jew, he who conveyed all the baths of Andalus to Toledo in one day in the said year of five hundred and twenty-eight and who predicted to Alfonso, that his son would conquer Cordova, as it happened. This accursed Jew, being anxious to discover the motion of the clocks, said once to Alfonso. „O king! were I to look at them in the inside, and see how they are made, not only could I restore them to their ancient state, but even construct two others still more wonderful, and which would fill during the day and empty at night.“ Alfonso granted him his resquet, and the Jew then had one opened; but when he afterwards tried to restore it to its former state he was unable to accom plish what he had promised, and the machinery being damaged the works were stopped. The other basin, nevertheless, continued still to fill and empty in the same wonderful manner; but God is all-knowing, he knows the truth of the matter. —

Da uns bedauerlicherweise nicht eine einzige nähere Angabe über die, blos ihrer Wirkungsweise nach, skizzirte Wasseruhr aufklärt, wir also, hinsichtlich ihrer inneren Einrichtung, nur auf Vermuthungen angewiesen sind, so ist es eine etwas undankbare Aufgabe, endgiltig und zugleich gerecht, über dieses mechanische Kunstwerk abzuurtheilen, von welchem, strenge genommen, kein sehr zuverlässiger Commentator berichtet, und das — ein *Gedanke*, der durchaus nicht kurz von der Hand zu weisen ist — vielleicht

Sie wären wohl stets an Ort und Stelle in ihrer Unvergleichlichkeit erhalten geblieben, wenn die Christen, Gott verderbe sie!, nicht Toledo eingenommen hätten. *Alfonś*[14]) empfand nämlich eine grosse Wissbegierde, ihre Einrichtung kennen zu lernen, und befahl, eine Maschinerie auszugraben, damit er sähe, woher ihr Wasser kam[15]), und wie ihr Mechanismus beschaffen war. Sie wurde vom Platze weggenommen, und dabei ihr Mechanismus zerstört. Dieses hat sich im Jahre 528 der Flucht ereignet."

They remained for a long time in Toledo, until that city was taken by the Christians (may God send confusion amongst them!), when the tirant Al-Fonsh (Alfonso) felt a great curiosity to know how they were regulated, and caused one of them to be excavated, which being done the interior machinery was damaged, and the water ceased to flow into the basins. This appened in the year five hundred and twenty-eight of the Hijra (A. D. 1133—1134).

nur in der Tradition existirt hat. Zu letzterer Ansicht neigt man unwillkürlich hin, wenn man, von anderen Gründen ganz zu schweigen, sich vergegenwärtigt, dass nicht einmal die Vornahme unerlaubter Manipulationen, wie Hinzufüllen oder Ausschöpfen von Wasser, in seinem gleichmässigen Gange eine Störung hervorrufen konnte, da deren schädlicher Einfluss im Nu vom Mechanismus paralysirt wurde. Doch, dergleichen ist nebensächlich und kann unerörtert bleiben.

Jedenfalls sollte die Wasseruhr dazu dienen, der grossen Menge den Verlauf und die Dauer eines synodischen Mond-Monates (des unter den 5 möglichen Monaten allein hier in Betracht kommenden), so zu sagen: handgreiflich, ad oculos zu demonstriren. Wollte man sich aber dabei, wie dieser Zweck erreicht wurde, lediglich vom Wortlaute der Beschreibung leiten lassen, so stände man schliesslich vor dem curiosen Resultate, dass es hierzu genügte, einen oder zwei Behälter innerhalb 28 Tagen durch constanten Zu- oder Abfluss von Wasser zu füllen, resp. wieder zu leeren. Einen solchen Apparat zu construiren, wäre aber sicherlich keinem Astronomen eingefallen; denn dieser wusste, dass derselbe schon nach Ablauf *eines* Jahres 18 Tage (oder 19, wenn das betreffende Jahr 355 Tage hatte, mindestens aber etwa 14 Tage) vom Jahre der Muhammedaner[16]) abweichen würde, was denn doch zu stark war, als dass selbst der Gläubigsten Vertrauen auf seine Correctheit nicht bald erschüttert worden wäre. Wie mochte es nun erst ein halbes Jahrhundert später ausgesehen haben!

Falls man daher dem Kunstwerke nicht jede Existenz-Berechtigung absprechen und versuchen will, es auf seinem Ehrenplatze zu erhalten, so ist man zu der Annahme gezwungen, der Berichterstatter habe von der Zeiteintheilung der Becken nur so obenhin gesprochen, und die Füllung (oder Entleerung) sei vielmehr in Wahrheit so vor sich gegangen, dass der Gesammtzufluss (oder -Abfluss) innerhalb ca. $14^d 18^h 22^m$ beendigt, und

die Gefässe selbst so eingetheilt waren, dass jedes Siebentel derselben in $2^d 2^h 37.43^m$ gefüllt oder geleert wurde. Um das Werk nach diesen (wohl gemerkt!) nur genäherten Angaben zu reguliren, waren sehr gute Uhren erforderlich, die einen Genauigkeits-Grad besassen, der den der arabischen Zeitmesser vor 800 Jahren weit überragen musste, — das darf man nicht übersehen. Ob hiernach, und mit dem erwogensten Urtheile geprüft, mein Vorschlag noch auf Beifall rechnen kann, bezweifele ich sehr; verleiht er doch auch nicht meiner innersten Ueberzeugung Ausdruck, die ich in dem Bedauern zusammenfassen möchte, dass die hübsche Erzählung von Zarkâlî's Wasseruhr nicht in *„Tausend und eine Nacht“* Aufnahme gefunden hat. Zwar liesse sich noch Manches anführen, um das Chimärische, das der ganzen Darstellung anhaftet, eclatant zu erweisen, doch wird das Bisherige, glaube ich, als hierzu ausreichend befunden werden.

---

**Anmerkungen.**

1) *The history of the mohammedan dynasties in Spain by Ahmed ibn Mohammed Al-Makkarī.* Translated and illustrated by *Pascual de Gayangos.* 2 vol. London, 1840—1843. 4°. 1. Band, S. 81.

2) *Analectes sur l'histoire et la littérature des Arabes d'Espagne*, par *Al-Makkari.* Publiés par MM. R. Dozy, G. Dugat, L. Krehl et W. Wright. — Tome premier. Première partie, publiée par M. *William Wright.* Leyde, 1855. 4°. S. ١٢٩ bis ١٢٨.

3) Von den Arabern zur Bezeichnung von ganz Spanien gebraucht.

4) بِيلَة bîla bedeutet eigentlich einen Fisch, Walfisch, daneben aber auch, wie ich bei Dozy fand, das Bassin eines Röhr- oder Springbrunnens.

5) Man beachte, dass hier nur ein einziger, auf Zarkâlî nicht passender Name genannt ist.

6) Ganz gewiss muss man, statt der fehlerhaften Lesart أَرِين Arîn, so lesen; es ist das ὀζήνη des Ptolemaeus, ein indisches Wort, das weder von Diesem, noch von den Arabern, richtig wiedergegeben wurde.

7) Geboren in Bagdad, gest. 956 oder 957. Schrieb in der ersten Hälfte des 10. Jahrhundertes mehrere historische Werke und unternahm sehr weite Reisen, so nach Spanien, Persien, Indien, Ceylon u. s. w.

8) Ich kann nicht anders übersetzen, da mir nicht von einem *leeren* Hause, sondern von einem solchen die Rede zu sein scheint, dessen unterirdische Verbindung mit dem Flusse Tajo, deren übrigens nirgends ausdrücklich gedacht wird, angedeutet werden sollte. Dass dieses Gebäude südwestlich (oder, wie die Araber auch sagen: im Westen des Winters) von der Stadt lag, finde ich gleichfalls nicht bemerkt.

9) Der synodische, von Neumond zu Neumond dauernde, Monat beginnt stets an dem Abende, an welchem man in der Dämmerung die Mondsichel zuerst erblickt. Naturgemäss liess sich von einer derartigen Fixirung des Monat-Anfanges keine grosse Schärfe erwarten, sondern ihre unausbleibliche Folge war

ein beständiges Schwanken des Volkskalenders, das schon Al-Fergânî (in der Mitte des 9. Jahrhundertes) schildert, wenn er sagt: „Die Beobachtung der Mondphase giebt den Monat bald länger, bald kürzer, so dass zwei auf einander folgende Monate 30 oder 29 Tage halten können, und der Anfang des Monates, wie ihn die Rechnung und die Beobachtung geben, nicht allemal auf Einen Tag trifft, sondern sich beide erst im Verlaufe der Zeit ausgleichen."

10) So zu verstehen, dass im Moment des Neumondes das Wasser angefangen hatte zu fliessen, seitdem aber schon einige Zeit verstrichen war. Die Ausdrucksweise ist eine auffallend präcise.

11) Wörtlich: „In diesem Sinne wird bei Tagesanbruch $^1/_4$ Siebentel Wasser in ihnen sein." Das „Viertel", das höchstens dann approximative Geltung haben würde, wenn der Neumond in der Nähe der Aequinoctien eintritt, habe ich auch nur als einen Aushülfs-Bruchtheil gelten lassen. Den bürgerlichen Tag (يوم بليلته jaum bilailathi, den Tag mit seiner Nacht) beginnen die Araber mit dem Untergange der Sonne, so dass am آخر النهار eine Nacht und ein natürlicher Tag abgelaufen waren, letzterer selbstverständlich in der Bedeutung von Tageshelle genommen, nicht in seiner astronomischen, wonach er die Zeit bezeichnen würde, in der die Sonne zum Meridian zurückkehrt.

12) Wörtlich: „Zwischen Tag und Nacht."

13) Was mag sich der Berichterstatter eigentlich dabei gedacht haben? Offenbar etwas Verworrenes; denn sonst hätte er nicht Begriffe zur Vergleichung herbeigezogen, die dazu gar nicht auffordern, und angenommen, dass beim Toledaner Apparat der Einfluss wechselnder Tageslänge durch eine im Verborgenen wirkende Kraft ausgeglichen würde, beispielsweise also, indem er die täglichen scheinbaren Mond-Umläufe mit denen der Sonne vermengte, bei Tagesanbruch stets ein im Voraus bestimmbares Wasser-Quantum darin vorhanden sein müsse. Ueberhaupt lässt sich kein Sinn in das Ganze hineinbringen, und hat unser Gewährsmann wahrscheinlich nur ein wenig sein Licht leuchten lassen wollen.

14) Alphons VII. von Castilien.

15) Wörtlich: „Wie ihre Abhängigkeit vom Wasser."

16) $18^d.36706$ vom Himmel, wenn man die *mittlere* Dauer einer synodischen Revolution, die von der für eine gegebene Zeit geltenden um mehrere Stunden im positiven oder negativen Sinne verschieden sein kann, zu $29^d\,12^h\,44^m\,2^s.9$ rechnet.

Endlich, um an Nichts achtlos vorübergegangen zu sein, komme ich noch einmal auf die Stelle zurück, die Gayangos so übersetzt hat: At the moment when the new moon appeared on the horizon. Möglich, dass in seinem Texte لميقات الهلال stand, und dieses dann heissen konnte: „Genau im Augenblicke, als Neumond eintrat." Ich würde aber vorziehen, zu sagen: „als die erste feine Mondsichel erschien"; denn هِلَال hilâl bezeichnet eigentlich einen Spielraum von ein Paar Tagen, innerhalb dessen man (etwa durch die Ungunst der Witterung verhindert) zum ersten Male das Vorhandensein einer hellen Sichel constatirt, ja sogar dient es zur Bezeichnung einer ganzen Lunation.

(Schluss folgt.)

# Recensionen.

Ulisse Dini, **Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse.** Deutsch bearbeitet von Dr. Jacob Lüroth und Adolf Schepp. Leipzig, B. G. Teubner. 1892. XVIII u. 554 S.

Obschon das vorliegende Werk in seiner Original-Gestalt bereits in den Jahren 1875—78 erschien, so bildet es doch bis zum heutigen Tage das einzige ausführliche Lehr- und Handbuch für die moderne Theorie der Functionen einer reellen Variablen, wie sie sich nach Einführung des allgemeinen Functions-Begriffes durch Dirichlet und seit Riemann's grundlegender Abhandlung über die Fourier'sche Reihe insbesondere durch die Arbeiten von Hankel, Dedekind, Heine, G. Cantor, Du Bois-Reymond, Thomae, Darboux, durch Weierstrass' Vorlesungen und Dini's eigene Untersuchungen herausgebildet hat. Denn auch das im Jahre 1886 publicirte Lehrbuch von J. Tannery: „Introduction à la Théorie des Fonctions d'une Variable" will, wie schon der Titel besagt, nur zur „Einführung" in diesen Zweig der Functionen-Theorie dienen und kann hierfür namentlich dem angehenden Mathematiker in der That vortreffliche Dienste leisten: dasselbe beschränkt sich indessen auf eine präcise und anschauliche Darstellung der zu einer strengen Begründung der Infinitesimal-Analysis dienenden Haupt-Principien, ohne in eine ausführliche Discussion der mannigfachen complicirteren Möglichkeiten einzutreten, zu welchen die Begriffe der Stetigkeit, des Differential-Quotienten und des Integrales einer Function Veranlassung bieten. Wer sich über diese Dinge im Zusammenhange zu orientiren wünschte oder über irgendwelche hierher gehörige Specialfragen Rath suchte, blieb nach wie vor auf das Dini'sche Buch angewiesen.

Nun liegt es aber in der besonderen Natur der vorliegenden Materie, bei deren Behandlung es weit mehr auf Feinheit und Schärfe des Wortausdruckes, als auf complicirte analytische Entwickelungen ankommt, dass hier dem Nicht-Italiener die fremde Sprache ganz besondere Schwierigkeiten bereiten musste. Sodann kam aber, namentlich für die Benützung des Buches zum Nachschlagen, noch ein anderer Umstand als äusserst erschwerend in Betracht: das Fehlen einer ausreichenden, auch typographisch

hinlänglich kenntlich gemachten Gliederung und eines ausführlichen Inhaltsverzeichnisses — Mängel, welche um so schwerer in's Gewicht fallen mussten, als das Buch infolge äusserer Umstände nicht aus einem Gusse entstanden war und infolge dessen in Bezug auf Disposition mancherlei zu wünschen übrig lässt.

Hiernach kann es wohl keinem Zweifel unterliegen, dass die Herren Lüroth und Schepp durch die Herausgabe einer deutschen Uebersetzung, welche zugleich die eben angedeuteten Mängel beseitigt, der mathematischen Welt (und zwar nicht blos der deutschen allein) einen wirklichen Dienst geleistet, zumal sie auch dafür Sorge getragen haben, durch mancherlei anderweitige Verbesserungen und Zuthaten den Werth und die Brauchbarkeit des Buches noch zu erhöhen. Ein überaus sorgfältig gearbeitetes Register, in welchem der Inhalt eines jeden der 294 Paragraphen specificirt erscheint, gestattet eine rasche und bequeme Orientirung über das ganze Buch, welches auch durch passende Gliederung der im Originale unverhältnissmässig lang gerathenen (nämlich nicht weniger als 241 Seiten umfassenden) beiden letzten Kapitel an Uebersichtlichkeit merklich gewonnen hat. In einer Reihe von Zusatz-Paragraphen, welche an entsprechender Stelle eingeschaltet und als solche kenntlich gemacht sind, werden die wichtigsten Ergebnisse neuerer Arbeiten mitgetheilt, während im Uebrigen die neuere Literatur durch zahlreiche Fussnoten und ein am Ende des Buches befindliches ausführliches Literatur-Verzeichniss berücksichtigt wird.

Eine vollständige Umarbeitung hat das erste, von den rationalen und irrationalen Zahlen handelnde Kapitel erlitten. Während nämlich Dini die Dedekind'sche Definition der Irrationalzahlen zum Ausgangspunkte nahm, wird hier, in Uebereinstimmung mit dem jetzt in Deutschland zumeist herrschenden Usus, die Cantor'sche Definition der Irrationalzahlen durch „reguläre Zahlenfolgen" oder, wie sie hier genannt werden, „convergente Gruppen" zu Grunde gelegt. Können wir uns hiermit im Principe zwar vollkommen einverstanden erklären, so erscheint es uns doch incorrect, wenn im § 3 gesagt wird: „Eine Gruppe, deren Elemente convergiren, bezeichnen wir als irrationale Zahl". Denn da eine solche Gruppe doch ebenso gut auch eine rationale Zahl definiren kann, so erschiene hier die rationale Zahl als ein specieller Fall der irrationalen (etwa wie es üblich ist, die reelle Zahl als speciellen Fall der complexen aufzufassen), was doch dem Sprachgebrauch gänzlich zuwiderläuft und thatsächlich auch zu einer völligen Begriffsverwirrung führen würde. Es müsste also etwa heissen: „Eine Gruppe, deren Elemente convergiren, bezeichnen wir als eine allgemeine Zahl". Sodann wäre zunächst der Begriff der Gleichheit bezw. Ungleichheit solcher „allgemeiner Zahlen" in der üblichen Weise zu definiren, wobei

also insbesondere die „allgemeine Zahl" $(a_1, a_2, a_3, \ldots.)$ der natürlichen oder rationalen Zahl $b$ gleich genannt wird, wenn die Elemente der Gruppe $(b - a_1, b - a_2, b - a_3, \ldots.)$ gegen Null convergiren. Nun erst kann man die irrationale Zahl in folgender Weise definiren: „Jede allgemeine Zahl, welche keiner natürlichen (rationalen) gleich ist, heisst eine **irrationale** Zahl" — wobei dann freilich noch zur Vervollständigung dieser Definition zu zeigen wäre, dass es thatsächlich „allgemeine Zahlen" giebt, welche diese Eigenschaft besitzen.

Von den nun folgenden, dem Dini'schen Originale sich genau anschliessenden Capiteln behandelt das zweite die Cantor'sche Theorie der Zahlen- bezw. Punkt-Mengen, das dritte den Begriff des Grenzwerthes, sowie den des Unendlichkleinen und Unendlichgrossen. Nachdem sodann im vierten Capitel der Begriff der Function und daran anknüpfend derjenige der Continuität und die verschiedenen Möglichkeiten von Descontinuität erörtert sind, beschäftigt sich das fünfte Capitel zunächst mit den in irgend einem Intervalle stetigen Functionen. Dabei ergiebt sich im Anschluss an den von Weierstrass herrührenden, für die Charakterisirung der stetigen Functionen fundamentalen Satz, dass jede in einem Intervalle stetige Function daselbst mindestens ein Maximum und Minimum besitzt, eine Eintheilung der stetigen Functionen in zwei wesentlich verschiedene Klassen: solche, die in jedem endlichen Intervalle nur eine endliche Anzahl Schwankungen, d. h. Maxima und Minima besitzen und die nach C. Neumann's Terminologie als abtheilungsweise monoton bezeichnet werden, und solche mit unendlich vielen Schwankungen. An die Erwähnung der abtheilungsweise monotonen Functionen schliesst sich im folgenden Capitel naturgemäss diejenige der abtheilungsweise stetigen, deren Studium sich im Wesentlichen auf das der schlechthin stetigen reduciren lässt, und denen sodann die unendlich oft unstetigen Functionen gegenüber gestellt werden.

Das ziemlich umfangreiche siebente Capitel bringt zunächst den wichtigen Begriff der Derivirten einer Function und — nach einer Kritik der früheren, heutzutage als falsch erkannten Ansichten über die Nothwendigkeit der Existenz einer bestimmten Derivirten als blosse Folge der Stetigkeit — eine Reihe von Sätzen, welche umgekehrt darauf ausgehen, aus der Annahme der Existenz einer bestimmten Derivirten gewisse Eigenschaften der betreffenden Functionen zu erschliessen. Daran knüpfen sich Betrachtungen über die Ordnung des Verschwindens von $f(x+h) - f(x)$ mit verschwindendem $h$ und über die zweite Derivirte.

Um sodann die nöthigen analytischen Hilfsmittel zur Herstellung von Beispielen für die bisher gewonnenen Ergebnisse, wie auch für weitere Untersuchungen zu gewinnen, folgt als achtes Capitel ein Excurs über

unendliche Reihen, insbesondere über deren sogenannte gleichmässige Convergenz und gliedweise Differenzirbarkeit. Was nun den Begriff der gleichmässigen Convergenz betrifft, so verdient hier bemerkt zu werden, dass derselbe nicht von allen mathematischen Autoren in gleicher Weise definirt wird. Während nämlich die Mehrzahl derselben eine Reihe für ein gewisses Intervall der Variablen $x$ nur dann gleichmässig convergent nennt, wenn zu beliebig klein vorgelegtem positiven $\varepsilon$ eine Zahl $m$ sich so bestimmen lässt, dass für alle Zahlen $n \geqq m$ der absolute Betrag des Restes $R_n(x)$ unter $\varepsilon$ herabsinkt, so verlangen andere (z. B. Darboux in seinem Mémoire sur les fonctions discontinues) von einer als gleichmässig convergent zu bezeichnenden Reihe nur so viel, dass für irgend ein bestimmtes $m$ stets

$$|R_m(x)| < \varepsilon$$

wird. Da diese letztere, offenbar weitere Definition bei allen Betrachtungen, welche sich auf Stetigkeit, Differentiation und Integration unendlicher Reihen beziehen, genau dasselbe leistet, wie die zuerst angeführte, während thatsächlich fast alle bekannten Reihen, die in diesem weiteren Sinne „gleichmässig“ convergiren, eo ipso auch jener engeren Definition genügen und somit die charakteristische Eigenschaft besitzen, dass die Annäherung, die durch Summation einer gewissen endlichen Gliederzahl erreicht wird, stets auch erhalten bleibt bei weiterer Hinzufügung beliebig vieler Glieder — so erscheint es zweckmässig, beide Definitionen neben einander einzuführen. Dies geschieht hier in der Weise, dass die Erfüllung jener engeren Bedingung schlechthin als gleichmässige Convergenz, dagegen diejenige der weiteren als einfach gleichmässige Convergenz bezeichnet wird; auch wird an einem Beispiele gezeigt, dass es thatsächlich Reihen giebt, welche in der Umgebung gewisser Stellen nur einfach, nicht aber schlechthin gleichmässig convergiren (S. 138, Fussnote). Hierauf wird im Anschlusse an den Begriff der gleichmässigen Convergenz eine Anzahl von Lehrsätzen über Stetigkeit und Differentiation unendlicher Reihen entwickelt, welche zunächst im neunten Capitel dazu benützt wird, um das sogenannte Princip der Verdichtung der Singularitäten mit aller Strenge zu begründen.

Während aber Dini bei der Abfassung seines Buches lediglich auf die in mehrfacher Beziehung unvollkommene Hankel'sche Methode angewiesen war, wird hier noch in einer Reihe von Zusatz-Paragraphen die inzwischen publicirte, wesentlich vollkommenere Cantor'sche Methode mitgetheilt und, wie jene erstere, zur analytischen Darstellung von Functionen verwendet, welche in jedem endlichen Intervalle eine unendlich grosse Anzahl von Singularitäten in Bezug auf Continuität, Maxima und Minima oder Existenz der Derivirten besitzen. Die hierbei sich ergebende

Möglichkeit, stetige Functionen zu construiren, welche in unendlich vielen Punkten jedes beliebigen Intervalles keine oder eine unendlich grosse Derivirte haben, während in allen übrigen Punkten die Existenz einer bestimmten, endlichen Derivirten festgestellt werden kann oder allenfalls fraglich bleibt, führt dann im folgenden — zehnten — Capitel zur Construction von Functionen, welche, obgleich stets endlich und continuirlich, in keinem Punkte eine bestimmte und endliche Derivirte haben. Es werden zwei Methoden angegeben, um ganz allgemeine Typen solcher Functionen herzustellen, von denen dann das erste bekannte Beispiel dieser Art, die Weierstrass'sche Function $\Sigma a^n \sin b^n x$, als specieller Fall erscheint.

Es folgen nun im elften Capitel weitere allgemeine Untersuchungen über Zuwachsverhältnisse und Derivirte, welche vor allem zu einer zweckmässigen Eintheilung aller stetigen Functionen in zwei scharf getrennte Classen führt. Als stetige Function der ersten Art wird ausser den abtheilungsweise monotonen jede solche bezeichnet, die zwar unendlich viele Maxima und Minima oder „Invariabilitätszüge" (d. h. Strecken, in denen sie constant ist) besitzt, aber durch Addition bezw. Subtraction einer passenden Linear-Function in eine monoton zu- bezw. abnehmende verwandelt werden, oder — was offenbar auf dasselbe hinausläuft — in die Summe einer monoton zu- und einer monoton abnehmenden Function zerlegt werden kann. (Dabei zeigt sich insbesondere, dass nicht einmal die Monotonie in Verbindung mit der Stetigkeit das Fehlen einer bestimmten Derivirten für unendlich viele Punkte jedes endlichen Intervalles ausschliesst.) Als stetige Functionen zweiter Art oder auch als irreducibel oscillirende Functionen werden dagegen diejenigen bezeichnet, welche die genannte Eigenschaft nicht besitzen. Diese Eintheilung erscheint u. A. aus dem Grunde vortheilhaft, weil sich nunmehr gewisse Sätze, die zunächst nur für abtheilungsweise monotone Functionen bewiesen sind, ohne Weiteres auf die stetigen Functionen erster Art („reducibel oscillirende" Functionen*) übertragen lassen, so z. B., wie ich erläuternd bemerken will, die Dirichlet'schen Ergebnisse über die Fourier'sche Reihe.

Beruht schon die eben erwähnte Classification auf einer präcisen Unterscheidung der möglichen Grenzen, innerhalb deren der Differenzenquotent oder, wie er hier genannt wird, das Zuwachsverhältniss $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für alle Werthe $x$ eines gewissen Intervalles $(a, b)$ sich bewegen kann, während $h$, nur Werthe eines bestimmten Vorzeichens annehmend, beständig verkleinert wird, so folgt nun eine genauere Unter-

* Camille Jordan bezeichnet sie analog als: Fonctions à variation limitée. Cours d'Analyse. T. II. p. 216.

suchung derjenigen Beziehungen, welche sich aus der Betrachtung der rechts- und linksseitigen d. h für positive und negative $h$ gebildeten Zuwachsverhältnisse ergeben. Bezeichnet man mit $l_x$ die untere, mit $L_x$ die obere Grenze* des rechtsseitigen Zuwachsverhältnisses für irgend einen dem Intervalle $(a, b)$ angehörigen Werth $x$ und für alle möglichen (positiven) Werthe $h < b - x$, mit $l$ die untere Grenze aller $l_x$, mit $L$ die obere Grenze aller $L_x$, wenn $x$ successive alle Werthe des Intervalles $(a, b)$ durchläuft; desgleichen mit $l'_x$, $L'_x$, $L'$ die analogen Grössen für das linksseitige Zuwachsverhältniss: alsdann lässt sich zunächst zeigen, dass stets $l' = l$, $L' = L$ sein muss. Aus der eventuellen Beschaffenheit dieser zwei für die Function $f(x)$ im Intervalle $(a, b)$ charakteristischen Zahlen erschliesst der Verfasser gewisse Fundamentalsätze über die Existenz einer Derivirten, die zunächst dazu dienen sollen, jenes ältere, als falsch erkannte Postulatum einer wenigstens im Allgemeinen bestimmten Derivirten für jede stetige Function zu ersetzen, sodann aber auch, wie der Verfasser bemerkt, möglicherweise die Grundlagen einer allgemeineren Rechnungsmethode zu bilden, die über die Leistungsfähigkeit der Differentialrechnung hinaus auch die nicht-differenzirbaren Functionen einer analytischen Behandlung zugänglich machen würde.

Um diesem Ziele näher zu kommen, werden nunmehr diejenigen für beliebige stetige Functionen stets existirenden Grössen eingeführt, welche den gewöhnlichen Derivirten (vor- und rückwärts genommenen Differentialquotienten) der differenzirbaren Functionen in der Weise entsprechen, dass sie dieselben als specielle Fälle enthalten. Es sind dies die mit $\lambda_x$, $\Lambda_x$ bezeichnete untere und obere Unbestimmtheitsgrenze des rechtsseitigen Zuwachsverhältnisses für $lim\ h = +0$, welche als rechte untere und rechte obere Derivirte definirt werden; und ebenso die mit $\lambda'_x$, $\Lambda'_x$ bezeichneten analogen Grössen für das linksseitige Zuwachsverhältniss als linke untere und linke obere Derivirte: Dieselben können auch aufgefasst werden als die Grenzwerthe der oben mit $l_x$, $L_x$ bezw. $l'_x$, $L'_x$ bezeichneten Grössen, für den Fall, dass $b$ bezw. $a$ der Grenze $x$ zustrebt. Diese vier verschiedenen Derivirten

* In der Uebersetzung steht in diesem ganzen Abschnitt statt: „untere (obere) Grenze" (= Schranke) durchweg: „unterer (oberer) Grenzwerth", was leicht zu Missverständnissen führen kann, da an anderen Stellen des Buches diese Bezeichnung im Sinne von: „untere (obere) Unbestimmtheits-Grenze" gebraucht wird. Bekanntlich fällt der letztere Begriff mit demjenigen der unteren (oberen) Grenze einer Zahlenmenge dann und nur dann zusammen, wenn die betreffende untere (obere) Grenze unter der Zahlenmenge selbst nicht vorkommt.

gehen offenbar in die gewöhnlichen rechts- und linksseitigen Derivirten über, welche von nun ab stets als Ableitungen bezeichnet werden, falls $\lambda_x = \Lambda_x$ und $\lambda'_x = \Lambda'_x$; während das Zusammenfallen aller vier Grössen $\lambda_x$, $\Lambda_x$, $\lambda'_x$, $\Lambda'_x$ mit der Existenz einer einzigen (gleichgiltig ob vorwärts oder rückwärts gebildeten) Ableitung identisch ist. Bezeichnet man sodann mit $\lambda$ die untere, mit $\Lambda$ die obere Grenze von $\lambda_x$, für den Fall, dass $x$ wiederum irgend ein Intervall $(a, b)$ durchläuft, so lässt sich zeigen, dass diese Grösse $\lambda$ bezw. $\Lambda$ auch die untere bezw. obere Grenze für $\Lambda_x$, $\lambda'_x$, $\Lambda'_x$ bilden, und dass sie mit den früher $l$ bezw. $L$ genannten Grössen zusammenfallen. (Die zwei früher mit $l$, $L$, jetzt mit $\lambda$, $\Lambda$ bezeichneten, für die Function $f(x)$ im Intervalle $(a, b)$ charakteristischen Zahlen fassen somit die Werthe aller diesem Intervalle angehörigen Derivirten und Zuwachsverhältnisse zwischen sich.) Indem man nun das irgend eine Stelle $x_0$ umgebende Intervall $(a, b)$ hinlänglich verkleinert, lässt sich hieraus der wichtige Schluss ziehen, dass in jeder beliebigen Nähe jener Stelle $x_0$, wenn auch $\lambda_{x_0}$ und $\Lambda_{x_0}$ um eine beliebige endliche Grösse differiren, unendlich viele Stellen $x$ liegen müssen, für welche $\lambda_x$ und $\Lambda_x$ einander beliebig nahe kommen; das analoge gilt natürlich für $\lambda'_x$, $\Lambda'_x$. Daraus folgt dann u. A., dass die Stetigkeit irgend einer der vier Derivirten auch diejenige der drei anderen und die Existenz einer bestimmten Ableitung nach sich zieht, und dass um so mehr aus der Existenz einer rechtsseitigen stetigen Ableitung stets auch diejenige einer mit ihr zusammenfallenden linksseitigen folgt.

Weitere Sätze über die Ableitungen und ihre Existenz bringt sodann das zwölfte Capitel. Nach einer Discussion der möglichen Unstetigkeiten der Derivirten und Ableitungen, sowie der Bedingungen, unter denen aus dem Verschwinden z. B. der rechtsseitigen Ableitung (bezw., wie in einem Zusatz-Paragraphen bemerkt wird, auch einer rechtsseitigen Derivirten) auf die Constanz der Function geschlossen werden kann, wird die Untersuchung über die Existenz der Ableitungen einer Function $f(x)$ zurückgeführt auf die Betrachtung aller Functionen

$$\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu,$$

wo $\mu$ und $\nu$ veränderliche Parameter bedeuten. Erinnert man sich nämlich der Bemerkung, dass eine stetige Function (erster Art) mit unendlich vielen Maximis und Minimis oder Invariabilitätszügen durch Addition einer passenden Linearfunction $\mu x + \nu$ diese Singularitäten verlieren kann, so folgt umgekehrt, dass eine abtheilungsweise monotone, stetige Function $f(x)$ durch Subtraction von $\mu x + \nu$ in eine Function $\varphi(x)$ mit derartigen Singularitäten übergehen kann; und da sich die Derivirten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ nur um die Grösse $\mu$ unterscheiden, so wird die Existenz einer

Ableitung für $f(x)$ wesentlich davon abhängen, ob unter allen möglichen durch Variation des Parameters $\mu$ entstehenden Functionen $\varphi(x)$ solche sind, die vermöge ihrer Singularitäten die Existenz einer Ableitung ausschliessen oder nicht. Nach verschiedenen, auf Grundlage dieses Principes gewonnenen specielleren Sätzen gelangt der Verfasser schliesslich zu dem folgenden Haupt-Resultat: Wenn unter allen möglichen Functionen $\varphi(x)$ einschliesslich der für $\mu = 0$, $\nu = 0$ resultirenden, als endlich und stetig vorausgesetzten Function $f(x)$ für jeden Punkt $x$ des Intervalles $(a, b)$ höchstens eine einzige existirt, welche in der Umgebung von $x$ unendliche viele Maxima und Minima hat, so besitzt $f(x)$ für jede Stelle $x$ im Innern von $(a, b)$ und auch für $x = a$ eine endliche oder bestimmt unendliche, im Allgemeinen stetige rechtsseitige Ableitung $d_x$, ebenso für alle $x$ innerhalb $(a, b)$ und für $x = b$ eine linksseitige Ableitung $d'_x$ mit den nämlichen Eigenschaften; und zwar ist stets:

$$d_{x+0} = d'_{x+0} = d_x, \quad d_{x-0} = d'_{x-0} = d'_x.$$

(Die fragliche Bedingung ist u. A. stets erfüllt, wenn unter allen möglichen $\varphi(x)$ nur eine endliche Anzahl von Functionen enthalten ist, welche innerhalb $(a, b)$ unendlich viele Maxima und Minima haben.) Der obige Satz ist auch umkehrbar, sodass also die für die Existenz der Ableitungen in dem näher präcisirten Sinne als hinreichend erkannten Bedingungen sich auch als nothwendige erweisen.

Nach verschiedenen Modificationen des erwähnten Hauptsatzes und einigen weiteren daran sich knüpfenden Folgerungen, insbesondere auch nach einem Vergleiche des gefundenen Resultates mit dem Ampère'schen Versuche, die Existenz der Ableitung zu beweisen, wendet sich der Verfasser zu einer kurzen Betrachtung über die zweite Derivirte, in welcher darauf hingewiesen wird, dass man hier durch Adaptirung der zuvor angewendeten Methode, nämlich durch Einführuug aller Functionen $\psi(x)$, welche sich von der zu untersuchenden $f(x)$ um eine Function zweiten Grades unterscheiden, zu analogen Resultaten gelangen könne. Als erläuterndes Beispiel zu dieser Bemerkung wird der Satz abgeleitet, dass unter geeigneten Voraussetzungen die zweite Derivirte mit dem Grenzwerthe des zweiten mittleren Differenzen-Quotienten übereinstimmt.

Das Capitel schliesst mit einigen Bemerkungen über die Taylor'sche Reihe, wobei insbesondere hervorgehoben wird, dass aus dem Verschwinden von $f(x)$ mit sämmtlichen Ableitungen für irgend eine Stelle $x_0$ selbst dann noch nicht auf das Verschwinden von $f(x)$ für irgend welche Nachbarschaft von $x_0$ geschlossen werden dürfe, wenn von vornherein feststeht, dass $f(x)$ daselbst nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt, und dass die Endlichkeit von $f(x)$ und sämmtlichen Ableitungen

für irgend eine Stelle $x_0$ und deren Umgebung noch keineswegs die Entwickelbarkeit nach Potenzen von $(x - x_0)$ nach sich ziehe.*

Der gesammte übrige Theil des Buches beschäftigt sich mit der Theorie der bestimmten Integrale. Nachdem zunächst im Beginne des dreizehnten Capitels auf das Unzulängliche der älteren Methode hingewiesen, den Integral-Begriff auf die Umkehrung der Differentiation zu basiren, erfolgt sodann die Definition des bestimmten Integrales als Grenzwerth einer Summe, an die sich naturgemäss die Aufsuchung der nothwendigen und hinreichenden Integrabilitäts-Bedingungen knüpft. Es werden verschiedene Formen dieser Bedingungen aufgestellt und mit ihrer Hilfe gewisse Functions-Classen sehr allgemeiner Natur als integrabel erkannt: Neben den schlechthin oder im Allgemeinen stetigen und den schon von Riemann als integrabel erwähnten unstetigen Functionen, welche nur eine endliche Anzahl von Sprüngen $> \sigma$ besitzen, insbesondere auch diejenigen unstetigen Functionen $f(x)$, für welche, mit eventuellem Ausschluss einer Punktmenge erster Gattung, durchweg $f(x+0)$ [oder auch durchweg $f(x-0)$] existirt. Die letztere Kategorie wird in einem Zusatz-Paragraphen noch dahin erweitert, dass die zulässigen Ausnahmepunkte auch eine sogenannte nicht ausgedehnte Menge zweiter Gattung bilden dürfen. Schliesslich wird an einigen Beispielen gezeigt, wie die gegebene Definition des bestimmten Integrales in gewissen Fällen geradezu zur Berechnung desselben benützt werden kann.

Das vierzehnte Capitel handelt von den Haupteigenschaften der bestimmten Integrale: der Vertauschung der Grenzen, der Zerlegung in Theil-Integrale, der Integrabilität einer Summe, eines Productes, eines Quotienten und der näherungsweisen Berechnung eines Integrales. Sodann wird gezeigt, dass die Integrale zweier integrabler Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwischen irgend welchen Grenzen $\alpha$, $\beta$ schon übereinstimmen, wenn die Beziehung $f(x) = \varphi(x)$ nur für eine innerhalb $(\alpha, \beta)$ überall dichte Menge gilt. Das Capitel schliesst mit Betrachtungen über das Integral eines Productes $f(x) . \varphi(x)$, welche zum Beweise des sogenannten ersten Mittelwerth-Satzes führen.

Im fünfzehnten Capitel wird das Integral als Function seiner oberen Grenze betrachtet und zunächst deren Stetigkeit und die

* Zur Vervollständigung der fraglichen Bemerkung hätte vielleicht von den Herausgebern auf einen Aufsatz Du Bois Reymond's: „Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihe" — Math. Ann. Bd. 21. i. 109 — verwiesen werden können. Weitere Ergänzungen findet man in den neuerdings von mir publicirten Aufsätzen: „Zur Theorie der Taylor'schen Reihe etc." — Math. Ann. Bd. 42. „Ueber Functionen, welche in gewissen Punkten .... keine Taylor'sche Reihenentwickelung besitzen." „Ueber die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylor'schen Lehrsatzes etc." — M. A. Bd. 44.

Existenz der Ableitung in der üblichen Weise erörtert. Die hieran geknüpfte Bemerkung, dass $\int\limits_a^x f(x)dx$ stets eine stetige Function erster Art sein muss, lässt sich einfacher beweisen, wenn man bemerkt, dass für $|f(x)| < c$ das Integral der positiven Function $\{f(x) + c\}$ mit $x$ stets monoton zunimmt und $\int\limits_a^x \{f(x) + c\}\,dx = \int\limits_a^x f(x)\,dx + c(x-a)$ ist. — Es folgt nun der sogenannte Fundamentalsatz der Integralrechnung über den Zusammenhang des bestimmten und des unbestimmten Integrals in der Form, dass die Giltigkeit der Beziehung

$$\int\limits_a^b d_x \,.\, dx = F(b) - F(a)$$

für den allgemeinen Fall bewiesen wird, dass die im Intervalle $(a, b)$ durchweg stetige Function $F(x)$ mit eventuellem Ausschluss einer Menge erster Gattung (allgemeiner: einer abzählbaren, nicht ausgedehnten Menge) die integrable rechtsseitige Ableitung $d_x$ besitzt. Dieses Resultat wird sodann noch dahin erweitert, dass die Beziehung

$$\int\limits_a^b \lambda_x \,.\, dx = \int\limits_a^b \Lambda_x \,.\, dx = \int\limits_a^b \lambda'_x \,.\, dx = \int\limits_a^b \Lambda'_x \,.\, dx = F(b) - F(a)$$

als giltig erwiesen wird, falls $F(x)$ im Intervalle $(a, b)$ stetig und irgend eine der vier Derivirten $\lambda_x$, $\Lambda_x$, $\lambda'_x$, $\Lambda'_x$ integrabel ist; woraus dann wiederum noch in dem zuerst betrachteten Falle die Relation

$$\int\limits_a^b d'_x \,.\, dx = \int\limits_a^b d_x \,.\, dx$$

sich ergiebt, falls $F(x)$ auch eine linksseitige integrable Ableitung $d'_x$ besitzt. Das Haupt-Ergebniss dieser Untersuchung lässt sich dahin zusammenfassen, dass Integration und „Derivation“ — beide in dem hier geltenden allgemeinen Sinne genommen — inverse Operationen sind. Schliesslich lässt sich noch an die letzte Gleichung, wenn man sie in die Form setzt $\int\limits_a^b (d_x - d'_x)\,dx = 0$, in Verbindung mit dem Umstande, dass es thatsächlich stetige Functionen giebt, welche integrable $d_x$, $d'_x$ mit unendlich oft von Null verschiedener Differenz besitzen, die interessante Bemerkung knüpfen, dass man auf diese Weise Functionen bilden kann, welche für unendlich viele Punkte jedes Intervalles von Null verschieden sind, während ihr Integral den Werth Null hat.

Das sechzehnte Capitel behandelt den sogenannten zweiten Mittelwerthsatz der Integralrechnung in seinen verschiedenen Formen. Dabei wäre vielleicht zu erwähnen gewesen, dass der Satz in seiner Fundamentalform:

$$\int_a^b f(x)\,.\,\varphi(x)\,.\,dx = f(a)\,.\int_a^\xi \varphi(x)\,dx \quad (a < \xi < b),$$

wo $f(x)$ eine im Intervalle $(a, b)$ niemals zunehmende positive Function bedeutet, von Herrn Bonnet herrührt, der auch die grosse Bedeutung dieser Beziehung für die Theorie der Fourier'schen Reihen und ähnliche Entwickelungen vollkommen erkannt hat. Die sogenannte Du Bois-Reymond'sche Form des zweiten Mittelwerthsatzes, oder, wie sie von Herrn Dini genannt wird, die Weierstrass'sche Formel ist thatsächlich ein blosses Corollar des obigen Hauptsatzes und die heftige Polemik, welche Du Bois-Reymond gegen die letztere Bezeichnung zur Vertheidigung seiner Prioritäts-Ansprüche mehrfach geführt hat, ist in Wahrheit ziemlich gegenstandslos, da das Hauptverdienst an der Entdeckung des zweiten Mittelwerthsatzes zweifellos Herrn Bonnet gebührt. Ich gedenke, auf diesen Punkt bei anderer Gelegenheit noch zurückzukommen.

Im siebzehnten Capitel wird die Definition des bestimmten Integrales auf solche Functionen ausgedehnt, welche im Integrationsgebiet auch unendlich gross werden und zwar für eine Anzahl von Punkten, die entweder endlich ist oder eine Menge erster Gattung bildet. Hieran schliesst sich die Uebertragung der im vierzehnten Capitel bewiesenen Hauptsätze auf Integrale der jetzt betrachteten Art, insbesondere auch eine genaue Untersuchung der Integrabilität von $f(x)\,.\,\varphi(x)$ bezw. $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, für den Fall, dass $\varphi(x)$ im Integrationsgebiet Unendlichkeits- bezw. Null-Stellen besitzt. Sodann wird gezeigt, wie sich auch die Ergebnisse des fünfzehnten Capitels, betreffend die Stetigkeit eines Integrales als Function seiner oberen Grenze, sowie den Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integrale auf den vorliegenden Fall übertragen lassen, und wie man aus der Existenz des unbestimmten Integrals $\int f(x)\,dx$ auf die Integrabilität von $f(x)$ schliessen kann. Es folgen dann noch die bekannten Integrabilitäts-Kriterien, welche sich aus der Vergleichung einer für $x = \beta$ unendlich gross werdenden Function $f(x)$ mit den Ausdrücken

$$\frac{1}{(\beta - x)^{1-\mu}},\ \frac{1}{(\beta - x)\,\{lg(\beta - x)\}^{1+\mu}},\ \frac{1}{(\beta - x)\,lg(\beta - x)\,.\,\{lg\,lg(\beta - x)\}^{1+\mu}},$$
$$\ldots .\ (\mu > 0 \text{ bezw. } \leq 0)$$

ergeben, nebst dem durch Beispiele erläuterten Hinweis, dass für solche $f(x)$, welche in der Umgebung von $x = \beta$ unendlich viele Maxima und Minima besitzen, auch ein Unendlichwerden von höherer Ordnung die Integrabilität nicht ausschliesst.

Das achtzehnte Capitel enthält die analogen Betrachtungen für solche Integrale, die sich über unendlich grosse Intervalle erstrecken. Dabei wird gezeigt, dass ausser der üblichen Definition:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\beta=\infty} \int_a^\beta f(x)\,dx$$

die für ein Integral mit endlichem Integrations-Intervall geltende Definition als Grenzwerth einer Summe unter gewissen Voraussetzungen auch auf ein solches mit unendlichem Integrations-Intervall übertragen werden kann, sodass also ganz direct

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\delta_s=0} \sum_1^\infty {}_s f_s \,.\, \delta_s$$

wird. Nachdem sodann auch hier der Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integrale seine Erledigung gefunden, wird noch der zweite Mittelwerthsatz in seinen verschiedenen Formen auf den vorliegenden Fall ausgedehnt. Das Capitel schliesst wiederum mit der Ableitung der Convergenz- bezw. Divergenz-Kriterien für $\int_a^\infty f(x)\,.\,dx$, welche sich aus der Vergleichung von $f(x)$ mit $x^{-(1+\mu)}$, $x^{-1}.(lg\,x)^{-(1+\mu)}$, $x^{-1}(lg\,x)^{-1}.(lg\,lg\,x)^{-(1+\mu)}\ldots.$ ($\mu > 0$ bezw. $\mu \leq 0$) ergeben. Zugleich wird auch wieder an Beispielen gezeigt, dass die betreffenden Divergenz-Kriterien für solche Functionen, welche im Unendlichen unendlich viele Maxima und Minima besitzen, nicht in Frage kommen.

Im neunzehnten Capitel wird zunächst die Methode der partiellen Integration mit möglichster Allgemeinheit behandelt und insbesondere auch auf den Fall ausgedehnt, dass die zu integrirenden Functionen oder das Integrations-Intervall unendlich gross werden. Alsdann folgt eine genaue Untersuchung der Integration durch Substitution, wobei zunächst statt der bekannten Relation

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_a^b f[\psi(y)]\,.\,\psi'(y)\,dy$$

die folgende allgemeinere entwickelt wird:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_a^b f[\psi(y)]\,.\,\lambda_\psi\,.\,dy,$$

in welcher $\lambda_\psi$ irgend eine der vier Derivirten von $\psi(y)$ bedeutet. Auch werden die allgemeinsten Möglichkeiten für die Auswahl der Function $\psi(y)$ festgestellt und die gefundenen Resultate wieder auf den Fall eines unendlich grossen Integrations-Intervalles ausgedehnt. Schliesslich wird noch der Fall erörtert, dass statt der Beziehung $x = \psi(y)$ eine von der Form $y = \varphi(x)$ zur Transformation von $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ vorgelegt ist, und auf gewisse hierbei zu beachtende Vorsichtsmassregeln aufmerksam gemacht.

Das zwanzigste und letzte Capitel handelt zunächst von der gliedweisen Integration unendlicher Reihen. Als hinreichende Bedingung für die Giltigkeit der Beziehung

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{1}^{\infty} u_n\right) dx = \sum_{1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} u_n \,.\, dx$$

wird die gleichmässige und auch schon die einfach gleichmässige Convergenz der Reihe $\Sigma u_n$ für das Intervall $(a, b)$ erkannt. Erleidet die gleichmässige Convergenz von $\Sigma u_\nu$ eine Unterbrechung in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge erster Gattung, so bleibt die obige Beziehung noch bestehen, falls die Reihe der Integrale $\sum_{1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} u_n dx$ für alle $x$ des Intervalles $(\alpha, \beta)$ gleichmässig convergirt. Diese Sätze gelten auch noch für den Fall $\beta = \infty$, sobald die fraglichen Bedingungen für jedes noch so grosse endliche Intervall $(\alpha, \beta)$ erfüllt sind. Analoge Sätze werden sodann aufgestellt für die Integration von $\Sigma U \,.\, u_n$, wo $U$ eine gewisse Function von $x$ bezeichnet. Hieran schliessen sich noch Betrachtungen über Integrale von der Form $\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x) dx$, wobei $f_\lambda(x)$ eine Function bedeutet, die ausser von der Integrations-Variablen $x$ noch von einem Parameter $\lambda$ abhängen, während die Grenzen $\alpha$, $\beta$ entweder als constant oder gleichfalls von $\lambda$ abhängig angenommen werden können. Bedeutet dann $\lambda_0$ irgend einen speciellen Werth von $\lambda$, so wird zunächst, falls $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ constant sind, die Giltigkeit der Bezeichnung erwiesen:

$$\lim_{\lambda=\lambda_0} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_\lambda(x) dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x) dx,$$

sobald $f_\lambda(x)$ für $\lambda = \lambda_0$ gegen die integrirbare Function $\psi(x)$ convergirt und zwar gleichmässig für alle $\lambda$ zwischen $\lambda_0$ und $\lambda_0 + \varepsilon_0$ und alle $x$ des Intervalles $(\alpha_0, \beta_0)$ mit eventuellem Ausschlusse einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge erster Gattung. Dieses Ergebniss wird dann noch in gewisser Weise modificirt und schliesslich auf den Fall übertragen, dass auch die Grenzen von $\lambda$ abhängig sind oder eine derselben unendlich gross ist bezw. für $\lambda = \lambda_0$ ins Unendliche wächst.

Die vorstehende Uebersicht, in der natürlich nur das Wesentlichste hervorgehoben werden konnte, wird immerhin genügen, um eine deutliche Vorstellung von dem überaus reichen und interessanten Inhalte des ganzen Buches zu geben. Die Darstellung ist durchweg klar und bei der vielfach nicht unerheblichen Schwierigkeit der behandelten Materiale verhältnissmässig leicht verständlich, mitunter vielleicht ein wenig zu breit. Die Uebersetzung darf geradezu vortrefflich genannt werden.

ALFRED PRINGSHEIM.

G. Darboux, **Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal.** Deuxième partie. Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. Des lignes tracées sur les surfaces. Paris, Gauthier-Villars et fils. 1889. 522 S. 15 Fr.

Der zweite Band dieses hervorragenden Werkes besteht aus zwei Büchern, und das erste desselben, Buch IV, behandelt die Congruenzen und die linearen partiellen Differentialgleichungen, besonders der zweiten Ordnung, um da analytische Entwickelungen zu geben, die später vielfache zum Theil fast unmittelbare geometrische Anwendungen finden.

Es wird zunächst der Begriff der Congruenz von Curven erklärt, die Focalpunkte und Focalfläche derselben, und eine Reihe von Sätzen über allgemeine Congruenzen abgeleitet, worauf zu der Congruenz von geraden Linien übergegangen wird und besonders zu der Focalfläche und den Schaaren von abwickelbaren Flächen, die von den Geraden der Congruenz gebildet werden. Von besonderer Wichtigkeit sind die Congruenzen, die aus den Tangenten einer Curvenschaar auf einer Fläche bestehen, deren abwickelbare Flächen der zweiten Schaar auf der ursprünglichen Fläche ein conjugirtes System ausschneiden. Auf der einen Schale der Focalfläche wird dadurch eine Curvenschaar bestimmt, deren Tangenten eine neue Congruenz mit einer neuen Focalfläche bilden. Setzt man dieses Verfahren fort, so wird man auf rein geometrischem Wege zu einer Transformation der linearen partiellen Differentialgleichungen geführt, die zuerst von Laplace 1773 entwickelt ist. Diese wichtige Methode wird mit allen Entwickelungen durchgeführt und die Gesammtheit der linearen Gleichungen aufgesucht, für welche dieselbe die volle Lösung liefert.

Die gewonnenen Sätze werden angewendet auf die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{n}{x-y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{m}{x-y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{p}{(x-y)^2} z = 0,$$

die zuerst Euler für den Fall $m = n$ behandelt hat. Dieselbe wird durch die Substitution $z = (x-y)^\alpha \Theta$ in die Form

$$E(\beta, \beta') = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\beta'}{x-y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\beta}{x-y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

übergeführt. Nach Aufstellung einiger particulärer Lösungen und der Invarianten der Gleichung wird die Laplace'sche Methode darauf angewendet, die Lösung für ganze $\beta$ und $\beta'$ durchgeführt, und für den Fall, dass $\beta$ und $\beta'$ Brüche sind, werden diese Zahlen auf echte Brüche zurückgeführt. Es wird darauf die Riemann'sche Integrationsmethode entwickelt und zunächst aus der Gleichung

$$F(z) = \Sigma\Sigma A_{i,k} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = 0$$

die neue

$$G(u) = \Sigma\Sigma(-1)^{i+k} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k}(A_{i,k}u) = 0$$

gebildet, die nach Analogie der Bezeichnung von **Lagrange** für eine unabhängige Variabele die adjungirte genannt wird und die zuerst bei **Riemann** vorkommt. Die weitere Behandlung beschränkt sich auf die Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$, und, nachdem dieselbe nach der **Riemann**'schen Methode unter Angabe von zwei verschiedenen Formen des Integrals gelöst ist, wird gezeigt, dass die beiden Invarianten für diese Gleichung und ihre adjungirte gleich sind, aber in verschiedener Ordnung. Entwickelt man die Reihe von Gleichungen von **Laplace**, so erhält man bei der adjungirten Gleichung Invarianten, die denen der ursprünglichen Gleichung gleich sind, wenn die Reihe nach der negativen Seite genommen wird.

Das Integrationsproblem wird nun dahin vereinfacht, dass nur eine unabhängige Variabele genommen wird,

$$f(u) = \sum_1^n \lambda_i \, . \, u^{(i)},$$

wo die $\lambda_i$ Functionen von $x$ sind. Es wird die adjungirte Gleichung **Lagrange**'s $g(v)$ aufgestellt, die Bedeutung derselben für die Integration gezeigt und eine Zahl von Relationen zwischen den beiden adjungirten Gleichungen abgeleitet. Dieselben werden auf den besonderen Fall angewendet, dass die adjungirte Gleichung dieselben Integrale hat, wie die gegebene. Dann ist $g(u) = \pm f(u)$, je nachdem die Ordnung der Gleichung gerade oder ungerade ist. Von den ersteren hat **Jacobi** die wesentlichsten Eigenschaften angegeben, die letzteren werden hier zuerst behandelt. Mit Hilfe der gefundenen Sätze werden dann die Lösungen nach der **Laplace**schen Methode vervollständigt, die Reihe der Invarianten für die verschiedenen Gleichungen der **Laplace**'schen Reihe abgeleitet und besonders der Fall behandelt, dass diese Reihe in beiden Richtungen endet. Es folgt eine neue Lösung der Gleichung und es werden drei verschiedene Formen angegeben, in welche man das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung bringen kann.

Besonders einfach sind die linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Invarianten gleich sind; dieselben lassen sich auf die Form $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda z$ bringen und sind eingehend von Herrn **Moutard** behandelt worden. Bei ihnen kann die Reihe der **Laplace**'schen Gleichungen nicht in nur einem Sinne enden und man kann nun alle Gleichungen der betrachteten Form finden, für welche die Methode von **Laplace** das

allgemeine Integral giebt. Die Moutard'schen Untersuchungen werden zum Schluss noch vervollständigt.

Sodann wird das allgemeine Problem behandelt, aus einer Reihe linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung eine Reihe von Gleichungen von derselben Form und derselben Ordnung zu erhalten, welche man integriren kann, wenn sich die ursprüngliche Gleichung integriren lässt. Es wird eine Methode gefunden, von welcher die Transformation von Laplace ein besonderer Fall ist. Den Schluss der rein analytischen Behandlung der Differentialgleichungen macht die Behandlung der vom Verfasser harmonisch genannten Gleichungen, welche die Form:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = [\varphi(x+y) - \psi(x-y)]z$$

haben, wo $\varphi$ und $\psi$ zwei beliebige Functionen bezeichnen. Sie haben die Eigenschaft, unendlich viele particuläre Lösungen von der Form

$$f(x+y) f_1(x-y)$$

(harmonische Lösungen) zu besitzen und zwar haben sie eine unbegrenzte Zahl von Gruppen zu je vier Lösungen, die einer homogenen Gleichung zweiten Grades mit constanten Coefficienten genügen. Auf die Lösung

$$w = f(x+y) f_1(x-y)$$

wird die Moutard'sche Methode angewendet und untersucht, was aus den homogenen Lösungen der ursprünglichen Gleichung wird. Aus jeder harmonischen Gleichung lässt sich eine unbegrenzte Zahl harmonischer Gleichungen ableiten, die sich integriren lassen, wenn sich die ursprüngliche Gleichung integriren lässt, und kennt man die harmonischen Lösungen der ersten Gleichung, so kann man daraus ohne Integration auch die harmonischen Lösungen aller anderen ableiten. Auch durch andere Methoden ergiebt sich das gleiche Resultat. Die Untersuchung, wann eine Gleichung zweiter Ordnung, deren Invarianten gleich sind, eine harmonische ist, ergiebt sich als gleich mit der, zu erkennen, ob das Linienelement einer Fläche auf die Liouville'sche Form

$$ds^2 = [\varphi(u) - \psi(v)](du^2 + dv^2)$$

gebracht werden kann. Bei der Behandlung dieser Frage zeigt sich, dass wenn sich eine Gleichung auf zwei verschiedene Weisen in die harmonische Form bringen lässt, so kann es auf unendlich viel verschiedene Weisen geschehen. Als Anwendung wird die Euler'sche Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{m(1-m)}{(x-y)^2}$$

eingehend besprochen und transformirt, und es ergeben die Berechnungen zugleich die Lösung der Aufgabe: Das Linienelement einer Kugel auf die Liouville'sche Form zu bringen. — Es werden dann einige Aufgaben angegeben, die noch einer Bearbeitung harren.

Damit schliesst der rein analytische Theil, und es werden sogleich einige einfache Resultate gegeben, die gewissermassen die geometrische Interpretation der gefundenen analytischen Sätze sind. So werden alle Flächen gesucht, auf welchen die Abwickelbaren einer gegebenen Congruenz ein conjugirtes System bilden; es zeigt sich, dass die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung die Lösung dieses Problems für unendlich viele geradlinige Congruenzen liefert. Die Aufgabe wird dann umgekehrt, und es werden die geradlinigen Congruenzen gesucht, deren abwickelbare Flächen eine Fläche längs eines gegebenen conjugirten Netzes schneiden, und zwar wird die Lösung sowohl für Punkt-, wie für Ebenen-Coordinaten durchgeführt. Aus der Lösung dieser beiden Fragen ergiebt sich dann die der wichtigeren, alle Flächen zu finden, die von den Abwickelbaren einer (unbekannten) geradlinigen Congruenz in einem conjugirten Systeme geschnitten werden, wenn die Congruenz die Bedingung erfüllt, eine gegebene Fläche in einem gegebenen conjugirten Systeme zu schneiden. Davon werden wichtige Anwendungen und Sätze abgeleitet, unter Anderem: Wenn man auf zwei Flächen $S$ und $S_1$ parallele Tangentialebenen hat, so erzeugt die Verbindungsgerade entsprechender Punkte eine Congruenz, deren abwickelbare Flächen auf $S$ und $S_1$ ein conjugirtes Netz ausschneiden. Dieser Satz wird angewendet zur Lösung der Christoffel-schen Frage, alle Flächen aufzusuchen, in welchen die Beziehung durch parallele Tangentialebenen zwischen zwei Flächen auf der einen ein conformes Bild der anderen giebt, und führt dadurch zu dem Problem der Aufsuchung der Flächen mit isothermen Krümmungslinien oder isothermischen Flächen, wie sie der Verfasser nennt. Aus einer isothermischen Fläche kann man unendlich viele andere erhalten, indem man abwechselnd durch Inversion und durch die Christoffel'sche Methode zu neuen Flächen übergeht. Neben der Weingarten'schen Differentialgleichung, die die isothermischen Flächen bestimmt, wird auch die aufgestellt, der die pentasphärischen Coordinaten genügen müssen.

Es folgt nun die Behandlung der orthogonalen Trajectorien einer Familie von Flächen, wo die Aufsuchung der Bedingung den Ausgangspunkt bildet, unter welcher die Curven einer Congruenz der angegebenen Anforderung genügen. Von dem allgemeinen Fall der krummlinigen Congruenzen wird eine grössere Zahl von Sätzen abgeleitet und dann zu dem specielleren der Normalen einer Fläche übergegangen. Unter gewissen Bedingungen ist diese Congruenz von Normalen zugleich normal zu einer anderen Fläche und unter anderen zu einer Schaar von Flächen. Die erhaltenen Sätze werden auch auf das Gebiet der Optik übertragen und unter anderen wird der Gergonne'sche Satz bewiesen.

Die Betrachtung der Flächen, deren Hauptnormalebenen conjugirt sind in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades, führt zu der Liouville-

schen Fläche, deren Krümmungsmittelpunkte auf zwei confocalen Flächen zweiten Grades liegen und die definirt ist durch die Gleichung:

$$\Sigma \int_{h_i}^{\varrho_i} \sqrt{\frac{(\varrho_i - \alpha)(\varrho_i - \beta)}{f(\varrho_i)}}\, d\varrho_i = F(\alpha, \beta),$$

wo $F(\alpha, \beta)$ eine beliebige Lösung der linearen Gleichung

$$(\alpha - \beta)\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \beta}\right)$$

ist. Auf einfache Weise werden dadurch die geodätischen Linien eines Ellipsoids bestimmt. Die Eigenschaften der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden nun auch angewendet auf gewisse besondere Congruenzen höherer Grade und diese dann dahin specialisirt, dass die Curven der Congruenz Kreise sind. Eingehende Betrachtung wird den schönen Untersuchungen des Herrn Ribaucour geschenkt, dessen cyklische Systeme eine sehr wichtige Rolle in der Theorie der Flächen constanter Krümmung spielen.

Das fünfte Buch beschäftigt sich mit den auf den Flächen gelegenen Linien und besonders den geodätischen Linien, deren Studium später im dritten Bande fortgesetzt wird, und es werden dazu besonders die Codazzischen Formeln angewendet.

Die ersten Capitel dieses Buches geben, anknüpfend an die kinematischen Betrachtungen am Eingange des Werkes, die allgemeinen Bewegungsgleichungen des Trieders, dessen Spitze die Fläche beschreibt, die Gleichungen der verschiedenen Liniensysteme, der Krümmungsradien, der mittleren und totalen Krümmung für verschiedene Coordinaten-Systeme und am Ende des zweiten Capitels werden die Resultate tabellarisch zusammengestellt. Bei der Ableitung dieser Gleichungen ergiebt sich unmittelbar eine Reihe bekannter Sätze über die genannten Grössen. Von den erhaltenen Formeln werden zunächst die einem genaueren Studium unterzogen, die die Krümmung und die Torsion von Linien liefern, die auf einer Fläche gezogen sind, und auch die von Herrn Bonnet sogenannte geodätische Torsion, die Torsion der eine Curve auf der Fläche in einem Punkte berührenden geodätischen Linie wird eingeführt. Darauf beginnt die sehr eingehende Behandlung der geodätischen Linien, die einen grossen Theil des Werkes einnimmt (II, 402—511; III, 1—192).

Nachdem verschiedene Formen der Differentialgleichung der geodätischen Linien aufgestellt sind, werden die Sätze von Gauss über diese Linien abgeleitet, sowie die verschiedenen Erzeugungsweisen angegeben. Von den confocalen geodätischen Ellipsen und Hyperbeln wird der Weingarten'sche Satz abgeleitet und auf zwei Arten bewiesen. Dann wird der Differentialparameter erster Ordnung Beltrami's ($\Delta\Theta$) eingeführt und gezeigt, dass jede

Function, deren Parameter gleich 1 ist, eine Schaar von parallelen Curven (orthogonalen Trajectorien einer Schaar von geodätischen Linien) erkennen lässt und dass, wenn eine Lösung von $\Delta\Theta = 1$ eine willkürliche Constante enthält, man die geodätischen Linien der Fläche bestimmen kann. Aus der Betrachtung des Differentialparameters ergiebt sich eine Reihe von Sätzen, unter anderen der wichtige von Jacobi: „Wenn man ein erstes Integral der Differentialgleichung der geodätischen Linien kennt, so kann man die Gleichung dieser Linien in bestimmter Form durch eine einfache Quadratur erhalten.“ Zum Schluss werden noch die geodätischen Linien mit Hilfe der Variationsrechnung bestimmt.

Die letzten Capitel dieses Bandes handeln von den Beziehungen zwischen der Theorie der geodätischen Linien und den Problemen der Dynamik, zwischen den Gauss'schen Methoden beim Studium der geodätischen Linien und denen, welche Jacobi später auf die Probleme der analytischen Mechanik angewendet hat. Der Verfasser hat so „das Interesse klargelegt, welches die schönen Entdeckungen Jacobi's verdienen, wenn man sie unter speciell geometrischem Gesichtspunkte betrachtet“. Es wird dabei die Bewegung in der Ebene und auf krummen Flächen behandelt, nach Aufstellung der Jacobi'schen Differentialgleichungen das Princip der kleinsten Wirkung, sowie das Hamilton'sche Princip direct durch eine Methode abgeleitet, die der Theorie der geodätischen Linien entnommen ist und eine grosse Zahl von Sätzen entwickelt über die Bahnen eines beweglichen Punktes. Die Methoden, welche dabei angewendet sind, werden in dem letzten Capitel auch auf das allgemeine Problem der Dynamik ausgedehnt.

---

Vom dritten Theile sind bis jetzt nur zwei Bücher (S. 1—444) erschienen, von denen das erste sich noch mit den geodätischen Linien und der geodätischen Krümmung beschäftigt.

Im ersten Capitel desselben werden nach der Jacobi'schen Methode die geodätischen Linien auf gewissen Flächen bestimmt und untersucht, wann eine Fläche nur geschlossene geodätische Linien enthält. Bei der Bestimmung der geodätischen Linien der Rotationsflächen ergiebt sich zugleich, dass die einzigen Rotationsflächen mit Aequator, welche nur geschlossene geodätische Linien besitzen, die Kugel und die auf sie so abwickelbaren Flächen sind, dass jedem Punkte der einen Fläche Punkte der anderen in begrenzter Zahl entsprechen. Auch auf den Flächen, deren Linienelement zurückführbar ist auf die Liouville'sche Form

$$ds^2 = (U - V)(U_1^2 du^2 + V_1^2 dv^2)$$

und von welchen das Ellipsoid ein specieller Fall ist, werden die geodätischen Linien durch einen Kunstgriff gefunden und es wird der Dini'sche Satz bewiesen, dass die Coordinatencurven auf ihnen ein isothermes Netz von geodätischen

Ellipsen und Hyperbeln bilden. Einige Sätze von Graves und Herrn Chasles über Polygone, deren Seiten geodätische Linien auf Flächen sind, werden erweitert.

Da der erwähnte Kunstgriff sich nur sehr schwer ausdehnen lässt, kommt der Verfasser auf die allgemeine Theorie zurück und behandelt die schon im vorigen Bande abgeleitete Gleichung $\Delta\Theta = 1$. Dieselbe wird auf ein canonisches System gebracht und gezeigt, welchen Gebrauch man davon machen kann, wenn man ein oder zwei Integrale kennt. Es werden nun, weil eine allgemeine Integration der Gleichung $\Delta\Theta = 1$ nicht durchführbar ist, verschiedene allgemeine Formen des Integrals als bekannt vorausgesetzt und das Linienelement wird dann durch die Bedingung bestimmt, dass diese Formen zu einer vollständigen Lösung des Problems führen können. Es werden die algebraischen und ganzen homogenen ersten Integrale gesucht (homogen in den ersten Ableitungen $p$ und $q$). Für ein homogenes erstes Integral ersten Grades erhält man die Rotationsflächen und ihre Biegungsflächen, für ein solches zweiten Grades giebt es zwei verschiedene Formen des Linienelementes. Für den ersten und wichtigsten Fall ist es zurückführbar auf die Liouville'sche Form, für den anderen hat es die Form

$$ds^2 = 4(XY' + Y_1)dx\,dy,$$

der aber im Allgemeinen imaginäre Flächen oder bei reellen Flächen eine imaginäre Lösung liefert. Der Verfasser kommt dabei zurück auf die Frage, alle Flächen zu bestimmen, deren Linienelement sich auf zwei verschiedene Arten auf die Liouville'sche Form bringen lässt. Es ist das jetzt gleichbedeutend mit dem Problem: Alle Flächen zu suchen oder vielmehr alle Linienelemente, für welche das Problem der geodätischen Linien zwei verschiedene homogene Integrale zweiten Grades zulässt. Herr S. Lie hat eine Zahl von Lösungen dieses Problems gegeben, und der Verfasser führt es vollständig durch für den Fall, dass das eine Integral vom ersten, das andere vom zweiten Grade ist. Die erhaltenen Flächen sind auf Rotationsflächen abwickelbar. — Bei der Betrachtung der homogenen Integrale höheren Grades und bei Bruchintegralen hat sich die Eintheilung des Herrn Maurice Lévy bewährt nach der Zahl der linearen Factoren, in welche man sie zerlegen kann, so dass von den Functionen

$$\varphi(p, q, u, v) = \Theta(u, v)\prod_{i=1}^{i=n}(p - \alpha_i q)^{a_i}$$

alle zu derselben Classe gehören, für welche $n$ dieselbe Zahl ist. Der Fall $n = 2$ wird allgemein durchgeführt; von $n = 3$ nur ein besonderer Fall.

Das nächste Capitel handelt von der geodätischen Abbildung zweier Flächen auf einander und zuerst wird der Beltrami'sche Satz abgeleitet, dass die einzigen Flächen, die sich so auf die Ebene abbilden lassen, dass

ihre geodätischen Linien den Geraden der Ebene entsprechen, die Flächen constanten Krümmungsmaasses sind. Es folgt dann die Lösung des Problems von Herrn Dini, die Paare von Flächen zu finden, welche man so auf einander abbilden kann, dass jeder geodätischen Linie der einen eine geodätische Linie der anderen entspricht. Das Linienelement der gesuchten Flächen lässt sich auf die Liouville'sche Form bringen. Der Beweis stützt sich auf den Satz des Herrn Tissot: Wenn sich zwei Flächen punktweise entsprechen, so giebt es auf jeder derselben ein orthogonales System und bei reellen Flächen im Allgemeinen (wenn die Abbildung nicht conform ist) nur eins, welchem auch auf der anderen Fläche ein orthogonales System entspricht.

Es wird dann die geodätische Linie betrachtet als kürzester Weg zwischen zwei Punkten, indem sie mit den unendlich benachbarten verglichen wird und gezeigt, wann die geodätische Linie aufhört, die kürzeste zu sein, was zur Definition der Curve um einen Punkt führt, an welcher die geodätische Linie aufhört, die kürzeste zu sein. Auch auf die Analogie der kürzesten Entfernung eines Punktes von einer Curve in der Ebene wird hingewiesen. Nur wenn die Fläche entgegengesetzt gerichtete Hauptkrümmungsradien hat, hört die geodätische Linie nie auf, die kürzeste zu sein, wenn man sie mit den unendlich benachbarten vergleicht. Wenn in allen Punkten einer geodätischen Linie das Product der Hauptkrümmungsradien grösser als $a^2$ ist, so ist die geodätische Linie kürzer als alle benachbarten in einem Intervalle wenigstens gleich $\pi a$ (Erweiterung eines Bonnet'schen Satzes). Bei der Aufsuchung des kürzesten Weges wird auch die reducirte Länge von Herrn Christoffel und die reducirte Distanz eingeführt.

Es folgt nun die Behandlung der geodätischen Krümmung von Curven auf Flächen, wo z. B. alle Flächen gesucht werden, deren Krümmungslinien constante geodätische Krümmung haben (analytisch zuerst von Herrn O. Bonnet, geometrisch von Herrn Ribaucour gelöst). Die einzigen Flächen dieser Art sind die Rotationsflächen, die Kegel, die Cylinder und die Flächen, die aus ihnen durch Inversion hervorgehen. Auf die Gleichung, die den Radius der geodätischen Krümmung giebt, wird der Green'sche Satz angewendet und dadurch eine Beziehung zwischen dem geodätischen Krümmungsradius und dem Krümmungsmaass gefunden. Sodann wird ein neuer Ausdruck der geodätischen Krümmung von Herrn Liouville abgeleitet durch Benutzung des geodätischen Contingenzwinkels, aus dem sich mehrere Sätze ergeben.

Besondere Beachtung finden die geodätischen Kreise, die Curven, deren geodätische Krümmung constant ist, von denen auch Perimeter-Aufgaben gelöst werden.

Den Schluss dieses Buches machen Untersuchungen über geodätische Dreiecke, von denen zuerst die Gauss'schen Sätze abgeleitet werden. Besonders interessant ist dann die durch die Arbeiten des Herren Christoffel veranlasste Aufsuchung der Flächen, für welche es unter den sechs Elementen eines geodätischen Dreiecks eine oder mehrere von einander unabhängige Relationen giebt. Je nachdem keine, eins, zwei oder drei Relationen vorhanden sind, gehören die Flächen zur ersten, zweiten, dritten oder vierten Classe, wobei natürlich alle auf einander abwickelbare Flächen zu derselben Classe gehören. Die dritte und vierte machen dabei nach den Untersuchungen des Herrn Weingarten nur eine Classe aus und umfassen die Flächen constanter Krümmung. Die zweite Klasse besteht aus den Rotationsflächen mit variabeler Krümmung (v. Mangoldt).

Das siebente Buch behandelt die Deformation der Flächen und geht von der Definition und Untersuchung der Differentialparameter erster Ordnung:

$$\Delta\varphi,\ \Delta(\varphi,\ \psi),\ \Theta(\varphi,\ \psi)$$

und der zweiter Ordnung $\Delta_2\varphi$ aus, die auf die Lösung einer grösseren Zahl von Aufgaben angewendet werden. Es erfolgt dann die Lösung des Fundamentalsatzes: Zu erkennen, ob zwei Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht, oder ob zwei Formen des Linienelementes einander äquivalent sind. Zunächst erkennt man, dass zwei Flächen gleicher constanter Krümmung immer auf einander abwickelbar sind und zwar auf unendlich viele Arten. Da man aber bei der befolgten Methode zur wirklichen Abwickelung die geodätischen Linien auf beiden Flächen kennen muss, was allgemein nur bei den Flächen vom constanten Krümmungsmaass 0 der Fall ist, so kann man sie bei den übrigen nicht allgemein vornehmen; es hängt das von der Integration einer Riccati'schen Gleichung ab. Ist die Krümmung variabel, so müssen doch die Krümmungsmaasse in entsprechenden Punkten gleich sein. Es wird da der specielle Fall behandelt, in welchem die Curven, auf welchen das Krümmungsmaass constant ist, einander parallel sind, und der noch speciellere, dass diese Curven eine isotherme Familie bilden. In diesem letzteren sind die Flächen auf unendlich viele Weisen abwickelbar auf Rotationsflächen, die überhaupt neben den Flächen constanter Krümmung die einzigen sind, die sich auf unendlich viel verschiedene Weisen auf eine Biegungsfläche abwickeln lassen. Nach Einführung der Gauss'schen Grössen $D$, $D'$, $D''$ und ihren Beziehungen zu den übrigen wird die Gleichung, die bei der Biegung identisch befriedigt werden muss,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

durch den einfachen Kunstgriff wesentlich vereinfacht, dass $ds^2$ transponirt wird und man dadurch das Linienelement einer Fläche erhält, deren Krümmung Null ist. Man erhält daraus eine Differentialgleichung für $z$. Auch durch

andere Methoden erhält man dieselbe Gleichung, wie die entsprechenden auch für andere Coordinatensysteme abgeleitet werden. Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung, von der das Problem der Biegung abhängt, liefern die Asymptotenlinien der gesuchten Fläche. Dieser Satz giebt Anlass zur Behandlung des Problems: Eine gegebene Fläche so zu deformiren, dass eine auf derselben gezeichnete Curve $\Gamma$ mit einer im Raume gegebenen $D$ zusammenfällt. Es kann dies stets dann geschehen, wenn die so aufgestellte Bedingung nicht die Folge nach sich zieht, dass die Curve nach der Biegung eine Asymptotenlinie sein würde, oder, anders ausgedrückt, wenn nicht die Krümmung in jedem Punkte von $D$ gleich ist der geodätischen Krümmung von $\Gamma$ in dem entsprechenden Punkte. Es werden daher die Bedingungen aufgestellt, denen die Grössen $E$, $F$, $G$ zu genügen haben, damit die Coordinatenlinien die Asymptotenlinien von einer der Flächen sind, die durch Biegung aus der gegebenen hervorgehen und mehrere darauf bezügliche Sätze bewiesen. Als Beispiel wird die Biegung der windschiefen Flächen eingehend durchgeführt, deren Strictionslinie einer genaueren Betrachtung unterzogen wird. Mannigfache Gelegenheit zum Studium der Deformation bietet die Beschäftigung mit den Flächen, deren Hauptkrümmungsradien Functionen von einander sind. Der Verfasser nennt dieselben Flächen $W$, augenscheinlich, wie aus dem Zusammenhange hervorgeht, nach dem Mathematiker, der sich am meisten mit ihnen erfolgreich beschäftigt hat, Herrn **Weingarten**, und der Referent möchte vorschlagen, sie kurz **Weingarten**'sche Flächen zu nennen. Die Aufsuchung aller **Weingarten**'schen Flächen lässt sich zurückführen auf die aller orthogonalen sphärischen Systeme, für welche das Linienelement der Kugel die Form:

$$d\sigma^2 = \alpha du^2 + \varphi(\alpha) dv^2$$

annimmt, wo $\alpha$ eine Hilfsvariabele bezeichnet. Die Eigenschaften dieser Flächen, von denen eine grosse Zahl von Herrn **Weingarten** angegeben ist, werden aufgesucht und nach einer Herleitung derjenigen der Flächen der Hauptkrümmungs-Mittelpunkte einer beliebigen Fläche auch die der **Weingarten**'schen näher untersucht und mehrere sehr interessante Eigenschaften von ihnen abgeleitet. Dann werden die Flächen constanten Krümmungsmaasses und die constanter mittlerer Krümmung betrachtet. Die Schwierigkeiten beim Studium dieser beiden Arten von Flächen sind die gleichen, da ja zu jeder Fläche mit dem constanten Krümmungsmaass $\frac{1}{a^2}$ zwei parallele Flächen mit der constanten mittleren Krümmung $\frac{1}{2a}$ gehören. Als Beispiel der Flächen constanter negativer Krümmung wird die pseudosphärische Fläche gewählt, auf die alle anderen abwickelbar sind und besonders die Abbildung derselben auf die Ebene behandelt. Der Verfasser kommt dann auch auf die nicht-euklidische Geometrie zu sprechen

und schliesst im letzten Capitel mit den Transformationen der Flächen constanter Krümmung der Herren Bianchi und Lie, durch die man aus einer Fläche dieser Art unendlich viele ableiten kann.

Vorstehende Besprechung kann freilich nur ein schwaches Bild von dem überaus reichen Inhalte des Werkes und der Eleganz in der Durchführung der Methoden geben; als ein besonderer Vorzug ist noch die genaue Literaturangabe zu rühmen, die überall ein Studium der Originalabhandlungen gestattet, in denen der betreffende Satz zum ersten Male aufgestellt ist. Vielleicht hätten beim Capitel über isotherme Flächen noch einige kürzere Abhandlungen von Herrn Cayley in den Philosophical transactions angegeben werden können. Ein tiefes Studium des Werkes wird gewiss zu vielen neuen Arbeiten Anlass geben, zu denen die Grundlage an vielen Stellen geliefert ist. Möge es uns recht bald vergönnt sein, auch das Erscheinen des Schlusses dieses trefflichen Werkes begrüssen zu können.

Willgrod.

---

# Bibliographie

vom 16. November 1893 bis 31. Januar 1894.

---

### Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaft. Mathem.-phys. Classe. 20. Bd. Leipzig, Hirzel. 21 Mk.

Sitzungsberichte der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaft. Mathem.-phys. Classe. 1893. II—VI. Ebendaselbst. 5 Mk.

Verhandlungen der Leop.-Carol. Akademie der Naturforscher. 59. und 60 Bd. Leipzig, Engelmann. 77 Mk.

Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaft. Mathem.-naturw. Classe, Abth. II a. 102. Bd., 5.—7. Heft. Wien, Tempsky. 9 Mk. 90 Pfg.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 28. Jahrgang. 3. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Astronomischer Kalender für 1894. Für Wien berechnet von der kaiserl. königl. Sternwarte. Neue Folge. 13. Jahrg. Wien, Gerold's S. 2 Mk.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1891. Beobachtungen der deutschen Seewarte. Herausgeg. v. deren Direction. Hamburg, Friederichsen. 13 Mk.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1892. Beobachtungen in Württemberg. Bearbeitet von L. Meyer. Stuttgart, Metzler. 3 Mk.

## Reine Mathematik.

HEINITZ, G., Elementare Berechnung der Zahl $\mu$, welche den quadratischen Restcharakter bestimmt (Diss.). Göttingen, Vandenhoek & Ruprecht. 1 Mk.

THOMPSON, H., Hyperelliptische Schnittsysteme und Zusammenordnung der algebraischen u. transc. Theta-Charakteristiken (Diss.). Ebendas. 2 Mk.

SPECKMANN, G., Beiträge z. Zahlenlehre. Oldenburg, Eschen & Fasting. 2 Mk.

MOLENBROCK, P., Anwendung der Quaternionen auf die Geometrie. Leiden, Brill. 7 Mk.

KILLING, W., Einführung in die Grundlagen der Geometrie. 1. Bd. Paderborn, Schöningh. 7 Mk.

HEILERMANN und DICKMANN, Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Algebra an höh. Schulen. 1. Bd. Essen, Baedeker. 2 Mk. 25 Pfg.

BUSSLER, F., Die Elemente der Mathematik, für Gymnasien bearbeitet. Zwei Theile. Dresden, Ehlermann. 3 Mk. 70 Pfg.

## Angewandte Mathematik.

THANNABAUR, J., Berechnung von Renten und Lebensversicherungen, durch Beispiele erläutert. Wien, Gräser. 3 Mk.

LINGG, F., Construction des Meridianquadranten auf dessen Sehne u. s. w. München, Piloty & Loehle. 10 Mk.

BERTHELOT, M., Praktische Anleitung zu thermochemischen Messungen. Uebersetzt von G. SIEBERT. Leipzig, Barth. 2 Mk.

## Physik und Meteorologie.

ARNDT, R., Kraft und Kräfte. Greifswald, Abel. 1 Mk. 50 Pfg.

BEYRICH, Stoff und Weltäther. Warmbrunn, Leipelt. 3 Mk.

HELLMANN, G., Schneekrystalle. Beobachtungen und Studien. Mit Lichtdrucken von photographischen Aufnahmen. Berlin, Mückenberger. 6 Mk.

MÜNCH, A., Ueber ein exactes Verfahren zur Ermittelung der Entzündungstemperatur brennbarer Gasgemische (Dissertation). Berlin, Friedländer & Sohn. 1 Mk.

PAULI, R., Bestimmung der Empfindlichkeitsconstanten eines Galvanometers mit astatischem Nadelpaar und aperiodischer Dämpfung (Dissertation). Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 3 Mk.

MAISS, E., Aufgaben über Elektricität und Magnetismus, für Mittel- und Gewerbeschulen. Wien, Pichler. 2 Mk. 40 Pfg.

Handbuch der Physik. 18. u. 19. Lieferung. Breslau, Trewendt. 7 Mk. 20 Pfg.

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Ueber die Wasseruhr und das Astrolabium des Arzachel.

Von

Dr. ARMIN WITTSTEIN.

Schluss.

### Das Astrolabium.

#### I.

War es im vorigen Abschnitte der Sage trügerischer Boden, der mir unsicheren Halt gewährte, so ist es in diesem ein durchaus realer, auf dem ich stehe. Musste ich dort, als Facit meiner Untersuchung, offen aussprechen, was ich längst geahnt, dass aus Gründen, deren innere Wahrscheinlichkeit der Evidenz sehr nahe kommen dürfte, wenigstens der Nimbus um Zarkâlî's Haupt in eitel' Dunst zerfliesst, mit dem ein noch im kindlichen Wahne der Thaumaturgie befangenes Zeitalter ihn bekränzte, — so kann ich hier gleich von vornherein erklären, dass das Zarcallicum an sich, als ein unzweideutig definirtes Beobachtungsinstrument des Mittelalters, kein Schleier verhüllt. Eben so wenig habe ich, hinsichtlich der Persönlichkeit des Verfertigers, die geringste Ursache Zweifel zu hegen; denn mehrere übereinstimmende Angaben lassen mir als völlig glaubwürdig erscheinen, dass es in der That von Zarkâlî erdacht war, vielleicht sogar zum ersten Male, da ich nämlich nirgends bemerkt (ja nicht einmal die Frage danach aufgeworfen) finde, dass schon vor ihm sich Jemand seiner Projections-Art zu gleichem Zwecke bedient hat. Nach ihm dagegen kann ich zwei Träger bekannter Namen anführen, die, wohl unabhängig von einander, für den Entwurf von Planisphärien dringend die Annahme des gleichen Projections-Centrums oder desselben Augenpunktes empfahlen; Regiomontanus[1]) in der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts und (der ältere) Gemma Frisius[2]) in der ersten Hälfte des 16. sind es, die ich

meine. Aber während sich Ersterer, oder vielmehr sein Schüler Schoener, dabei direct auf Arzachel bezieht, treffen wir bei Letzterem nur etwas wie eine dunkele Ahnung an, dass „schon Alles dagewesen“, wenn er sagt, dass zwar „die erste flüchtige Andeutung“ von seiner Methode oder dem Instrumente, welches er hier beschreibe, bereits längst vergangenen Zeiten, die klare und erschöpfende Art und Weise der Darstellung jedoch, die er davon gegeben, durchaus ihm angehöre: *Hoc igitur Analemma, haec inquam Sphaera plana omnium est commodissima atque universalissima, innumerabiles habens usus, ad omnem caeli inclinationem aequè accommoda. Inuentum vetus est quod ad ὑπογραφήν attinet, verum usus eius uberrimus, ac facillimus, nunc primum in lucem datur à nobis. Attigerunt quaedam problemata, Petrus Apianus in suo Caesareo Astronomico, ubi de Meteoroscopio agit, quod quidem quadrans est huius nostrae Sphaerae: & Orontius Finaeus Delphinas, qui & ipse quadrantem hinc abscidit. Sed optima quaeque, ut in progressu docebimus clarè, obmissa sunt, & magna cum difficultate illic traduuntur, quae hic summam habere facilitatem docebimus.*

Den Anhängern des Propheten nehme ich es nicht sehr übel, wenn sie, einem Sprachgebrauche folgend, in unserem Sinne für das „Instrument“ des Zarḳâlî keine recht charakteristische, sein Wesen treffende Bezeichnung haben, aber abendländische Schriftsteller sollten jede Unbestimmtheit vermeiden, bei der man nur auf die Vermuthung kommt, es habe „wohl zur rechten Zeit ein Wort sich eingestellt“. Die meisten orientalischen Berichterstatter, ja gerade diejenigen, welche nicht blos oberflächlich darüber hinweggleiten, nennen es nämlich kurzweg eine صَفِيحَةٌ ṣafîḥa (Pl. صَفَائِحُ), oder dünne metallene Scheibe (tympanum), als ob im Arabischen der terminus technicus أَسْطُرْلَابُ asṭerlâb für Astrolabium, von dem die Ṣafîḥa (die überdiess meistens in der Mehrzahl auftritt) immerhin nur einen Theil, obschon einen sehr wesentlichen, bildet, gar nicht vorhanden wäre. Weit entfernt davon, in solchem Irrthum bestärken zu wollen, — haben sie doch sogar einigen Astronomen, ihrer Eigenschaft als Verfertiger von Astrolabien halber, den Ehrennamen الاسطرلابى ṣaṭerlâbî beigelegt! — beabsichtigten die Araber mit jener (nicht sehr glücklich gewählten) Bezeichnung nur ein unterscheidendes Merkmal von anderen Astrolabien einzuführen, deren sie sehr verschiedenartige besassen[2], darunter auch ein ganz interessantes sphärisches (الاسطرلاب الاكرى).

Von solchen dünnen Metall-Scheiben ist in der Regel mehr als ein halbes Dutzend in der Vertiefung *(mater astrolabii)* der Vorderseite des Astrolabiums untergebracht; sie liegen über einander und werden, gleich dem zu oberst befindlichen, sehr zierlich gearbeiteten „Netz“ oder rete (عنكبوت ʿankabût, Spinne), über einen centralen Bolzen geschoben, zu

welchem Zwecke Scheiben und Netz in der Mitte genau gleich grosse, kreisförmige Oeffnungen haben. Ein Querriegel durch das eine Ende des Bolzens hält die ganze Gesellschaft zusammen. Das rete ist für sich vollkommen um die Achse des Astrolabiums (jenen Bolzen) drehbar, die Scheiben hindert eine Sperr-Vorrichtung, an dieser Drehung Theil zu nehmen. Eine jede Scheibe enthält, selbstverständlich für eine gegebene Polhöhe, stereographische Projectionen der hauptsächlichsten Kreise der Himmelskugel, dabei, wie wohl in den allermeisten Fällen, das Auge im Südpol der Sphäre und als Projectionsebene die Tangentialebene im Nordpol angenommen, so dass die Projectionen von Aequator und den beiden Wendekreisen als drei concentrische Kreise erscheinen. Auf jeder der beiden Seiten einer jeden Scheibe findet sich, neben der Bezeichnung des Ortes, für den sie gilt, noch die demselben entsprechende Dauer des längsten Tages in Aequinoctialstunden angegeben. Auf dem rete präsentiren sich, in gleicher Projection, die Ekliptik und eine Anzahl der hellsten Sterne; die Projection der Ekliptik würde, falls sie auf einer Scheibe verzeichnet wäre, ein beide Wendekreise ungleichartig berührender Kreis sein. Das Ganze ist somit das, was man unter einem „Planisphärium" versteht, d. h. eine Vorstellung des gestirnten Himmels und seiner Kreise auf einer Ebene, in der mittelst dieser Projectionen die Aufgaben der sphärischen Astronomie, als da sind: zu finden die Morgen- und Abendweite, Höhen, Auf- und Untergänge u. s. w. — einstens gelöst wurden. Ausser den Almukantaraten, Verticalen, Wendekreisen, dem Aequator, den von einem Tage zum anderen veränderlichen Zeitstunden etc., sind die Zeiten der Morgen- und Abenddämmerung, die Linie des wahren Mittages (الزوال zawâl) und endlich die Curven für den العصر ʿAṣr und الظهر Ẓohr auf den Scheiben eingravirt. Ẓohr reicht vom wahren Mittage bis zum Anfange des ʿAṣr, der selbst wieder mit den Sonnenhöhen $\eta$ und $\eta'$ beginnt und endigt, die durch die Formeln

$$cotg\, \eta = cotg\, H + cotg\, 45^{0},$$
$$cotg\, \eta' = cotg\, H + 2 \,.\, cotg\, 45^{0}$$

bestimmt werden, in denen $H$ die Mittagshöhe der Sonne bedeutet. Am Anfange und Ende des ʿAṣr, sowie zu den Zeiten der Morgen- und Abenddämmerung und des Sonnen-Unterganges, sind die fünf vom Islâm vorgeschriebenen Gebete zu verrichten.

Für Leser, die nicht selbst schon lange mit dem Gegenstande vertraut waren, glaube ich, im Voraufgehenden ausführlich genug geschildert zu haben, wie man den Begriff „Ṣafîḥa", als proprium astrolabii, aufzufassen hat. Noch länger im Allgemeinen bei diesem alten Hilfsmittel der Beobachtung zu verweilen, wäre nur ermüdend und nicht zu rechtfertigen. Für weitergehende Ansprüche und zur Gewinnung gründlicher

Einsicht in seine Handhabung verweise ich in erster Linie auf die lichtvolle Abhandlung von F. Woepcke[4]), die sich in der eingehendsten Weise mit einem arabischen Astrolabium aus dem Jahre 1029 beschäftigt, das zu Toledo angefertigt und vielleicht noch dem Zarkâlî bekannt war; hinsichtlich der geschichtlichen Entwickelung nenne ich, neben dem L. Am. Sédillot's, noch das Werk von Morley[5]). Des letzteren Hauptinhalt bildet die Beschreibung eines im Jahre 1712 (August bis September) zu Iṣfahân (?) von ʿAbd al-ʿAlî ibn Muḥammed Rafîʿ al-Ǵuzʾî construirten Astrolabiums; es ist von Messing, mit Goldfarbe überzogen und hat einen Durchmesser von etwa 40,5 cm. Hieran reihen sich noch andere arabische, sowie persische, indische (mit Devanâgarî-Schrift) und endlich zwei englische Astrolabien aus den Jahren 1340 und 1342; ein drittes englisches, vom Jahre 1574 und „von der gewöhnlichen Art dieser Instrumente völlig verschieden", wird nur mit wenigen Worten bedacht. Von Arzachel, der um das Jahr 1180 (!) in Spanien gelebt haben soll, und seinem Astrolabium berichtet gleichfalls nur eine ganz kurze Notiz. Als Schluss ist eine Literatur-Uebersicht beigegeben, die, soweit ich ein Urtheil darüber habe, recht vollständig zu sein scheint, doch fehlen darin die beiden Schoener'schen Schriften, aus denen ich in der ersten Anmerkung zu diesem Abschnitte Einiges mitgetheilt habe.

Derselbe Constructeur, von dem das in der dritten Anmerkung erwähnte Astrolabium herrührt, hat im Jahre 1218 ein Zarcallicum verfertigt, welches Jomard für das Karten-Dépôt der Pariser Bibliothek acquirirt hatte, und das damals noch in sehr gutem Zustande war. Es trägt die Inschrift:

صنع هاذه الصفيحة محمد بن فتوح
الخمايرى بمدينة اشبيلية عمرها الله
فى سنة خيه الهجرة.

„Verfertigt hat diese Scheibe Muhammed ben Fatûḥ al-Ḫamâïry in der Stadt Sevilla, Gott mache sie blühend!, im Jahre 615 der Flucht."

Sédillot überlässt es Jomard, eine ausführliche Beschreibung davon zu geben, und wiederholt bei dieser Gelegenheit nur einen Satz, den er schon einige Male und fast mit denselben Worten ausgesprochen hat: On voit par cet instrument qu' Arzachel faisait tourner le centre de l'excentrique dans un petit cercle pour expliquer la différence qu'il trouvait entre l'excentricité du soleil et celle qu'indique Albatégni. Dann aber theilt er mehrere Abschnitte aus dem lateinischen Manuscript Nr. 7195 d. Par. Bibl. mit, das, wie er sagt, die Uebersetzung eines von Zarkâlî selbst herrührenden Schriftstückes über seine Erfindung enthält. Nachstehendes sei, unter Beschränkung auf das Allernöthigste, daraus excerpirt:

*Incipit compositio tabulae quae Saphea dicitur sive astrolabium Arzachelis. — Siderei motus et effectus motuum speculator et duplex* [illegible]

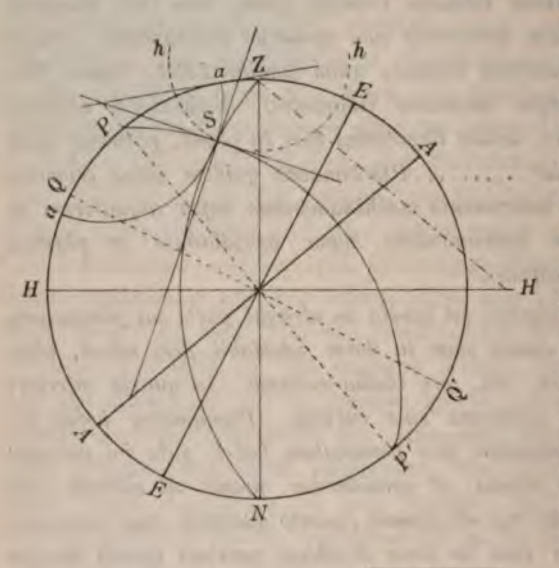
*Ptholomaeus, inter caetera sui ingenia, astrolabium edidit et unicuique climatum propriam tabulam deputavit, quas omnes Arzachel Tholetanus, admirabilis inventor, in unam tabulam reduxit, quae, cum (sit) universis terris communis, Astrolabium universale non immerito nuncupatur. Cujus rei scientia usque ad hoc nostrum tempus, anno domini 1231, omnes fere modo nos latuit; viam itaque inventoris (imitantes), distinctiones ejusdem instrumenti primo in corpore, dehinc lineationes ejus in plano, postremo opus et utilitates ejus enodabimus .......... Ptholomaeus quidem istius scientiae fundamentum suum de hoc instrumento machinamentum super aequatorem in planum convertit. Hocque instrumentum super meridianum in planum componitur; et hoc est de corpore.*

*....... Habita itaque lamina vel tabula in utraque parte sui planissima, in una ejus planitie fiant omnia quae in dorso astrolabii fieri solent, videlicet limbus et alia sequentia, vel, pro taedio evitando, in quarta inferiori quae est a dextris linetur quadrans sine cursore. Designantur horae (e) contrario ei quadranti qui annulum sive pendiculum habet, quia ibi movetur instrumentum, hic movetur regula, et consideretur quanta sit altitudo solis meridiana; numera in regione tua vel climate (quarto quantam quia) commune est omnibus terris, et nota eam in linea dividente quartam circuli ductam per medium, et secundum portionem ejus superiorem, versus centrum fiat quadratum orthogonium, secundum doctrinam Ptholomaei. Deinde lineentur horae secundum doctrinam datam de quadrante, tamen, ut dixi, e contrario ei quadranti qui movetur, et sistant omnes ad contactum orthogonii; et dividantur (latera) orthogonii in 12 puncta sicut in astrolabio fiunt, sicut etiam patet in subscripta figura. Deinde fiat regula cum pinnulis et clavus regulam tabulae conjungens; similiter et armilla, sicut in astrolabio fieri solet, et hoc in exteriori planitie opus complebitur.*

*....... Sequitur de horizonte obliquo* [wahrer Horizont]. — *Ad ultimum horizon hoc modo fiat; enumeretur latitudo regionis $AC$ versus $A$, et ibidem fiat minutissimum foramen et similiter in ejus opposito. Deinde filum sericum bene extensum et bene firmatum in praedictis punctis colloces, et sicut variantur latitudines regionum, sic variabitur fili positio; et haec de compositione astrolabii universalis dicta sufficiunt*[6]).

Der Gedanke, von dem Zarḳâlî bei der Construction seines, im Princip höchst einfachen Astrolabiums ausging, war also der, dass er das Auge in den Ost- oder Westpunkt des Horizontes und zugleich in einen der Aequinoctialpunkte setzte; die Projectionsebene bildeten dann der Meridian (der für den Nullpunkt der Stundenwinkel) und der damit zusammenfallende Colur der Solstitien. Diese Projectionsebene passirt die Sonne am ersten Frühlingstage in der Höhe des Aequators, nahe um $0^h$ Sternzeit; ihr Auf- und Untergang an jenem Tage erfolgte im Ost- und Westpunkte.

Wie die Bilder der hauptsächlichsten Kreise der Himmelskugel durch eine solche Projections-Methode erhalten werden, zeigt nebenstehende Figur. Es bedeuten darin $AA$ den Aequator mit seiner Achse $PP'$, $EE$ die Ekliptik mit ihrer Achse $QQ'$, $HH$ den Horizont für die Polhöhe von Toledo mit seiner Achse (Zenith, Nadir) $ZN$, $S$ einen Stern, in welchem sich der zugehörige Declinations- und Parallelkreis (wie angedeutet) rechtwinkelig schneiden; endlich ist für $S$ der Höhenkreis $ZSN$ und Almukantarat $hh$ angegeben, die sich gleichfalls unter rechtem Winkel treffen müssen.




---

**Anmerkungen.**

1) 1. Problemata XXIX Saphaeae Nobilis Instrumenti Astronomici, ab Joanne de Monteregio Mathematicorum omnium facile principe conscripta. Anno M.D.XXXIIII. Ohne Ort. 26 Quartseiten ohne Paginirung, herausgegeb. von Schoener.

S. 5. *Saphaea jam pridem vocata creditur, sive quasi sphaera per elisionem penultimi elementi, ultimique ingeminationem: sive à graeco epitheto σαφὲς [σαφής], quod Latini manifestum dicunt.* — Eine eigenthümliche Etymologie von Safiha! Unmittelbar darauf heisst es: „Mit Hülfe eines solchen Instrumentes lassen sich nun, eben so leicht wie genau, so ziemlich alle diejenigen Aufgaben zu klarer Anschauung bringen und lösen, wozu sonst eine künstliche Himmelskugel gebraucht wird, die aber in ihrer Handhabung ungleich schwieriger und complicirter ist. Es liegt ihm eine gewisse, höchst merkwürdige Art von Projection der Himmelskugel auf eine Ebene zu Grunde, bei der das Auge auf dem Aequator angenommen ist, und deren Kreise und gerade Linien dann alles Abzubildende unzweideutig, klar und völlig wie in der Natur darstellen. Dazu kommt noch, dass ein und derselbe Kreis dieses Planisphäriums in der Regel vielerlei Zwecken dient, wie wir später oft genug sehen werden, wenn wir zu den einzelnen Aufgaben übergehen .......... Da die ganze Vorrichtung fast wie ein gewöhnliches Astrolabium aussieht, so werden wir uns, insofern wir Veranlassung haben sollten, von Theilen zu sprechen, die beiden gemeinschaftlich sind, mit Recht der für letzteres geltenden Bezeichnungsweise bedienen. So nennen wir „Rücken" der Saphaea diejenige Seite, auf der man viele concentrische, gleich weit von einander abstehende Kreise erblickt, dagegen „Vorderseite" die Ansicht derselben, auf der ein Gewirr von Kreislinien erscheint, die in je zwei entgegengesetzten Polen endigen und hierin, gleichsam wie in Knoten, zusammengeschnürt werden".

2. Sapheae Recentiores Doctrinae Patris Abrusahk Azarchelis Summi Astronomi, A Joanne Schonero Carolostadio Germano, Innumeris in locis emendatae correctis errorib. eius qui ex Arabico convertit, in lucem foelici Sydere prodeunt. M.D.XXXIIII. 26 nicht paginirte Quartseiten Am Schlusse: Norimberge excusum. Anno gratiae. 1534.

S. 2 bis 3. *Sapheae duae sunt partes principales. Una dicta facies, altera vero postica sive dorsum Sapheae nuncupari demeruit. Huius etenim Sapheae facies, limbo graduum 360 circumambitur, adnotatis numeris suis, a duabus literis A scilicet & B de 10 in 10 defluentibus, utrique tamen ad literas G & D scandendo in 90. concurrentes, Hi sunt numeri & gradus revolutionum sive parallelorum ab aequatore lateraliter declinantes. Est autem linea AB media revolutionum pro circulo aequinoctiali in hoc opere sita. Post limbum ab intra in modica distantia supremus integer Ascensionum circulus: qui etiam hora 12. notat. Meridianus dicitur. Huic succedunt reliqui Ascensionum rectarum circuli,* etc. Es folgen die Gerade, welche die Ekliptik mit den zwölf Zeichen enthält, „hier und da zerstreute Fixstern-Scheibchen" und eine um den Mittelpunkt (centralen Zapfen) drehbare Regel aus Metall, die an Stelle des wahren Horizontes, der selbst wieder (wie oben) durch einen dünnen Seidenfaden markirt wird, die ganze facies des Instrumentes durchlaufen kann. „Der Rücken weist, ausser allen Theilen und Kreisen des Dorsums eines Astrolabiums, noch einen besonderen Kreis auf, den man Aszimuth nennt, und der die Verticalen enthält. In seiner Mitte befindet sich ein Index der Linie des magnetischen Meridians, daselbst ein Metallstift: index Aszimuth Solis."

2) Gemmae Frisii Medici Ac Mathematici De Astrolabo Catholico Liber quo latissime patentis Instrumenti multiplex usus explicatur, & quicquid uspiam rerum Mathematicarum tradi possit continetur. Antuerpiae, M.D.LVI. Kl. 8°.

Der Liberalität des Herrn Dr. G. Laubmann, Directors der Königl. Bayer. Hof- und Staats-Bibliothek zu München, verdanke ich meine Kenntniss dieses Werkes.

Ueber das Planisphärium des Ptolemaeus sagt der Verfasser (Fol. 6 recto): *Cuius quidem inuentor quis fuerit, hactenus quidem ignorare me fateor, quanquàm sciam Ptolomaeo à nonnullis adscribi, inter quos & Joannes Stoflerus est qui & compositionem & usum eius docet ex professo ........... Sed dicatur etiam per excellentiam Astrolabum siue Astrolabium, de nomine non est certandum.*

Der Beschreibung des „Astrolabum Catholicum" (von Fol. 8 an) entnehme ich folgende Sätze: *Astrolabum nostrum Sphaera item plana est, ex visus defluxu similiter ut praecedens descripta. Verum eo solum differt, quòd oculus non in polo, sed in Aequinoctiali constituitur, atque ita oppositum oculo hemisphaerium in planum per centrum extensum, oculóque ad perpendiculum obiectum visu describitur. Accipimus autem in hunc usum sphaeram quae contineat Meridianos quotcunque poterit pro magnitudine proposita, similiter & circulos parallelos ipsi Aequatori quotcunque poterit, atque illos in planum sic deducimus.* (Folgt eine Figur, die weggelassen werden kann.) *Sit igitur colurus aequinoctiorum $\alpha\beta\gamma\delta$, Cuius polus sit Boreus $\beta$, Austrinus $\delta$, Centrum $\varepsilon$, Punctum occasus in quo oculum statuimus siue τῆς ὄψεως centrum. Planum intelligitur circulus per centrum mundi $\varepsilon$ transiens quod sit idem cum Coluro Solstitiorum ut Sphaerae ratio postulat. Communis intersectio duarum dictarum superficierum erit $\beta\delta$ linea. Igitur ex $\alpha$ oculi centro partes $\beta\gamma\delta$ hemicyclii ducantur ad lineam $\beta\delta$. Et quoniam Meridianus Colurus Aequinoctialis atque ut uno verbo explicem, circuli maiores omnes aequales habent partes similis rationis, diameter aequinoctialis ex transuerso oculo obiectus per*

*partes aequatoris obiectas oculo, eodem prorsus modo secatur. Unde sicut $\beta\delta$ linea secta est in partes, ita in similes prorsus secabitur $\alpha\gamma$ linea quae Aequatoris uicem refert.* Dann weiter: „Vor Allem sind seine Vorder- und Rückseite als das Wesentlichste eines solchen Instrumentes zu betrachten. Erstere, die wir im weiteren Verlaufe die „allgemeine Tafel“ oder sein „Antlitz (facies)“ nennen wollen, enthält zunächst zwei Systeme von Kreisen, die sich in zwei Polen schneiden und die Declinations- oder Stundenkreise heissen, zu diesen kommen die dem Aequator parallelen hinzu, die zwar in der Projection nicht parallel erscheinen, am Himmel aber doch unter sich parallel sind. Sodann sind daselbst noch die Fixsterne, nach Längen und Breiten, angegeben; jedoch deren nicht zu viele, damit nicht durch sie die so sehr nöthigen Kreise undeutlich werden.“ .........„In der Mitte der facies ist eine drehbare Regel mit Läufer, die wir entweder einfach mit „Regel“ oder mit „Horizont“ bezeichnen, insofern sie nämlich sehr häufig die Stelle des Horizontes vertritt.“ — Doch, genug der Einzelnheiten! Sie zu vermehren, ohne gleichzeitig einen neuen Tractat über das Astrolabium im Allgemeinen zu liefern (das Einfachste wäre, irgend einen abzuschreiben), brächte nämlich nicht den geringsten Nutzen. — Zum Schlusse noch die Bemerkung, dass weder Gemma Frisius, noch Schoener, sich zur Entwickelung einer allgemeinen Theorie der stereographischen Projection erheben; die Schriften des Oronce Fine, von denen der Erstere spricht, sind betitelt: Quadrans astrolabicus, omnibus Europae regionibus inserviens (Paris, 1534), und De universali quadrante (Paris, 1550).

3) Eine grosse, augenblicklich im Journal Asiatique (Neuvième série, Tome premier; Paris, 1893) in der Publication begriffene Arbeit über ein, in seiner Art einziges, Astrolabium will ich hier nicht ganz mit Stillschweigen übergehen, obgleich sie mit der meinigen nichts Gemeinsames aufzuweisen hat; ihr Titel lautet: Sur une mère d'astrolabe arabe du XIII$^e$ siècle (609 de l'Hégire) portant un calendrier perpétuel avec correspondance musulmane et chrétienne. Traduction et interprétation par H. Sauvaire et J. de Rey Pailhade. Einer der beiden Verfasser erstand es 1873 zu Kairo. Es ist von Kupfer, lässt noch Spuren von Vergoldung erkennen und besitzt ein Gewicht von 300 Gramm; die Schriftzeichen darauf sind kufische. Sein Durchmesser, einschliesslich des 6 mm breiten, auf der „Mutter“ mittelst 14 kleiner Eisenstifte befestigten Limbus, beträgt 165 mm. Eine Inschrift besagt, dass „Muḥammed ben Fatûḥ al-Ḫamâïry es in der Stadt Sevilla im Jahre 609 verfertigt hat“, also ungefähr in der Mitte des Jahres 1212.

4) F. Woepcke, Ueber ein in der Königlichen Bibliothek zu Berlin befindliches arabisches Astrolabium. (Aus den Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1858.) Berlin, 1858; gr. 4°. Mit drei Kupfertafeln. — Durchweg afrikanische Schriftzeichen.

5) William H. Morley, Description of a planispheric astrolabe, constructed for Shāh Sultān Husain Safawī, king of Persia, and now preserved in the British Museum; comprising an account of the Astrolabe generally, with notes illustrative and explanatory: to which are added, concise notices of twelve other astrolabes, eastern and european, hitherto undescribed. London, 1856. Fol. max. III u. 49 S. mit 21 Figuren-Tafeln in Zinkplatten-Druck.

6) Ueber eine andere, im Manuscript (Cod. Pal. Vind. 5280) erhaltene, „lateinische Bearbeitung von Zarkali's Saphea, die unedirt und fast unbekannt ist“, berichtete Moritz Steinschneider vor drei Jahren (Bibliotheca mathematica, Zeitschrift für Geschichte der Mathematik, herausgegeben von

G. Eneström. Neue Folge. 4. Band. Berlin, Stockholm, Paris, 1890. gr. 8°). Sie ist im Jahre 1504 von einem gewissen Jacobus Lateranus verfasst, dessen Persönlichkeit sich vorläufig noch nicht näher feststellen liess. Herr Steinschneider kommt im Verlaufe der Mittheilung auf seine Études sur Zarkali zu sprechen, die er im 16. und 17. Bande des Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni (Roma, 1883 und 1884; gr. 4°) veröffentlicht hat, und deren erster (mir unbekannt gebliebener) Theil bereits im 14. Bande erschienen ist. Unter den, im 16. Bande angeführten, arabischen und hebräischen Handschriften, die sich mit Zarḳâlî beschäftigen, befindet sich die Leipziger, von der ich gleich sprechen werde, nicht.

Es ist nothwendig zu bemerken, dass ich diese ganze Anmerkung erst hinzugefügt habe, nachdem meine Arbeit völlig abgeschlossen und niedergeschrieben war; eine ärgerliche buchhändlerische Verschleppung trägt die Schuld daran, dass ich die Steinschneider'schen Publicationen so sehr verspätet zu Gesicht bekam. Eine Beeinflussung meiner Schrift durch letztere hat daher nicht im Geringsten stattfinden können.

---

## II.

Die „Refaïya“*, eine aus 487 Nummern bestehende, in einem besonderen Schranke der Leipziger Universitäts-Bibliothek verwahrte Sammlung arabischer Handschriften, in der alle möglichen Wissens-Gebiete vertreten sind, enthält auch zwei, die für den Astronomen Interesse haben. Beide sind vortrefflich erhalten, in Neschi (نَسْخِى, der am häufigsten in Manuscripten anzutreffenden Schreibweise) und, wenigstens im Anfange, ziemlich leserlich geschrieben; die diakritischen Punkte aber fehlen leider in beiden fast überall.

Der erste Codex (D.C. 115, 93 Blätter einer Art von Oel-Papier, je 24,0 × 13,5 cm im Geviert haltend) giebt einen Commentar (شرح تلخيص, etwa „Commentar, um klar zu machen“; beide Worte bedeuten, im Grunde genommen, dasselbe.) zu Al-Mulaḫḫiṣ fi'l-hai'a (الملخّص فى الهيئة „Das Ganze der Astronomie“) des Čaġmînî und ist von Ḳâḍîzâde verfasst. Unter dem Letzteren wird man vermuthlich den Aelteren dieses Namens (حسن چلبى صلاح الملّة والدين موسى المشتهر بقاضى زاده) zu verstehen haben, der ein Mitarbeiter des Uluġ Beg war, und von dem die Bibliothek zu St. Petersburg und die Bodleyana in Oxford, dem Titel nach, gleich lautende Commentare besitzen. Die, in

---

* Sie stammt aus Damaskus und bildete ursprünglich ein, von einem Angehörigen des Geschlechtes der Ref â'î gestiftetes, erbliches Familienvermächtniss (waḳf). Ende des Jahres 1853 wurde sie, durch Vermittelung des Consuls Dr. Wetzstein, ihrem damaligen Besitzer, 'Omar Efendi, von der Königl. Sächs. Staats-Regierung abgekauft.

der Handschrift vorkommenden Figuren ähneln in ihrer Ausführung denen unserer Schüler in den unteren Klassen und stellen der Geschicklichkeit des Verfassers oder Abschreibers im Zeichnen kein günstiges Zeugniss aus; die beigefügten Bezeichnungen, grössten Theils roth, sind meist schwer leserlich, weil sehr flüchtig geschrieben und stark verblasst. Das erste Blatt trägt die Abdrücke dreier Siegel (eines ovalen, rechteckigen und unregelmässig achteckigen); der erste und letzte ist fast völlig verwischt, und nur der des dritten lässt noch einige Züge erkennen, sowie auch die Worte über ihm deutlich zu lesen sind und aussagen, dass das Manuscript im Jahre 1148 (beg. 1735 Mai 11) in den Besitz des Siegel-Inhabers übergegangen sei. Die ausserordentlich feine Schrift auf dem rechteckigen Siegel ist ganz erhalten und liefert einen neuen Beweis für die Meisterschaft orientalischer Siegelstecher.

Der zweite Codex (D. C. 56, 90 Blätter eines sehr starken Holzpapieres, je 12,5 × 16,7 cm im Gev. halt.), ebenso wie der erste, von Einer Hand und gleichfalls gegen das Ende zu beträchtlich undeutlicher als anfangs geschrieben, zerfällt in zwei Handschriften, von denen die erste, aus zwei Theilen bestehende, 49 Blätter umfasst. Siegel oder Stempel fehlen, auch sind keine Figuren vorhanden, dagegen finden sich mehrfach Marginal-Noten von Interpreten. Sehr trägt zur Uebersichtlichkeit bei, dass الفصل durchweg roth geschrieben ist. Das الباب الأوّل der ersten Handschrift scheint nachträglich von einer anderen Hand hinzugefügt worden zu sein; denn weder liest man irgendwo الباب الثاني u. s. w., noch hat ihr zweiter Theil eine besondere Eintheilung in Abschnitte, sondern vielmehr eine fortlaufende, dem ersten sich anschliessende. Die zweite Handschrift aber kann füglich nicht als Fortsetzung der ersten angesehen werden; auf Folio 50 recto beginnend, „beschreibt sie die Art und Weise der Operation mit einem Astrolabium (كتاب يذكر فيه طريقة العمل بالاسطرلاب) und“, heisst es weiter, „berichtet hierüber in 96 Abschnitten.“ Die sich häufig bietende und benützte Gelegenheit zu einem Excurs auf das Gebiet der mathematischen Geographie und Astronomie bewirkt, dass die Schrift umfassender ist, als ihr Titel angiebt. An verschiedenen Stellen hebt der Verfasser Unterschiede zwischen den einzelnen Instrumenten hervor, indem er sagt: برسم في بعض الاسطرلابات „mit Bezeichnung auf einigen Astrolabien“. Wie von einer schweren Mühsal befreit, schliesst er aufathmend: تم القول في العمل بالاسطرلاب والحمد لله. Wer diesen zweiten Codex verfasst hat, und ob beide nur Copieen sind, weiss ich nicht; eben so wenig bin ich genug bewandert, um aus dem Schrift-Ductus oder sonstigen Anzeichen auf ihr Alter zu *schliessen.*

Auf der Innenseite des Einbanddeckels von D. C. 56 steht der allgemeine Titel für beide Handschriften:

| | |
|---|---|
| كتاب فيه رسالتين في علم الفلك | „Zwei Dissertationen über die Lehre von der Himmelskugel. |
| رحمة الله على مصنّفه | Gottes Gnade walte über deren Verfasser |
| وعلى جميع المسلمين. | und über allen Muselmännern!“ |

Ihm folgt auf Folio 1 verso der spezielle für die erste:

| | |
|---|---|
| بسم اللّه الرحمن الرحيم ربّ وفّق | „Im Namen Gottes, des Barmherzigen, des Erbarmers, des Herrn, der beisteht! |
| الباب الأوّل | Das erste Capitel. |
| بالصفيحة الزرقاليّة. | Von der Scheibe des Zarkâlı.“ |

Nach der Einleitung, welche die ausgezeichneten Eigenschaften des „berühmtesten der Instrumente, das sich, seiner Allgemeinheit wegen, für alle Gegenden der Erde eignet“, aufzählt, kommen die einzelnen Abschnitte an die Reihe, von denen der erste der inhaltreichste ist und „die Benennung der Verzeichnungen, wie sie sowohl auf der Aussen- wie auf der Innenseite einer solchen Scheibe angegeben sind, zum Gegenstande hat“. (هذه الآلة اجل الالات واسر فيها لعمومها جميع الافاق وايضا كفا الى امور بنية جليلة لايمكن الوصول الى البرّها بشى من الالات الّتى قد استهرب في العالم بين الناس ........ الفصل الاول في تسمية الرسوم الموضوعة في ظاهر هذه الصفيحة المشتركة وفي باطنها جميع هذا الفصل)

An letztere schliessen sich dann die gewöhnlichen Aufgaben an, z. B.:

| | |
|---|---|
| الفصل الثامن عشر في معرفة الميل وغاية الارتفاع وسعة المشرق من قبل العرض ونصف قوس النهار. | „Der 18. Abschnitt. Von der Bestimmung der Declination, grössten Höhe und Morgenweite aus Polhöhe und dem halben Tagbogen.“ |

Unter مَيْل mejl, ohne Zusatz, ist zwar in der Regel die „erste Schiefe“, d. h. der (kürzeste) Bogen des Declinationskreises eines Sternes zwischen Aequator und Ekliptik, zu verstehen, hier aber glaubte ich, wie auch schon von anderer Seite geschehen, es mit Decl. übersetzen zu müssen, weil sich dann Alles ungezwungen giebt und ganz unseren Formeln

$$cos t_0 = - tg\varphi \,.\, tg\delta,\ \ sin A_1 = \frac{sin\delta}{cos\varphi},\ \ z = \varphi - \delta$$

entspricht. — Ein gründliches Studium (nicht selten mit Entzifferung identisch) der Handschrift, das ich mir für eine spätere Zeit vorbehalten muss, wird zeigen, ob es sich verlohnt, dieselbe in extenso in deutscher Sprache herauszugeben; bis jetzt finde ich dazu keinen recht zwingenden Anlass.

---

## III.

Sein pietätvolles Gedenken hat vor 371 Jahren Heinrich Schreiber (oder Grammateus) zur Herausgabe eines Schriftchens (Ein kunſtreich vnd behendt Inſtrumēt zuwiſſen am tag bey der Sonnen vnd in der nacht durch die Stern mancherley nutzberperkeit vñ auffgab in allen orten vñ endt der welt Beſchriben durch Heinricū Grāmmateū oder ſchreiber vñ Erffurdt der Syben freyē künſten mayſter. Am Schlusse: ¶ Gedruckt zu Nürnberg durch Hieronimum Höltzel/ durch verlegung Luce Alantſee Pügerr vnd Büchfurer zü Wienn Anno. 1522. — 8 nicht paginirte Blätter in kl. 4°.) veranlasst, das unverkennbar von einem Astrolabium handelt, dessen planisphärischer Entwurf sich auf dieselbe Projections-Art stützt, die wir bei Zarḳâlî und später Gemma Frisius fanden, wenngleich darin weder diese auch nur mit einer Sylbe angedeutet ist, noch das Instrument selbst namhaft gemacht wird. In der Widmung an den Bürgermeister und Rath der Stadt Nürnberg sagt Schreiber, dass er bei seinem Preceptorem herrn Georgen Tannſteteter der Syben freyen künſten vnd Artzney Doctor verschiedene Instrumente gesehen habe, darunter ein alts verworffens/ des (als man ſagt) Maiſter Georgen Beurbachius erfunden ſein ſolt; dessen habe er sich erbarmbt, damit das Gedächtniss an die alten gelehrten Männer der berühmten Hochschule zu Wien nit abgieng. Auf F. 2 r. heisst es dann: ¶ Solch inſtrument hat zway ſtuck. Das erſt/ welches dañ iſt gezirt mit den Nurnbergiſchē wappen hat zu aufferſt ein circkel oben mit einen ringlen/ dar an man es helt genāt Meridianus/ das iſt der mittags circkel. Vnd iſt alſo geteylt. Das auff baide ſeyten hynauff vnd hernyder gehen (an zufahen von dem Orizont) .90. grad. vnd 90. oben bedeuten cenith/ das iſt das punct/ welchs oben im Hymel anſchawet vnſer heubter. Auch die andern .90. gra. vnterſich bringen oppoſitum cenit. Das iſt das punct/ welches gegen vnſerm cenit iſt. Orizon wirdt geſprochen eyn ender des geſichts/ ........... Zu letzt erzaygt ſich eyn beweglicher circkel/ mit den Zwelff zeychen welcher Zodiacus wird genant. Auff ſolche ſcheyben ſeyn geſatzt etliche ſtern all eyngeſchriben nach der breyte vnd lenge. —

Demnach hätte Peurbach vielleicht schon kurze Zeit vor Regiomontanus jene ungewöhnliche Art von stereographischer Projection in Anwendung gebracht.

Das bekannte posthume Werk Stoeffler's: *De compositione aut fabrica astrolabii, eiusdemque usu multifariisque utilitatibus, Johañe Stoflerino Justingensi Authore,* das er zu Tübingen im Jahre 1510 vollendet hatte*, enthält dagegen Nichts von Arzachel's Construction. Wohl aber stimmt die Beschreibung des „Rückens" ganz mit der des Pariser lat. Manuscriptes überein, d. h. nicht alle Kreise auf demselben sind concentrisch, wie bei den gewöhnlichen arabischen Astrolabien der Fall, sondern das innere System, welches die zwölf julianischen Monate mit Eintheilung in einzelne Tage enthält, ist excentrisch. F. 24 v.: *Augem igitur solis ad tempus fabricae tui astrolabii ex tabulis Alphonsinis, aut aliis extrahe. Quae gratia exempli Anno Christi maximi decimo supra millesimum quingentesimum currente in 1. gradu, & 16. fere minuto* Cancri [im System der äusseren concentrischen Kreise] *exacto calculo reperta est. Hanc ab initio Arietis orbis signorum supra descripti supputabis. Terminat autem se solaris aux annorum Christi memoratorum pene in 16. minuto, secundi gradus Cancri. In termino igitur eiusdem fac punctum. f. quem cum centro. e. per lineam rectam leniter impressam continuabus.* Dieses *f* ist der gemeinsame Mittelpunkt der excentrischen Kreise, deren äusserster den innersten der übrigen Kreise ungleichartig berührt.

Aus einem Abrisse der Geschichte des Astrolabiums, den Stoeffler (F. 30 bis 31) giebt, kann ich mir nicht versagen, Einiges hier zu reproduciren:

*.....& dicitur, quod primus eius inventor fuerit Abraham: & dicitur, quod fuerit inventum tempore regis Salomonis filii David, vel ante eum. Et dicitur, quod quidam qui vocabatur Lab, invenit ipsum, et astro vel astor vult dicere lineae, unde vocatum est Astrolabium, id est lineae Lab. haec ille & plura alia utilia.*

> ¶ *Alii interpraetantur astrolabium ab astron greco, quod est sydus, & labi ansa vel manubrium, quasi syderum ansa. est enim instrumentum ansam habens, per quam suspensum astrorum motus & plura notatu dignissima colligimus.*

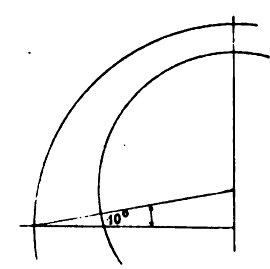
---

* Mir liegt folgende Ausgabe vor: Petrus Jordan Lectori S. D. En Tibi Nunc Iterum Candide Lector, Ceolestium Rerum Disciplinae, Atque Totius Sphaericae peritissimi, Johannis Stoeflerini Justingensis, uiri Germani, uariorum Astrolabiorum compositionem seu fabricam, .........., in meliorem formam quàm antea fuerant, redigenda, atque imprimenda curauimus. Vale. Anno Salutis. M.D.XXXV. Mense Martio. (Zu ergänzen: Moguntiae.) Ein Folio-Band von XVI und 156 Seiten.

¶ *Hoc praeterea instrumentum Hermanus Contractus vocat Walzagoram. .........*. *Walzagora igitur Arabice sonat plana sphaera vel planisphaerium, aut astrolapsus Latine.*

¶ *Ptolemeus appellat astrolabium planam sphaeram aut planisphaerium ex eo, quod sit quasi sphaera extensa in plano.*

Im 3. und 4. Quadranten jenes excentrischen Ringes des „Rückens“ sind Quadrate, die sogenannten Scalae altimetrae, mit der umbra recta und umbra versa verzeichnet, denen bei den arabischen Astrolabien, so bei dem Arzachel's im Par. Man., ganz ähnliche Constructionen entsprechen, welche auf eine sehr einfache Weise die Tangente (الظل المنكوس al-ẓill al-menkûs) der Winkel von 0° bis 45° und die Cotangente (الظل المبسوط al-ẓill al-mebsûṭ) der Winkel von 45° bis 90° geben.




Die Excentricität auf dem Rücken von Arzachel's Scheibe ist eine bedeutend grössere, als Stoeffler annimmt, und aus nebenstehendem Schema ersichtlich.

Was endlich die Universalität des Zarkâlischen Astrolabiums anlangt, so braucht nur darauf hingewiesen zu werden, dass die Systeme der Stundenwinkel, sowie die der Azimuthe und Höhen, durchaus vom Standpunkte des Beobachters abhängen; alle drei sind in demselben Augenblicke an verschiedenen Orten der Erde verschieden.

# Recensionen.

S. Lie. **Theorie der Transformationsgruppen**. Zweiter Abschnitt. Unter Mitwirkung von F. Engel. Leipzig, B. G. Teubner. 1890. IV u. 554 S.

Bezüglich des ersten Abschnittes dieses Werkes, der die allgemeine Theorie der endlichen, continuirlichen Transformationsgruppen behandelte, sei auf die in dieser Zeitschrift Bd. XXXIV 1889. S. 171 u. flg. erschienene, eingehende Anzeige von Herrn Study verwiesen.

Der vorliegende zweite Abschnitt beschäftigt sich mit der Theorie der Berührungstransformationen, und den von solchen gebildeten Gruppen, ein dritter Abschnitt wird Anwendungen bringen.

Um in das Wesen der Berührungstransformationen leichter einzudringen, wird man am Besten auf die geometrische Entstehung derselben zurückgreifen. (Vergl. dazu vor Allem die grosse Abhandlung Lie's im V. Band der Mathem. Annalen.)

Bekanntlich hat Poncelet die Grundlagen einer Theorie der reciproken Polaren in Ebene und Raum geschaffen und damit den Dualismus in der Geometrie begründet; so fruchtbar diese Lehre zweifellos gewirkt hat, so wird man doch behaupten müssen, dass die Nachfolger Poncelet's den von ihm eingeschlagenen Weg zu einseitig verfolgt haben, so dass ihnen wichtige Partien der Geometrie verborgen blieben.

Nach dem Vorgange Lie's, der durch Plücker'sche Speculationen dazu angeregt wurde, kann man der Theorie der Reciprocität eine neue, fruchtbare Seite abgewinnen.

Um vorerst in der Ebene zu bleiben, so ordnet eine gegebene Reciprocität zunächst irgend einem Punkte $P$ eine Gerade $g_1$ zu, weiterhin aber einer jeden Geraden oder Richtung $g$ durch $P$ wiederum einen Punkt $P_1$ auf $g_1$. Fasst man daher den Inbegriff eines Punktes $P$ und einer durch ihn gehenden Richtung $g$ als ein Ganzes auf, das als „Linienelement" bezeichnet sei, so kann man auch sagen, dass vermöge der Reciprocität irgend ein Linienelement $(P, g)$ in ein neues Linienelement $(P_1, g_1)$ übergeht. Die Ebene erscheint nunmehr nicht sowohl als ein zweifach, sondern vielmehr als ein dreifach ausgedehntes Feld, insofern ja ein Linienelement von drei Bestimmungsstücken abhängt. Die Linienelemente einer Curve (d. i. Inbegriffe von Punkt und Tangente) gehen

wiederum über in die Linienelemente einer Curve, und haben zwei Curven ein Linienelement gemein, so gilt offenbar das Gleiche von den beiden transformirten Curven; mit anderen Worten, Curven, die sich berühren, gehen bei unserer Transformation wiederum in solche über. Damit ist ein erstes einfaches Beispiel einer sogenannten „Berührungstransformation" gegeben. Der so gewonnene Begriff bietet jedenfalls den Vortheil, lineare (oder auch höhere) Reciprocitäten und andererseits Punkttransformationen, wie z. B. die Collineationen, unter einem gemeinsamen höheren Gesichtspunkte zusammenzufassen, da ja eine Collineation zweifellos auch eine Berührungstransformation ist. Man wird aber weiterhin fragen, ob es nicht noch höhere Classen von Berührungstransformationen giebt, bei denen Linienelemente stets wieder in Linienelemente übergehen.

Gehen wir jetzt zum Raume über, so wird man bald erkennen, dass sich das bei der Ebene Bemerkte nach zwei getrennten Richtungen hin ausdehnen lässt.

Liegt eine räumliche, lineare Reciprocität vor, so ordnet dieselbe wiederum nicht nur einem Punkte $P$ eine Ebene $E_1$ zu, sondern auch jeder durch $P$ gehenden Ebene (oder besser Stellung) $E$ einen Punkt $P_1$ auf $E_1$. Versteht man also unter „Flächenelement" den Inbegriff eines Punktes $P$ und einer mit ihm incidenten Ebene (Stellung) $E$, so geht jedes Flächenelement $(P, E)$ über in ein anderes $(P_1, E_1)$. Die $\infty^2$ Flächenelemente einer Fläche transformiren sich im Allgemeinen ebenfalls in die $\infty^2$ Flächenelemente einer neuen Fläche, sodass Berührung von Flächen bei der „Berührungstransformation" erhalten bleibt. Da eine Stellung von zwei Stücken, etwa zwei Winkeln $p$, $q$ abhängt, ein Punkt selber von drei Coordinaten $x$, $y$, $z$, mithin ein Flächenelement von fünf Stücken $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, so sieht man jetzt deutlicher, dass das Wesen der neuen Auffassung in einer „Erweiterung" der ursprünglichen Reciprocität besteht, insofern nunmehr — analytisch mit Hilfe von fünf Gleichungen — die „Coordinaten" $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ eines Flächenelements transformirt werden in die Coordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$, $p_1$, $q_1$ eines neuen Flächenelements. Hieran werden sich analoge Betrachtungen anlehnen, wie oben bei der Ebene.

Es ist aber von Wichtigkeit, dass man bei consequenter Verfolgung der scizzirten Gedankenreihe zu einer zweiten, von der ersten wesentlich verschiedenen Gattung von Berührungstransformationen gelangt. Man denke sich nämlich zwei Reciprocitäten gleichzeitig gegeben, so ordnen dieselben einem Punkte $P$ eine Gerade $g_1$ zu, zugleich aber auch einer Ebene (Stellung) $E$ durch $P$ eine weitere Gerade $g'_1$, welche mit $g_1$ in einer Ebene $E_1$ liegt, und also auch $g_1$ in einem Punkte $P_1$ begegnet. Dann wird man es als eine Folge der ursprünglichen Reciprocitäten ansehen,

dass wiederum ein „Flächenelement" $(PE)$ übergeht in ein neues Flächenelement $(P_1 E_1)$, und die Zuordnung der Flächenelemente besitzt offenbar gleichfalls das charakteristische Merkmal der Berührungstransformationen, die Invarianz der Berührung.

Um gleich das merkwürdigste, hierher gehörige, von Lie zuerst gefundene Beispiel anzuführen, so seien zwei (lineare) Reciprocitäten definirt durch die Gleichungen $(i = \sqrt{-1})$:

$$\Omega_1 \equiv x - x_1 - iy_1 + zz_1 = 0, \quad \Omega_2 \equiv z(x_1 - iy_1) + z_1 - y = 0.$$

Den $\infty^3$ Punkten des einen Raumes entsprechen dabei die (imaginären) $\infty^3$ Geraden, welche den Kugelkreis treffen, im zweiten Raume; umgekehrt den Punkten des zweiten Raumes die Geraden eines gewissen linearen Complexes. Tritt jetzt aber die Erweiterung auf Flächenelemente ein, so ergiebt sich, dass die $\infty^2$ Flächenelemente einer Geraden des ersten Raumes übergeführt werden in die $\infty^2$ Flächenelemente einer Kugel des zweiten Raumes; insbesondere müssen also zwei sich schneidenden Geraden zwei sich berührende Kugeln entsprechen. Hieraus ersieht man schon, welchen Werth die fragliche Abbildung für die Berührungsprobleme der Kugel hat. Eine weit wichtigere Folgerung ist aber, dass, wenn zwei Flächen vermöge der Transformationen sich entsprechen, die Krümmungslinien der einen dabei übergehen in die Haupttangentencurven der anderen. Hierauf gestützt hat Lie für eine Reihe bemerkenswerther Flächen die Haupttangentencurven bestimmt.

Wir haben diese geometrische Einleitung mit besonderer Rücksicht darauf ausgedehnt, dass diese so fruchtbaren und eleganten Untersuchungen von den eigentlichen Geometern bisher nicht ausreichend gewürdigt zu sein scheinen.

Was die Geschichte der vorliegenden Theorie betrifft, so muss allerdings betont werden, dass bei Lie selber die geometrische Speculation nur die eine Seite der Sache war: er hat nicht weniger von vornherein die Anwendungen auf (gewöhnliche und vor Allem auf) partielle Differentialgleichungen im Auge gehabt; es mag hier vor der Hand an der Bemerkung genügen, dass es gerade solche Berührungstransformationen sind, welche die partiellen Differentialgleichungen in Formen bringen, welche der Integration zugänglicher sind.

Wir gehen jetzt dazu über, das Wesentliche der oben betrachteten Beispiele zu erfassen und in analytische Form zu kleiden, um so den Begriff der Berührungstransformation in seiner wahren Allgemeinheit zu erkennen. Um unnöthige Wiederholungen zu vermeiden, werden wir gleich den gewöhnlichen Raum als Muster zu Grunde legen.

Als Coordinaten eines Flächenelements $(PE)$ wird man zunächst nebst den rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$, $z$ des Punktes $P$ die Verhält-

nisse $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ der Projectionen einer unendlich kleinen Verschiebung wählen, welche man dem Punkte längs des Lothes zur Stellung $E$ ertheilen mag.

Setzt man nunmehr fünf Transformationsgleichungen zwischen den $x, y, z, p, q$ und neuen Grössen $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ an:

$$\text{I)} \begin{cases} x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q), \\ p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q), \end{cases}$$

so definirt man, abgesehen von der stets vorausgesetzten Bedingung der Auflösbarkeit nach den $x, y, z, p, q$, eine Berührungstransformation durch die Forderung, dass vermöge I) ein Flächenelement stets wieder in ein Flächenelement übergehe, oder analytisch, dass die „Pfaff'sche Gleichung" $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ stets die andere Pfaff'sche Gleichung $dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1$ nach sich ziehe, d. i. dass identisch vermöge I) die Proportionalität der beiden „Pfaff'schen Ausdrücke" $dz - p\,dx - q\,dy$ und $dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1$ erfüllt werde:

$$\text{II)} \quad dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 \equiv \varrho(x, y, z, p, q)(dz - p\,dx - q\,dy),$$

wo $\varrho$ eine (nicht identisch verschwindende) Function der eingeklammerten Grössen bedeute.

Offenbar sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem aus den Gleichungen I) nur eine, oder aber zwei, oder endlich drei Relationen zwischen den $x, y, z$; $x_1, y_1, z_1$ allein folgen.

Der letzte Fall ist der einfachste; dann liegen drei Gleichungen vor von der Form:

$$\text{III)} \quad x_1 = X(x, y, z), \quad y_1 = Y(x, y, z), \quad z_1 = Z(x, y, z),$$

aus denen durch Differentiation und Elimination mit Nothwendigkeit die beiden letzten Gleichungen I) resultiren; eine derartige Berührungstransformation ist als eine „uneigentliche" zu bezeichnen, da sie nur durch „Erweiterung" einer gewöhnlichen Punkttransformation III) entstanden ist.

Im ersterwähnten Falle kommt nur eine einzige Relation in Betracht:

$$\text{IV)} \quad \Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Differenzirt man total, so muss die Gleichung:

$$d\Omega \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} dz_1 = 0$$

mit der Forderung II) äquivalent sein; in der That erhält man durch partielle Differentiation vier Gleichungen:

$$p\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad q\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad p_1\frac{\partial \Omega}{\partial z_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = 0, \quad q_1\frac{\partial \Omega}{\partial z_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = 0,$$

die zusammen mit IV) ein den Gleichungen I) äquivalentes System liefern, nur dass dasselbe, um eine brauchbare Berührungstransformation zu ergeben, sowohl nach den $x, y, z, p, q$ als nach den $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ auflösbar sein muss. Sieht man diese Bedingung als eine selbstverständlich zu erfüllende an, so hat man das Resultat:

„Alle eigentlichen Berührungstransformationen der ersten Kategorie werden durch eine **beliebige** Relation IV) repräsentirt."

Hierher gehören demnach die oben betrachteten dualistischen Transformationen. Aehnlich erledigt sich der zweiterwähnte Fall mit zwei von einander unabhängigen Relationen:

$$\text{V)} \quad \Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Man operirt ganz wie oben, nur dass jetzt an Stelle von $\Omega$ die lineare Combination $\lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2$ tritt. Durch Elimination des Quotienten $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ hat man wieder fünf Gleichungen, die unter der Bedingung der Auflösbarkeit ein System I) bilden. Somit gilt:

„Alle eigentlichen Berührungstransformationen der zweiten Kategorie werden durch **irgend** zwei von einander unabhängige Relationen V) repräsentirt."

Der innere Unterschied zwischen den uneigentlichen und eigentlichen Berührungstransformationen einerseits, sowie derjenigen zwischen den Berührungstransformationen überhaupt und den gewöhnlichen Transformationen lässt sich jetzt deutlich charakterisiren. Wir benützen dabei geometrische Redeweise. Während bei den uneigentlichen Berührungstransformationen ein Punkt wieder in einen Punkt (oder in eine endliche Anzahl von Punkten) übergeht, tritt bei den eigentlichen ein Wechsel in der Art des Raumelementes ein: die $\infty^3$ Punkte des Raumes transformiren sich in eine $\infty^3$ Flächen- respective Curvenschaar. Dagegen stehen die Berührungstransformationen als solche den gewöhnlichen Raumtransformationen insofern gegenüber, als man sich nicht darauf beschränkt, zu fragen, wie sich ein einzelner Punkt transformirt, sondern zugleich seine „Umgebung" auf einem ebenen beliebig kleinen Flächenstück.

Daher sind die Berührungstransformationen wie geschaffen zur Untersuchung von Problemen aus der sogenannten „Geometrie auf der Fläche".

Die Berührungstransformationen sind wesentlich an die Continuität des Punktraumes gebunden; der Raum erscheint, um uns einer gelegentlichen, drastischen Aeusserung von F. Klein zu bedienen, mit lauter (beliebig kleinen) Flächenstücken „gepflastert", während er in der modernen Mannigfaltigkeitslehre und der sich daran anschliessenden Theorie der Functionen mit discontinuirlichen Gruppen von „lauter einzelnen Spitzen starrt".

Bei den eigentlichen Berührungstransformationen, von denen von nun ab ausschliesslich die Rede sein wird, vertauschen sich, allgemein gesagt, Punkte, Curven und Flächen wechselseitig. Man wird demnach versucht sein, diese drei Inbegriffe von $\infty^2$ Flächenelementen unter einen Begriff zusammenzufassen, der von Lie als „Element-$M_2$“ bezeichnet wird. Wie sich weiterhin zeigt, erhält erst dadurch nicht allein die Theorie als solche, sondern auch ihre Anwendungen auf die partiellen Differentialgleichungen eine völlige Durchsichtigkeit.

Der gemeinten Zusammenfassung liegt aber auch eine innere Berechtigung zu Grunde. Eine continuirliche Schaar von Flächenelementen wird als „Element-Mannigfaltigkeit“ definirt, wenn das dieselben darstellende Gleichungssystem in $x, y, z, p, q$ der Pfaff'schen Gleichung $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ genügt. Besteht nun eine solche Elementmannigfaltigkeit gerade aus $\infty^2$ Elementen, so fällt sie mit dem obigen Begriff der Element-$M_2$ zusammen; aus der Element-$M_2$ geht eine Elementmannigfaltigkeit von $\infty^1$ Elementen, d. i. eine Element-$M_1$ einfach dadurch hervor, dass man vermöge irgend eines Gesetzes aus den $\infty^2$ Elementen eine $\infty^1$-Schaar ausscheidet.

Eine unmittelbare Anwendung erfährt der Begriff der Element-$M_2$ bei dem Problem der Integration einer partiellen Differentialgleichung:

$$\Omega\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Nach der gewöhnlichen Auffassung handelt es sich darum, alle Gleichungssysteme von der besonderen Form:

$$z = F(x, y), \; p = \frac{\partial F}{\partial x}, \; q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

aufzustellen, welche die Gleichung $\Omega = 0$ umfassen. Offenbar wird dann die Pfaff'sche Gleichung $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ identisch befriedigt.

Auf dem jetzigen Standpunkt wird man an Stelle jenes speciellen Gleichungssystems überhaupt jedes System von drei Gleichungen zwischen $x, y, z, p, q$ zu setzen haben, welches sowohl der Pfaff'schen Gleichung, wie $\Omega = 0$ genügt. Mit anderen Worten, es werden alle Element-$M_2$ gesucht, deren Elemente der $\infty^4$-Schaar von Elementen angehören, welche die vorgelegte Gleichung $\Omega(x, y, z, p, q) = 0$ aus der $\infty^5$-Schaar aller Flächenelemente ausscheidet.

Auf die abstracten und verwickelten Fragen, welche hieraus für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen entstehen — nicht nur im Falle von drei, sondern allgemein von $n$ Variabeln, dem dann in gleicher Weise Berührungstransformationen im Raum von $n$ Dimensionen zu Grunde zu legen sind — kann hier nicht eingegangen werden; nur ein Punkt von besonderer Wichtigkeit möge zur Sprache kommen. Die Gesammtheit

der Berührungstransformationen des Raumes ist oben mit Hilfe bloser Differentiationen und Eliminationen ermittelt worden. Es giebt indessen zu ihrer Bestimmung einen zweiten Weg, der zwar weit weniger einfach ist, dafür aber tiefer in die Theorie hineinführt, und für das Verständniss des organischen Zusammenhangs mit den partiellen Differentialgleichungen unerlässlich ist.

Man frage nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, welche die Functionen $X, Y, Z, P, Q$ in I) zu erfüllen haben, damit die Identität II) befriedigt werde. Die Antwort lässt sich sehr verschieden formuliren; die fruchtbarste dürfte folgende sein. Bedient man sich, wenn $F, \Phi$ irgend zwei Functionen der $x, y, z, p, q$ sind, des Poisson'schen Zeichens:

$$[F\Phi] \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial y}\right) + p\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$
$$+ q\left(\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial z}\right),$$

und nennt man $F$ und $\Phi$ „in Involution liegend", sobald $[F\Phi]$ identisch verschwindet, so sagt das fragliche Kriterium aus, dass je zwei der drei ersten Functionen in I), $X, Y, Z$ in Involution zu liegen haben; ist das Kriterium erfüllt, so sind damit von selber die fehlenden Functionen $P, Q$ (wie auch der Proportionalitätsfactor $\varrho$ in II) eindeutig bestimmt.

Gerade dieser Involutionsbeziehung haben sich die früheren Analytiker bei den Integrationen einzelner partieller Differentialgleichungen bedient, erst Lie war es aber vorbehalten, deren innere Bedeutung und ihren nothwendigen Zusammenhang mit den Berührungstransformationen aufzudecken. Auch einzelne Berührungstransformationen sind früher wiederholt zu dem genannten Zwecke verwandt worden, ohne dass man auch nur zu einer allgemeinen Definition der Berührungstransformationen gelangt wäre, obgleich sich bei Lagrange von analytischer Seite her, und bei Plücker von geometrischer Seite her, beachtenswerthe Ansätze dazu finden.

Ehe wir uns zum zweiten Theile des Buches, der Invariantentheorie der Berührungstransformationen wenden, greife noch eine formale Bemerkung Platz, die der Geometer bereits erwartet haben wird.

Die Grössen $p, q$, welche die Stellung einer Ebene bestimmten, sind die Verhältnisse der Cosinus der Winkel, welche das Loth der Ebene mit den Coordinatenachsen bildet. Um nicht immer gewisse Ausnahmefälle, welche mit dem Unendlich-Fernen zusammenhängen, namhaft machen zu müssen, empfiehlt es sich, die fraglichen Cosinus (oder auch ihnen proportionale Grössen) als homogene Stellungscoordinaten $p_1, p_2, p_3$ einzuführen.

Es zeigt sich, dass gerade für die Invariantentheorie der Berührungstransformationen die Homogenität in den $p$ eine hervorragende Rolle spielt.

Zu dem Behuf ist der Begriff der homogenen Berührungstransformationen voranzustellen. Wegen der Bezeichnungen ist es bequemer, jetzt allgemein von $2n+1$ Variabeln $z$; $x_1, x_2 \ldots x_n$; $p_1, p_2 \ldots p_n$ zu sprechen; dieselben erfahren vermöge der Functionen $Z$; $X_1, X_2 \ldots X_n$; $P_1, P_2 \ldots P_n$ eine Berührungstransformation, wenn

II) $Z - P_1 dX_1 - P_2 dX_2 - \ldots - P_n dX_n \equiv \varrho(z,x,p)(z - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \ldots - p_n dx_n)$.

Diese Berührungstransformationen zerfallen, je nach der Art des Raumelements, welches gewechselt wird, in $n$ Kategorien. Ganz unabhängig von dieser Eintheilung ist aber eine andere, nach der Natur der Functionen $Z$, $X$, $P$. Eine erste, wichtige Untergattung wird durch die Forderung definirt, dass die $2n$ Functionen $X$, $P$ von $z$ ganz frei sind, sodass die $x$, $p$ unter sich transformirt werden. Sobald man noch die specielle Bedingung hinzufügt, dass $Z=z$ wird, d. h. dass $z$ eine Invariante der Berührungstransformation ist, so werden die $X$, $P$ von selbst homogen in den $p$ (und zwar die $X$ von der nullten, die $P$ von der ersten Ordnung), und die Identität II) nimmt die symmetrische Form an: $\Sigma P dX \equiv \Sigma p dx$.

In diesem Falle heisst die Transformation selbst eine **homogene**, und auf solche beschränken wir uns für das Nächstfolgende; desgleichen sollen die weiteren in Betracht kommenden Functionen der $x$, $p$ in den $p$ homogen sein und kurz homogen heissen.

Wie in der gewöhnlichen (projectiven) Formentheorie ist dann als allgemeines Aequivalenzproblem aufzustellen: Wann sind zwei Systeme von je $m$ homogenen Functionen $F_1(x,p)$, $F_2(x,p) \ldots F_m(x,p)$; $\Phi_1(x',p')$, $\Phi_2(x',p') \ldots \Phi_m(x',p')$ äquivalent, d. h. wann kann das eine System durch eine homogene Berührungstransformation zwischen den $x$, $p$, $x'$, $p'$ in das andere übergeführt werden, und, wenn das der Fall, wie bestimmt man sämmtliche derartige Berührungstransformationen?

Zu dem Behuf wird ein System von $m$ Functionen $F(x,p)$ erst auf eine canonische Form gebracht. Es gelingt nämlich, durch Aufnahme weiterer geeigneter Functionen der $x$, $p$, ein derartiges System von $r$ von einander unabhängigen Functionen $F_1(x,p), \ldots F_r(x,p)$ zu erzeugen, dass der **Poisson**sche Klammerausdruck $[F_i, F_k]$, angewandt auf irgend zwei der $r$ Functionen $F$, eine Function der $x$, $p$ wird, welche mit bloser Hilfe der $F$ darstellbar ist.

Dann aber gilt die nämliche Eigenschaft auch für irgend zwei Functionen der $F$, und es bietet sich so der wesentliche Fortschritt vom $m$ gliedrigen Functionensystem zur $r$ **gliedrigen Functionengruppe**, dem Inbegriff sämmtlicher Functionen der $r$ unabhängigen $F$, ein Fortschritt, der die Invariantentheorie der Berührungstransformationen in ähnlicher Weise beherrscht, wie der des vollen Systems die gewöhnliche Invariantentheorie.

Die Theorie der Functionengruppen erhält ihre Durchsichtigkeit durch einen specifischen Dualismus. Eine $r$ gliedrige Functionengruppe bedingt

nämlich stets die Existenz einer zweiten $(n-r)$ gliedrigen, der sogenannten Polargruppe, welche dadurch definirt ist, dass jede Function der einen Gruppe mit jeder Function der anderen Gruppe in Involution liegt. Die Beziehung beider Gruppen ist eine wechselseitige. Die beiden Gruppen gemeinsamen (unabhängigen) Functionen bilden wiederum eine Gruppe, man nennt sie die der ausgezeichneten oder invarianten Functionen (sc. der gegebenen Gruppe). Das Hauptresultat geht nun dahin, dass es nur drei Eigenschaften giebt, welche einer homogenen Functionengruppe in den $m$ Veränderlichen $x_1 \dots x_n$, $p_1 \dots p_n$ gegenüber allen homogenen Berührungstransformationen in den $x$, $p$ erhalten bleiben, erstens ihre Gliederanzahl $\nu$, zweitens die Anzahl $q$ ihrer invarianten Functionen, und drittens die Anzahl $q'$ (wo $q' = q$ oder $q-1$ ist) der unabhängigen invarianten Functionen nullter Ordnung (in den $p$). Umgekehrt sind bei Erfülltsein der drei Bedingungen beide Gruppen äquivalent.

Kehrt man zurück zu den ursprünglich vorgelegten beiden Systemen von $m$ Functionen $F$, $\Phi$, so lässt sich die Aequivalenz der beiden Systeme durch blose Differentiationen und Eliminationen entscheiden, und es lassen sich auch alle Eigenschaften eines $m$ gliedrigen Functionensystems angeben, welche gegenüber allen homogenen Berührungstransformationen invariant bleiben.

Zu einem ähnlichen Schlussresultat gelangt man, wenn man die Bedingung der Homogenität wieder aufgiebt.

Das dritte und letzte Hauptkapitel des Buches handelt von den endlichen, continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen. Erst hier wird von den Methoden, Begriffen und Sätzen des ersten Abschnitts (1888) Gebrauch gemacht. Während indessen manche Entwickelungen von da schlankweg übertragen werden können, giebt es bei den Gruppen der Berührungstransformationen auch eine Reihe specifischer Eigenthümlichkeiten. Die Hauptsache ist wiederum, dass eine derartige Gruppe durch ihre infinitesimale Transformation völlig charakterisirt wird, sodass fast ausschliesslich mit den letzteren und deren Symbolen operirt wird.

Eine beliebige infinitesimale Berührungstransformation im Gebiete der $2n+1$ Variabeln $z$, $x_1 \dots x_n$, $p_1 \dots p_n$ enthält noch eine willkürliche Function der $z, x, p$; aber auch umgekehrt ist sie nach Wahl der letzteren eindeutig bestimmt: diese Function heisst daher die charakteristische Function der infinitesimalen Transformation, in Wirklichkeit rechnet man daher direct mit den charakeristischen Functionen. Das Auftreten einer solchen Function entspricht dem Umstande, dass die Gesammtheit aller Berührungstransformationen im Gebiete der $z, x, p$ selber eine (unendliche) Gruppe constituirt, d. h. irgend zwei Berührungstransformationen, hintereinander ausgeübt, sind einer einzigen solchen Transformation äquivalent.

Analoges gilt von den homogenen Berührungstransformationen und von einer Reihe weiterer Kategorien. Der wichtige Process der „Klammeroperation“ geht besonders elegant vor sich: zwei infinitesimale Berührungstransformationen mit den charakteristischen Functionen $W_1$, $W_2$ ergeben durch Klammeroperation die infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Function $[W_1, W_2]$.

Auch der Process der Einführung neuer Veränderlichen lässt sich direct am Symbol der infinitesimalen Transformation vollziehen.

Die Theorie der „Zusammensetzung“ der endlichen continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen gestaltet sich ähnlich, wie die der endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen; will man alle Gruppen bestimmen, die zu einer vorgelegten Zusammensetzung gehören, so bedarf man höchstens der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Jede endliche continuirliche Gruppe von Berührungstransformationen besitzt „Differentialinvarianten“, die alle gleichfalls durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmt werden können. Indem wir uns ein Eingehen auf diese Probleme versagen, mögen wir lieber noch einige Worte der fundamentalen, für geometrische Anwendungen besonders fruchtbaren Aufgabe widmen, alle endlichen continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen im Raume von $n$ Dimensionen zu ermitteln.

Man wird hierbei alle Gruppen, die selbst wieder durch Berührungstransformationen ineinander übergeführt werden können, einem und demselben Typus zuordnen und wird sich auf die Bestimmung der verschiedenen Typen beschränken dürfen.

Diese Typen von Gruppen zerfallen in zwei Gattungen: enthält ein Typus eine Gruppe von erweiterten Punkttransformationen, so heisst er reducibel, im andern Falle irreducibel. Nur die letzteren werden hier behandelt. (Wegen der ersteren muss auf den demnächst erscheinenden dritten Abschnitt des Werkes verwiesen werden.) Die Bestimmung aller Typen von irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen in $2n+1$ Variabeln $z, x, p$ stösst auf solche Schwierigkeiten, dass eine Beschränkung auf gewisse, allerdings besonders bemerkenswerthe Klassen geboten erschien.

Für die Ebene wird das Problem dagegen vollständig durchgeführt. Merkwürdiger Weise resultiren nur drei Typen von respective zehn-, sieben-, sechsgliedrigen Gruppen. Das wesentliche Hilfsmittel dabei ist die Verwendung gewisser Reihenentwicklungen der infinitesimalen Transformationen der Gruppen und die Ausübung des Klammerprocesses auf dieselben.

Von den drei Typen ist der zehngliedrige der bedeutsamste; wählt man irgend eine Gruppe desselben als Repräsentanten, so sind die beiden

weiteren Typen durch zwei gewisse Untergruppen der Gruppe dargestellt. Dem zehngliedrigen Typus gehört vor Allem die Gruppe sämmtlicher Berührungstransformationen an, welche Kreise wiederum in Kreise überführen.

Aendert man die Auffassung der Grössen $x, y, y' = \frac{dy}{dx}$ der Coordinaten eines Linienelements der Ebene, und deutet dieselben als Coordinaten eines Raumpunktes — wobei die Element-$M_1$ der Ebene eine sehr einfache Abbildung auf gewisse Raumcurven erfahren — so erkennt man, dass der fragliche Typus auch durch sehr bekannte Gruppen von Raumpunkttransformationen repräsentirt werden kann. Dahin gehört einmal die Gruppe von projectiven Transformationen, welche einen linearen Complex unverändert lassen, sodann die Gruppe aller conformen Punkttransformationen des Raumes.

Von besonderer Einfachheit ist auch die Lösung der Frage, welches die Differentialgleichungen niedrigster Ordnung sind, welche bei den erwähnten drei Typen der Ebene invariant bleiben.

Die niedrigste Ordnung ist drei, in der That giebt es nur eine einzige Differentialgleichung dritter Ordnung in $x, y$, welche bei irgend einer irreducibeln Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene invariant bleibt; dieselbe lässt sich auf die canonische Form $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ bringen.

Leider hat sich der Referent im Hinblick auf den Umfang der Besprechung versagen müssen, auf die gedankenreichen Methoden des Buches noch tiefer einzugehen, es genügt ihm, dem Leser eine Vorstellung von der Bedeutung der skizzirten Theorien gegeben zu haben. Herrn Engel ist für seine selbstlose und mit grossem Geschick durchgeführte Behandlung des schwierigen Stoffes der wärmste Dank zu zollen.

W. Franz Meyer.

---

**Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie von Max Simon. Strassburg 1891.**

In der Einleitung giebt der Verfasser eine kurze historische Uebersicht über die Entwickelung der nicht-euklidischen Geometrie, in welcher er besonders den charakteristischen Unterschied der Standpunkte von Gauss und Bolzano hervorhebt. Im § 2 wird die Möglichkeit einer Metageometrie erörtert und die Berechtigung derselben als hypothetischer Mathematik einer möglichen Zukunft auf physiologischem Wege durch die Entwicklungsfähigkeit unserer Sinnesorgane abgeleitet. Der dritte Paragraph enthält eine Untersuchung der verschiedenen Definitionen von den

drei Grundgebilden der Geometrie: Punkt, Gerade und Ebene, wobei sich die Unmöglichkeit einer logischen Definition dieser Grenzbegriffe ergiebt. Der Grund dafür, dass uns diese Gebilde trotzdem so vertraut sind, ist nach der Ansicht des Verfassers ein physiologischer. Im § 4, welcher von den Dimensionen handelt, wird nach dem Vorgange Riemann's auf die besondere Beziehung unseres Raumes zur Geraden und Ebene hingewiesen. Hieran schliesst sich im § 5 eine Besprechung der darauf bezüglichen Schriften von Riemann und Helmholtz. Im § 6 giebt der Verfasser selbst die Grundzüge einer Geometrie des vierdimensionalen Raumes, während er im § 7 nachweist, dass jeder Versuch eines Beweises der Unmöglichkeit einer vierten Dimension misslingen muss, da derselbe weder rein logisch noch anschaulich sein kann. Im letzten Paragraphen unterzieht der Verfasser die bekanntesten Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen, einer Kritik, deren Ergebniss die Unhaltbarkeit derselben ist, und giebt zum Schluss bei einer Vergleichung der beiden Geometrien des endlichen Raumes der Klein'schen, welche ihre Versinnlichung im Strahlenbündel findet, vor der Riemann'schen, welche statt der Ebene die Kugel setzt, den Vorzug.

Dr. Max Meyer.

---

**Theorie der Differentialgleichungen** von Dr. Andrew Russell Forsyth, F. R. S., Professor am Trinity College zu Cambridge. — Erster Theil: Exacte Gleichungen und das Pfaff'sche Problem. — Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. — Leipzig, B. G. Teubner. 1893.

Der unermüdliche und berufene Uebersetzer Herr Maser hat es unternommen, eine deutsche Ausgabe des vor drei Jahren erschienenen oben bezeichneten Forsyth'schen Werkes zu liefern. Da unterzeichneter Referent bereits den Originalband ausführlicher zu besprechen Gelegenheit hatte — diese Zeitschrift, Jahrg. XXXVI, Hist.-liter. Abth. S. 190 bis 196 — so braucht hier auf den eigentlichen Inhalt des Buches wohl nicht mehr eingegangen zu werden. Nur so viel sei gesagt, dass der Verfasser das Pfaff'sche Problem auf Grund der massgebenden, zum Theil klassischen Arbeiten behandelt, und dass die Untersuchungen von Jacobi, Natani, Grassmann, Clebsch, Lie, Frobenius, A. Mayer und Darboux besonders berücksichtigt worden sind. Studirenden, welche sich in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen einleben wollen, kann das Werk umsomehr empfohlen werden, als es sehr lehrreiche Uebungsbeispiele enthält und mit historischen und bibliographischen Notizen reich ausgestattet ist.

Dr. Wold. Heymann.

**Ueber gewisse partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung.** Von Dr. A. GUTZMER. Berlin, Bernstein. 1893.

Die partielle Differentialgleichung der Potentialtheorie

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

ist nach verschiedenen Richtungen hin verallgemeinert worden. So wurde an Stelle der Potentialfunction zweier beziehungsweise dreier Variablen die entsprechende Function für einen $n$ dimensionalen Raum untersucht, wo sich wieder der Differentialparameter zweiter Ordnung als von hervorragendster Bedeutung erwies. Weiter erfuhr die Potentialtheorie eine Erweiterung in dem Sinne, dass man die der Potentialfunction im Euklidischen Raume entsprechende Function im Gauss'schen und Riemannschen Raume in Betracht zog. (Wegen der Literatur vergl. Bacharach, Geschichte der Potentialtheorie, Göttingen, Vandenhoeck u. Ruprecht. 1893.) Endlich wurde Mathieu durch die Theorie der Elasticität zur Einführung des zweiten Potentials veranlasst; und es entstand hier die Frage nach der Verallgemeinerung dieses Begriffs, der sich übrigens schon bei Lamé findet. Der Beantwortung dieser Frage sind eine Reihe von Abhandlungen gewidmet, welche der Verfasser nach einander in verschiedenen Zeitschriften (Liouville's Journal (4) VI; Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas X; Sitzungsberichte der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften 1892) veröffentlicht hat.

Die vorliegende in Halle eingereichte Inaugural-Dissertation bietet eine zusammenfassende Darstellung dieser Untersuchungen.

Wird auf den Ausdruck

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

die Operation $\Delta$ noch $n-1$ mal angewendet, so ergiebt sich ein Ausdruck, den der Verfasser in Analogie mit Mathieu's zweitem Potential als $n^{\text{tes}}$ Potential $\Delta^n u$ bezeichnet. Die Aufgabe besteht nun in der Bestimmung der allgemeinen Lösung von

$$\Delta^n u = 0$$

für einen ausserhalb des Bereiches gelegenen Punkt, sowie von der der Poisson'schen entsprechenden allgemeineren Differentialgleichung für einen innerhalb des Bereiches gelegenen Punkt — unter der Voraussetzung, dass $u$ von $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ nur in der durch

$$r^2 = \sum_{i=1}^{\varrho} x_i^2$$

gegebenen Verbindung abhängt.

Dieses Problem wird schrittweise, zunächst für zwei, sodann für drei und endlich für $\varrho$ Variable gelöst, wobei jedoch die Stetigkeitsbedingungen bei Seite gelassen werden, die nothwendig sind, damit die Operationen nicht ihren Sinn verlieren.

Weiter wird gezeigt, dass die für

$$\Delta^n u = 0$$

gefundenen Lösungen — es treten nämlich zwei verschiedene Formen für das Integral auf, je nachdem $\varrho$ gerade oder ungerade ist — die allgemeinsten Functionen von $r$ sind, welche der Differentialgleichung genügen, ein Resultat, das auf den Fall verallgemeinert wird, wo $u$ eine Function von $v$ und $v$ seinerseits von $r$ abhängt.

Zum Schluss giebt der Verfasser noch eine Verallgemeinerung des Green'schen Theorems in dem Sinne, dass auch hier die $n^{\text{ten}}$ Potentiale eingehen. Für $n = 2$ ergiebt sich als Specialfall der schon von Mathieu für das zweite Potential aufgestellte Green'sche Satz. E. Jahnke.

---

R. Güntsche, **Beitrag zur Integration der Differentialgleichung:** $\frac{dy}{dz} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3$. Wissenschaftliche Beilage zum Programm der Dritten Realschule zu Berlin. Gaertner. 1893.

Die vorliegende Programmabhandlung bildet theilweise die Ergänzung beziehungsweise Fortsetzung zu der Inaugural-Dissertation des Verfassers, über welche Referent bereits Gelegenheit gehabt hat zu referiren. (Vergl. Bd. XXXV S. 105.) In dem Falle, wo die Integralgleichung die Form hat:

$$\prod_{i=1}^{3} (A_i + y)^{h_i} = cB, \quad \sum_{i=1}^{3} h_i = 0,$$

wird die in jenem Referate angedeutete Lücke ausgefüllt: Der von dem Verfasser in der Inaugural-Dissertation aufgestellte Satz, wonach die zugehörige Differentialgleichung stets in eine solche mit constanten Coefficienten transformirt werden kann, behält in der That allgemein seine Giltigkeit. Auch die Behandlung des Falles, wo die Integralgleichung lautet:

$$\prod_{i=1}^{4} (A_i + y)^{h_i} = cB, \quad \sum_{i=1}^{4} h_i = 0,$$

wird verallgemeinert, insofern, als die Anzahl der in der Inaugural-Dissertation gemachten Annahmen verringert wird. (Vergl. das Referat Bd. XXXV S. 106.) Es gelingt, die Differentialgleichung auf eine einfache Form zu transformiren.

Ein anderer Theil der Programmabhandlung legt eine zweite Methode zu Grunde, um Integrationsfälle der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dz} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3$$

zu gewinnen. Herr Appell hat in Liouville's Journal (4) V eine Reihe solcher Integrationsfälle nachgewiesen. Derselbe Weg wird auch hier betreten, um weitere Integrationsfälle aufzustellen. E. Jahnke.

**Die quadratische Zerfällung der Primzahlen.** Von Dr. H. Scheffler. Leipzig 1892. Foerster. 169 S.

Die vorliegende Schrift versucht die von Eisenstein für die drei speciellen Fälle $q = 8n + 3$, $7n + 2$, $7n + 4$ angestellten Untersuchungen zu verallgemeinern und entwickelt ein Verfahren, um die Primzahlen der Form $q = pn + m$ und die Zahlen $\lambda q^t$, $\lambda$, $t$ ganze Zahlen, in die quadratische Form $A^2 \mp pB^2$, wo $p$ als Primzahl vorausgesetzt ist, zu zerfällen. Insbesondere behandelt sie die Zerfällung der Primzahlen von der Form $8n + 1$, $8n + 3$, $8n + 5$, $8n + 7$.

Ein Anhang beschäftigt sich noch mit der Auflösung der quadratischen Congruenzen, entwickelt Sätze über Binomial- und Polynomialcoefficienten und giebt zum Schluss Kriterien einer Primzahl und ein strenges Verfahren zur Bestimmung der Factoren einer Zahl.

E. Jahnke.

---

**Geerling's Rechenbuch.** Hand- und Hilfsbuch für höhere und Subalternbeamte, Militäranwärter und Praktikanten, welche zum Zwecke ihrer Anstellung oder Beförderung in höhere Amtsstellungen eine Prüfung im Rechnen abzulegen haben. 12. Aufl. Leipzig 1892. Gestewitz. 104 S. 2 Mk.

Nach einer Uebersicht über die Paragraphen der bezüglichen Prüfungsordnungen, giebt der Verfasser eine Anleitung, die einzelnen Rechnungsarten richtig aufzufassen und die einfachsten Aufgaben zu lösen. Von den Elementen aufsteigend, behandelt er die Anwendung der vier Species in der Regeldetri — insbesondere die Zinsrechnung (incl. Discont- und Wechselrechnung), die Gewinn- und Verlustrechnung, die Vertheilungs-, Mischungs- und Kettenrechnung. Die Aufgaben sind allen möglichen Gebieten des praktischen Lebens, soweit es für Militäranwärter in Betracht kommt, entnommen; u. A. finden sich auch Aufgaben über die Invaliditäts- und Versicherungsberechnungen. Hierauf folgt eine Anleitung zur Berechnung von Flächen und Körpern, erläutert durch zahlreiche Aufgaben. Den Schluss bildet eine Unterweisung im algebraischen Rechnen, insbesondere also in der Lösung von Aufgaben mittelst Gleichungen, wobei auch Aufgaben aus dem Gebiete der Mechanik behandelt werden (gleichförmige, gleichförmig beschleunigte Bewegung, der freie Fall, der senkrechte Wurf u. s. w.).

Unter den Aufgaben, insbesondere unter den geometrisch eingekleideten, finden sich einige, die auch an höheren Lehranstalten verwendet zu werden verdienen. Dagegen leidet das geometrische Einleitungskapitel, wo übrigens allgemein übliche Bezeichnungen ohne Grund geändert worden sind, an Ungenauigkeiten in der Ausdrucksweise.

E. Jahnke.

---

J. Schnellinger. **Fünfstellige Tafeln für die Zehner-Logarithmen der natürlichen und trigonometrischen Zahlen.** Wien 1892. Manz. 2,80 Mk.

Es wird der Versuch gemacht, das Logarithmenrechnen mit fünf Decimalen genauer als bisher zu vermitteln, und eine Reihe von Ver-

besserungen vorgeschlagen, um die Uebersichtlichkeit der Tafeln und die Sicherheit im Rechnen zu erhöhen. So ist u. A. die Logarithmenänderung für 10 Zehntel entgegen dem bisherigen Gebrauche durch Buchstaben ausgedrückt, welche auf die beigefügten Hilfstafeln verweisen. In der Tafel der trigonometrischen Zahlen sind, wie es bei den natürlichen Zahlen schon üblich war, ebenfalls die höchsten gemeinsamen Stellen des Logarithmus herausgehoben worden. Für das Aufsuchen des Logarithmus einer trigonometrischen Zahl, wenn der Winkel Sekunden enthält, wird eine einfachere Regel aufgestellt. Auch gewisse Mängel der bisherigen Art, die Nebentafeln (*P.P*) zu berechnen, sind in glücklicher Weise vermieden. Dagegen sind die natürlichen Zahlen nicht zu je 50 auf die Seiten vertheilt, sondern nur zu je 35. Die Ausstattung des Buches darf, besonders hinsichtlich der Typenwahl, eine vorzügliche genannt werden, und erscheinen daher diese verbesserten Logarithmentafeln geeignet, weitere Verbreitung zu finden.

E. Jahnke.

---

H. Wehner. **Leitfaden für den stereometrischen Unterricht an Realschulen.** Leipzig 1892. B. G. Teubner. 54 S.

Der vorliegende Leitfaden ist nach Umfang des Stoffes und Methode im Besonderen für den Gebrauch an Realschulen geschrieben, wo dem stereometrischen Unterricht nur kurze Zeit zubemessen ist. Die Auswahl des Stoffes und seine Behandlung ist eine geschickte. So stützt der Verfasser die Berechnung der Körper durchgehend auf den Cavalieri'schen Grundsatz; was aber hierbei an Strenge verloren geht, wird an Kürze, Einfachheit und Uebersichtlichkeit gewonnen. Bei den Beweisen findet sich neben der Synthesis auch die Analysis in knapper Form angedeutet. Doch sind den regelmässigen Körpern nur zwei Seiten gewidmet, was etwas gering bemessen sein dürfte. Auch lassen die Figuren durchweg die Hauptlehren der Perspective vermissen. Der dritte Abschnitt enthält 141 Aufgaben.

E. Jahnke.

---

# Bibliographie

## vom 1. Februar bis 15. April 1894.

### Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-phys. Classe. 18. Bd. München, Franz. 8 Mk.

Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-phys. Classe. 1893. 3. Heft. Ebendaselbst. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-phys. Classe. 1893. VII—IX. Leipzig, Hirzel. 3 Mk.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Classe. 60. Bd. Wien, Tempsky. 60 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Classe II a. 102 Bd. 8. Heft. Ebendaselbst. 4 Mk. 30 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 28. Jahrgang. 4. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Annalen der Physik und Chemie. Namenregister zum 151—160. Bd., nebst Ergänzungsbänden VII und VIII der Poggendorff'schen Reihe und zu Bd. 1—50 der Reihe von Wiedemann. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Mittheilungen der mathem. Gesellschaft in Hamburg. 3. Bd. 4. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. 1 Mk.

Mathematische Berichte aus Ungarn. 10. Bd. zweite Hälfte und 11. Bd. erste Hälfte. Budapest, Kilian. 8 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 23. Bd. Herausgegeben von E. Lampe. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. 13 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1887. 43. Jahrg. 3. Abtheilung (Physik der Erde. Von Assmann). Berlin, G. Reimer. 17 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1888. 44. Jahrg. 1. Abtheilung (Physik der Materie. Von Börnstein). Braunschweig, Vieweg. 20 Mk.

Annalen des physikal. Centralobservatoriums zu Petersburg. 1892. Zwei Theile. Herausgegeben von H. Wild. Leipzig, Voss. 25 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch der meteorologischen Beobachtungen der Magdeburger Wetterwarte. 9. Bd. Magdeburg, Faber. 6 Mk.

Meteorologisches Jahrbuch d. königl. preuss. Beobachtungssystems. Beobachtet im Jahre 1890. 3. Heft. Herausgeg. von W. v. Bezold. Berlin, Asher. 22 Mk.

Deutsche überseeische meteorologische Beobachtungen. Herausgegeben von der deutschen Seewarte. 6. Heft. Hamburg, Friedrichsen. 7 Mk.

Aus dem Archiv der deutschen Seewarte. Herausgegeben von der Direction. 16. Jahrgang. Hamburg, Friedrichsen. 15 Mk.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1892. Beobachtungssystem der deutschen Seewarte. 15. Jahrgang. Ebendaselbst. 13 Mk.

Mémoires de l'académie des sc. de St. Pétersbourg. VII. série, tome XLI, No. 6—8. Leipzig, Voss. 18 Mk.

## Reine Mathematik.

Kronecker, L., Vorlesungen über Mathematik. 1. Bd. Einfache und vielfache Integrale. Herausg. von E. Netto. Leipzig, B. G. Teubner. 12 Mk.

Heffter, L., Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen. Leipzig. Ebendaselbst. 6 Mk.

Weinmeister, P, Sammlung mathem. Formeln und Sätze. Leipzig, Sigismund & Volkening. 1 Mk. 50 Pf.

Bussler, F., Sammlung mathematischer Aufgaben für Oberclassen. Dresden, Ehlermann. 1 Mk. 40 Pf.

Reum, A., Der mathem. Lehrstoff für Secunda bez. Prima. Essen, Bädecker. 60 Pf.

Holzmüller, G., Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik. 1. Theil. Leipzig, B. G. Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Martus, H., Leitfaden für den Unterricht in der Raumlehre. 2. Theil. Bielefeld, Velhagen & Klasing. 1 Mk. 80 Pf.

Descartes, R., Die Geometrie. Deutsch von L. Schlesinger. Berlin. Mayer & Müller. 3 Mk.

Schwering, K., Stereometrie für höhere Lehranst. Freiburg, Herder. 80 Pf.

—— Anfangsgründe der analyt. Geometrie. Ebendaselbst. 40 Pf.

**Angewandte Mathematik.**

Astronomisches Jahrbuch für 1896. Herausgegeben von der Berliner Sternwarte unter Leitung von F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Förster, W. und P. Lehmann, Die veränderlichen Tafeln des preuss. Normalkalenders für 1895. Berlin, Verlag des statist. Bureaus. 5 Mk.

Gyldén, H., Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales. Tome I. Théorie générale. Berlin, Mayer & Müller. 28 Mk.

Martin, P., Untersuchungen über d. wahrscheinlichste Bahn d. Kometen 1825, I und dessen Identität mit dem Kometen 1790, III (Dissert.). Göttingen. Vandenhoeck & Ruprecht. 3 Mk. 60 Pf.

Heath, R., Lehrbuch der geometrischen Optik. Deutsch von R. Kanthack. Berlin, Springer. 10 Mk.

**Geschichte der Astronomie.**

Berthold, G., Der Magister Joh. Fabricius und die Sonnenflecken. Eine Studie. Leipzig, Veit & Co. 1 Mk. 80 Pf.

**Physik und Meteorologie.**

W. Weber's Werke. Herausgegeben von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 4. und 6. Bd. (Schluss). Berlin, Springer. 32 Mk.

Das Ausdehnungsgesetz der Gase. Abhandlungen von Gay-Lussac, Dalton, Dulong und Petit, Rudberg, Magnus und Regnault. Aus Ostwald's „Classiker der exacten Wissenschaften". Nr. 44. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Richter, M., Die Lehre von der Wellenberuhigung. Berlin, Oppenheim. 2 Mk.

Kayser, H. und C. Runge, Die Spectren der Elemente. 7. Abschnitt. Berlin, G. Reimer. 2 Mk.

Du-Bois, H., Magnetische Kreise, deren Theorie und Anwendung. Berlin, Springer. 10 Mk.

Hoppe, E., Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten. Leipzig, Barth. 2 Mk. 20 Pf.

# Mathematisches Abhandlungsregister.

## 1893.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

## A.

### Analytische Geometrie der Ebene.

1. Limite du rapport des tangentes en deux points infiniments voisins d'une courbe jusqu' à leur point d'intersection sous certaines conditions. E. Cesaro. Mathesis Série 2, III, 257.
2. Propriété des podaires. E. Catalan. Mathesis Série 2, III, 124.
3. Propriété du limaçon de Pascal. Gob. Mathesis Série 2, III, 144.
4. Construction d'un angle dont la tangente soit le carré de la tangente d'un angle donné. Fraipont. Mathesis Sér. 2, III, 95.
5. Courbe servant à construire un angle dout le cosinus soit la racine carrée de la tangente d'un angle donné. Quint etc. Mathesis Serie 2, III, 172.
6. De la courbe $y = \frac{tg x^3}{tg 3x}$. P. Decamps. Mathesis Série 2, III, 254. — Morel ebenda 255.
7. Sur deux courbes symétriques. Joachimescu. Mathesis Série 2, III, 93. — Ghuys ebenda 94.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitte. Krümmung. Parabel. Quadratur. Rectification.

### Analytische Geometrie des Raumes.

8. Essai de géométrie analytique générale. J. de Tilly. Mathesis Série 2, III, Supplement II.
9. Sur les sphères tangentes à deux autres sphères données ainsi qu' à un plan ou à un cône de révolution. J. Neuberg. Mathesis Série 2, III, 187.

Vergl. Ellipsoid. Krümmung. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Tetraeder 154.

## B.

### Bessel'sche Functionen.

10. Ueber einige Eigenschaften der Bessel'schen Function erster Art, insbesondere für ein grosses Argument. J. H. Graf. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 115.

### Bestimmte Integrale.

11. Si a est supérieur à $-1$ on $a \int_0^1 \frac{x^a(1+x-2x^{a+1})}{1-x^2} dx = \log 2$. P. Delville. Mathesis Sér. 2, III, 72. — H. Mandart ebenda 73. — P. Mansion ebenda 74.
12. Détermination de $\int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{-m}}{(1+x) \, lg x} dx$ quand $0 < m < 1$. Walton. Mathesis Serie 2, III, 167.
13. Valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{(a \, . \cos \Theta^2 + b \, . \sin \Theta^2)^2}$. Mdme. Prime, Listray. Mathesis. Série 2, III, 26.
14. Trouver $\int_0^{\frac{\pi}{2}} arctg(x \, . \sin \vartheta) \, d\vartheta$. V. Jamet. Mathesis Série 2, III, 235.

**Binomialcoefficienten.**

15. Sur une fonction représentative des coefficients du binome. A. Laisant. Mathesis Série 2, III, 153.

## C.

**Complanation.**

16. Eine neue Formel für den Flächeninhalt der Zone eines Rotationsellipsoids. E. Roedel. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 56.

## D.

**Determinanten.**

17. Décomposition d'un déterminant de 3. degré en $x$ en trois facteurs linéaires. Retali etc. Mathesis Serie 2, III, 172.
18. Das alternirende Exponentialdifferenzenproduct. L. Schendel. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 84.

**Differentialgleichungen.**

19. Ueber lineare Differentialgleichungen, welche von Parametern unabhängige Substitutionsgruppen besitzen. L. Fuchs. Berl. Akad. Ber. 1892, 157.
20. Ueber die Relationen, welche die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit den Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen der Gruppe derselben verbinden. L. Fuchs. Berl. Akad. Ber. 1892, 1113.
21. Ueber einige lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Lohnstein. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 27.
22. Ueber die partiellen Differentialgleichungen, denen die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung genügen. E. Netto. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 357.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 1.

**Differentialquotient.**

23. Sur la formule de Leibniz pour la dérivée $m^e$ du produit $PQ$. P. Mansion. Mathesis Série 2, III, 36.

**Dreiecksgeometrie.**

24. Propriétés des projections des sommets d'un triangle sur les bissectrices intérieures. Delville. Mathesis Série 2, III, 142.
25. Sur quelques propriétés du triangle. Em. Bertrand. Mathesis Série 2, III, 155.
26. Sur les triangles formés dans l'interieur d'un cercle au moyen d'un rayon fixe, d'un rayon variable et de la corde correspondante. E. N. Barisien. Mathesis Série 2, III, 274.
27. Sur les Brocardiens d'un point par rapport à un point. Socolof. Mathesis Serie 2, III, 166.
28. Proportions dans lesquelles surviennent les cotangentes du double de l'angle de Brocard. H. Brocard u. Droz Farny. Mathesis Série 2, III, 123. — Greenstreet, Déprez, Quint, Mdlle. de Haas ebenda 124.
29. Propriété du cercle de neuf points d'un triangle. Sollertinsky. Mathesis Série 2, III, 251. — J. Déprez ebenda 252.
30. Sur le cercle orthocentroidal. Mdme. Prime. Mathesis Série 2, III, 33.

Vergl. Ellipse 40. Hyperbel 92, 95.

## E.

**Elasticität.**

31. Zur Theorie der Ausdehnung von Hohlkörpern. A. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 224.

**Elektricität.**

32. Das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik. H. v. Helmholtz. Berl. Akad. Berl. 1892, 459.
33. Elektromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung. H. v. Helmholtz. Berl. Akad. Ber. 1892, 1093.

**Ellipse.**

34. Sur le produit des coordonnées d'un point de l'ellipse par rapport à ses axes. Bellens etc. Mathesis Série 2, III, 233. — Retali etc. ebenda 234. — Brocard ebenda 234.

35. Trouver la relation qui existe entre la longueur d'une corde de l'ellipse, les rayons vecteurs des deux extrémités et les distances des deux foyers à cette corde. Barisien. Mathesis Série 2, III, 98.
36. Lieu des foyers d'une ellipse dont un diamètre est donné en grandeur et en position, son conjugué en grandeur seulement. Droz, Déprez. Mathesis Série 2, III, 52. — Mandart, Denys, Jeřabeck ebenda 53.
37. Sur les distances muturelles des pièds des quatre normales abaissées d'un point à une ellipse. Droz-Farny etc. Mathesis Série 2, III, 258.
38. Sur l'hyperbole équilatère passant par quatre points d'une ellipse, dont les normales partent d'un point commun. Barisien. Mathesis Série 2, III, 259.
39. Lieu du point de contact des tangentes parallèles à une direction donnée à une série d'ellipses ou d'hyperboles homofocales. Barisien. Mathesis Série 2, III, 150.
40. Quartique obtenue au moyen de l'ellipse de Steiner. Droz-Farny. Mathesis. Serie 2, III, 70.
41. Courbe du 6 ordre lieu du point de rencontre de deux tangentes d'une ellipse, qui tourne dans son plan autour de son centre. Barisien. Mathesis Série 2, III, 125.

Vergl. Krümmung 121.

**Ellipsoid.**

42. Sur les lignes de courbure de l'ellipsoide. J. Neuberg. Mathesis Série 2, III, 244.

## F.

**Functionen.**

Vergl. Bessel'sche Functionen. Bestimmte Integrale. Binomialcoefficienten. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Geschichte der Mathematik 71. Gleichungen. Kettenbrüche. Maxima und Minima. Reihen.

## G.

**Geometrie (höhere).**

43. Geometrische Lehrsätze. B. Sporer. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 318.
44. Darstellung der Curven dritter Ordnung und Classe aus zwei Reciprocitäten. Chr. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 65.
45. Ueber die Stellen innigster Berührung einer ebenen Curve dritter Ordnung mit einer ebenen Curve $n^{ter}$ Ordnung. M. Disteli. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 257.
46. Ueber eine besondere cubische Raumcurve (die gleichwinklige cubische Hyperbel). H. Krüger. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 344.
47. Sur les courbes du quatrième ordre qui ont trois points doubles d'inflexion. Balitrand. Mathesis Série 2, III, 5. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 110.]
48. Ueber einen zerfallenden quadratischen Strahlencomplex. Kilbinger. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 376.

Vergl. Geschichte der Mathematik 62, 64.

**Geschichte der Mathematik.**

49. Sur la propagation des signes numériques cunéiformes. V. Bobynin. Biblioth. math. 1893, 18.
50. Note sur la résolution géométrique d'une équation du 3e degré par Archimède. H. G. Zeuthen. Biblioth. math. 1893, 97.
51. Ein mathematischer Papyrus in griechischer Sprache. M. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, Hist.-liter. Abthlg. 81.
52. Un nuovo documento relativo allo logistica greco-egiziana. G. Loria. Biblioth math. 1893, 79.
53. Nachtrag zur Uebersetzung des Mathematikerverzeichnisses im Fihrist. H. Suter. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, Hist.-liter. Abthlg. 126. [Vergl. Bd. XXXVIII Nr. 96.]
54. Der V. Band des Katalogs der arabischen Bücher der viceköniglichen Bibliothek in Kairo. H. Suter. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, Hist.-liter. Abthlg. 1, 41, 161.
55. Zur Geschichte der Trigonometrie. H. Suter. Biblioth. math. 1893, 1.
56. Die Mathematik bei den Juden. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1893, 65, 105.

57. Mathematische Werke in hebräischen Uebersetzungen. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1893, 51.
58. Sopra un codice ebraico contenente alcuni scritti matematici ed astronomici. P. Riccardi. Biblioth. math. 1893, 54. — M. Steinschneider ebenda 73.
59. Die beiden Euklidausgaben des Jahres 1482. G. Valentin. Biblioth. math 1893, 33.
60. Intorno ad una pretesa seconda edizione dell' Algebra di Rafael Bombelli. Biblioth. math. 1893, 15.
61. Zur Geschichte der Decimalbrüche. K. Hunrath. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, Hist.-liter. Abthlg. 25.
62. Desarguns und Pascal über die Kegelschnitte. C. J. Gerhardt. Berl. Akad. Ber. 1892, 183.
63. Maupertuis. E. du Bois-Reymond. Berl. Akad. Ber. 1892, 393.
64. Sur le théorème de Stewart. Mackey. Mathesis Série 2, III, 63.
65. Notizen zur Geschichte der Physik. G. Berthold. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, Hist.-liter. Abthlg. 121.
66. Nota storica sulla variazione delle latitudini. O. Z. Bianco. Biblioth. math. 1893, 75.
67. Eine seltene Schrift über Winkeldreitheilung. G. Valentin. Biblioth. math. 1893, 113.
68. Ancora sul teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. G. Loria. Biblioth. math. 1893, 47.
69. L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della storia delle matematiche. G. Loria. Biblioth. math. 1893, 39.
70. Le centenaire de Lobatschefsky. P. Mansion. Mathesis Série 2, III, 117, 193.
71. Sur les découvertes mathématiques de Wronski. S. Dickstein. Biblioth. math. 1893, 9.
72. Notice sur C. Gerono. Mathesis Série 2, III, 46. [Vergl. Bd. XXXVIII Nr. 388.]
73. Todesanzeige von E. Kahl (24./II. 1827—31./I. 1893). O. Schlömilch und M. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, Hist.-liter. Abthlg. 120.
74. Nécrologue d'Albert Ribaucour (28./XI. 1845—13./IX. 1893). P. Mansion. Mathesis Série 2, III, 270.

**Gleichungen.**

75. Die Normalform des allgemeinen Wurzelausdrucks und ihre Eigenschaften. G. F. Lipps. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 321.
76. Zur Resultantenbildung. L. Schendel. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 87.
77. Zur Theorie der Sturm'schen Functionen. L. Schendel. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 90.
78. Pièges mathématiques. Rebière etc. Mathesis Série 2, III, 184, 224.
79. Démonstration d'une certaine identité. Sollertinsky. Mathesis Série 2, III, 122. — Catalan ebenda 136.
80. $A$ et $B$ étant positifs et $m$ entier positif on a toujours $(A+B)^m < 2^{m-1}(A^m+B^m)$. Delahaeye, Droz-Farny. Mathesis Série 2, III, 210.
81. Égalités entre quantités proportionelles. J. Wasteels. Mathesis Série 2, III, 57.
82. Résolution trigonométrique de l'équation $x^2+px+q=0$. Bloume. Mathesis Série 2, III, 64.
83. Sur les polynômes $P_n = x^{2k} - x^k + 1$. Joachimescu et Vladimirescu. Mathesis Série 2, III, 50.
84. Sur l'équation $(x-a)(x-b)(x-c) - A(x-a) - B(x-b) - C(x-c) = 0$. Fauquembergue. Mathesis Série 2, III, 48.
85. Sur l'équation du 4e degré. Cl. Servais. Mathesis Série 2, III, 67.
86. Condition pour que deux équations du second de gréaient une racine commune. E. Gelin. Mathesis Série 2, III, 265.
87. Résolution d'un système de trois équations cubiques. Mandart. Mathesis Série 2, III, 97.
88. Trouver les valeurs de $y$ et de $z$ telles que les polynômes $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + y$, $x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x + z$ aient un facteur commun du second degré. Lippens. Mathesis Serie 2, III, 149.

Vergl. Geschichte der Mathematik 50, 68.

## H.

**Hydrodynamik.**

89. Theorie und Versuche über hydraulichen Druck. A. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 48.
90. Der Mittlepunkt des hydrostatischen Druckes in ebenen Figuren. A. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 371.

### Hyperbel.

91. Hyberbole passant par deux points donnés et par les points de contact des tangentes menées des premiers points à une conique donnée. Cl. Servais. Mathesis Série 2, III, 20. [Vergl. Bd. XXXVIII Nr. 132.]
92. Sur l'hyperbole de Feuerbach. J. Neuberg. Mathesis Série 2, III, 81.
93. Sur les perpendiculaires à une asymptote d'une hyperbole tirées par les extrémités de ses diamètres de courbure. Droz Farny. Mathesis Série 2, III, 71. — Mandart ebenda 72.
94. Sur l'hyperbole équilatère. J. Neuberg. Mathesis Série 2, III, 92.
95. Sur l'hyperbole équilatère passant par les points de Nagel et de Gergonne correspondant au cercle inscrit d'un triangle donné. Sollertinsky. Mathesis Série 2, III. 23. — Droz ebenda 23. — Déprez ebenda 24.
96. Lieu d'un point $M$ dans le plan d'un rectangle $ABCD$ tel que les triangles $ABM$, $BCM$, $CDM$, $DAM$ aient des cercles circonscrits égaux. P. H. Schoute. Mathesis Série 2, III, 171.

Vergl. Ellipse 38, 39.

### Hyperboloid.

Vergl. Oberflächen zweiter Ordnung 128. Tetraeder 154.

## K.

### Kegelschnitte.

97. Einige Methoden der Bestimmung der Brennpunktscoordinaten und Achsengleichungen eines Kegelschnittes in trimetrischen Coordinaten. Stoll. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 282.
98. Ueber eine Potenzbeziehung bei den Curven zweiter Ordnung. Theod. Meyer. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 253.
99. Ersatz des Pascal'schen Satzes für den Fall imaginärer Punkte. J. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 381.
100. Sur les points de rencontre des droites joignant les extrémités d'un diamètre d'une conique avec un foyer et du diamètre conjugué. Sollertinsky, Droz-Farny etc. Mathesis Série 2, III, 273.
101. Quatre points conjugués harmoniques dans une conique. Barisien. Mathesis Série 2, III, 173. — J. Neuberg ebenda 174. — L. Meurice ebenda 174.
102. Sur les coniques homofocales. Cl. Servais. Mathesis Série 2, III, 129.
103. Théorèmes sur les courbes et les surfaces du second ordre. Barbarin. Mathesis Série 2, III, 60.
104. Ueber eine besondere mit dem Kegelschnittbüschel in Verbindung stehende Curve. B. Sporer. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 34.

Vergl. Ellipse. Geschichte der Mathematik 62. Hyperbel. Kreis. Krümmung 119, 120, 121. Parabel.

### Kettenbrüche.

105. Ueber Kettenbrüche, die durch Ausziehen einer Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl entstehen. H. Willgrod. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 366.

### Kinematik.

106. Mechanische Vorrichtungen zum Zeichnen von Curven zweiter Ordnung. W. Jürges. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 350.
107. Construction der Burmester'schen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck. R. Müller. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 129. [Vergl. Bd. XXXVIII Nr. 160.]
108. Die Brennpunktmechanismen. L. Burmester. Zeitschr. Math. Phys XXXVIII, 193.

### Kreis.

109. Propriété du cercle inscrit à un triangle. Droz-Farny et Thiry. Mathesis Série 2, III, 238.
110. Inscrire dans un cercle donné un triangle isoscèle tel que la somme des distances du centre du cercle aux trois côtés du triangle soit égale à une longueur donnée. Delahaye etc. Mathesis Série 2, III, 203.
111. Les côtés d'un triangle étant divisés en $P$, $Q$, $R$ dans un même rapport et en $P'$, $Q'$, $R'$ dans le rapport inverse chercher l'axe radical des cercles $PQR$ et $P'Q'R'$. Mdme. Prime, Mandart, Droz, Déprez. Mathesis Série 2, III, 28.

112. Trois parallélogrammes ayant pour centre commun le centre d'un cercle donné. P. Delville. Mathesis Série 2, III, 118. — Droz-Farny, Catania, Déprez ebenda 119.
113. La troisième diagonale d'un quadrilatère inscriptible est tangente commune de deux circonférences passant chacune par les milieux des deux autres diagonales. Droz-Farny. Mathesis Série 2, III, 24. — Sollertinsky, Emmerich ebenda 25. — Déprez ebenda 26.
114. Sur les polygones inscrits d'un nombre pair de côtés tels que le produit des côtés de rang pair est égal à celui des côtés de rang impair. Sollertinsky. Mathesis Série 2, III, 121.
115. Différents lieux géométriques se rapportant à deux circonferences qui se coupent orthogonalement et dout chacune passe par deux sommets d'un quadrilatère. A. Morel. Mathesis Série 2, III, 201.
Vergl. Dreiecksgeometrie 26, 29, 30.

**Krümmung.**

116. Untersuchungen über die auf die Krümmung von Curven und Flächen bezüglichen Eigenschaften der Berührungstransformationen. R. Mehmke. Zeitschr. Math. Phys. XXXIII, 7. [Vergl. Bd. XXXVIII Nr. 172.]
117. Das Verhältniss der Krümmungsradien im Berührungspunkte zweier Curven. E. Wölffing. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 237.
118. Rayon de courbure de certaines courbes planes. J. Neuberg. Mathesis Série 2, III, Supplément I.
119. Sur les rayons de courbure de coniques. E. Cesaro. Mathesis Série 2, III, 217.
120. Construction du centre de courbure d'une conique. Sollertinsky. Mathesis Série 2, III, 250.
121. Construction des centres de courbure d'une ellipse. E. N. Barisien. Mathesis Série 2, III, 75.
122. Courbes dont les cercles de courbure passent par un point fixe P. Mansion. Mathesis Série 2, III, 120. — Gob ebenda 144. — E. Cesaro ebenda 177, 186.

## M.

**Maxima und Minima.**

123. Eine Erweiterung des Maximumbegriffes. A. Voigt. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 315.

**Mechanik.**

124. Questions de mécanique. L. Meurice. Mathesis Série 2, III, 222, 243.
125. Ueber bedingt periodische Bewegungen eines materiellen Punktes auf Oberflächen zweiter Ordnung mit besonderer Berücksichtigung der Grenzfälle. O. Pund. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 95, 165.
Vergl. Elasticität. Elektricität. Geschichte der Mathematik 63. Hydrodynamik. Kinematik. Optik. Schwerpunkt. Wärmelehre.

## O.

**Oberflächen.**

126. Sur une sorte de surface de révolution engendrée par une courbe variable de forme. E. Genty. Mathesis Série 2, III, 100
Vergl. Krümmung 116.

**Oberflächen zweiter Ordnung.**

127. Une propriété des quadriques. Cl. Servais. Mathesis Série 2, III, 14, 64.
128. Propriété de l'hyperboloïde passant par trois droites données dans l'espace. E. Genty. Mathesis Série 2, III, 211. — Sollertinsky ebenda 212.
129. Sur les quadriques homofocales. Cl Servais. Mathesis Série 2, III, 186. — J. Neuberg ebenda 186.
Vergl. Ellipsoid. Kegelschnitte 103. Mechanik 125.

**Optik.**

130. Die kleinste Ablenkung im Prisma. A. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 319. [Vergl. Bd. XXXVIII Nr. 218.]
131. Construction des Collineationscentrums eines dioptrischen Systems. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 190. [Vergl. Bd. XXXVIII Nr. 221.]
Vergl. Electricität 33.

## P.

### Parabel.

132. Sur des paraboles inscrites à un triangle. Servais. Mathesis Série 2, III, 208. — Barisien ebenda 209. — J. Neuberg ebenda 210.
133. Sur les deux paraboles circonscrites à un quadrangle donné. Kluyver. Mathesis Série 2, III, 106.
134. Sur un nouveau groupe de trois paraboles. Mandart. Mathesis Série 2, III, 10.

### Planimetrie.

135. Pièges mathématiques. G. Delahaye etc. Mathesis Série 2, III, 169, 185, 225.
136. Discussion et construction d'un triangle étant donnés l'angle $A$, le côté a et le produit $b(b+c)$. Mathesis Série 2, III, 192.
137. Propriétés de deux triangles. J. Wasteels. Mathesis Série 2, III, 89.
138. Construction d'une valeur approchée de $\pi$. A. L. Poirier. Mathesis Série 2, III, 248.
139. Encore un quadrateur. J. B. J. Dessoye. Mathesis Série 2, III, 248.
140. Trisection par tatonnement d'un angle. A. Pegrassi. Mathesis Série 2, III, 247.
141. Construction d'une moyenne proportionelle. Mackay. Mathesis Série 2, III, 47. — Uhlich ebenda 136. [Vergl. Bd. XXXVIII Nr. 229]
    Vergl. Dreiecksgeometrie.

## Q.

### Quadratur.

142. Aire de la cycloïde. Holzmüller. Mathesis Série 2, III, 166.

## R.

### Rectification.

143. Un nouveau quadrateur. C. Lopez. Mathesis Série 2, III, 137.
    Vergl. Planimetrie 138, 139.

### Reihen.

144. Limite on génératrice. P. Mansion. Mathesis Série 2, III, 225.
145. Sur deux series convergentes pour $|x| < 1$ qui deriennent divergentes lorsque $x = 1$. E. Cesaro. Mathesis Série 2, III. 241.
146. Sommation des sinus et des cosinus d'angles en progression arithmétique. L. Meurice. Mathesis Série 2, III, 19.

## S.

### Schwerpunkt.

147. Volume et centre de gravité du prismatoïde. Frétille. Mathesis Série 2, III, 138, 169.

### Sphärik.

148. Propriété du quadrangle sphèrique. Déprez. Mathesis Série 2, III, 231. — J. Neuberg ebenda 232.
149. La droite $XAX'$ passant par le sommet $A$ d'un triangle $ABC$, étudier la sphère qui a son centre sur cette droite et qui passe par les points $B$ et $C$. Mathesis Série 2, III, 190.
    Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 9.

### Stereometrie.

150. Lacune dans les élémens de la théorie du plan. P. Mansion. Mathesis Série 2, III, 47. — Delboeuf ebenda 134.
151. Ein stereometrisches Analogon zum Pythagoreischen Lehrsatze. O. Beau. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII. 383.
152. Sur une droite dans l'intérieur d'un tétraèdre Absolonne. Servais, J. Neuberg. Mathesis Série 2, III, 206.
153. Application de la formule du prismatoïde. Droz-Farny. Mathesis Série 2, III, 247.

## T.

### Tetraeder.

154. Ueber besondere affine Räume. F. Bützberger. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 1.
155. Zur hyperboloidischen Lage von Tetraederpaaren. P. Muth. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 314.
    Vergl. Stereometrie 152.

### Trigonometrie.

156. Ueber die Construction von Vierecken aus den Radien der Berührungskreise eines Dreiecks. O. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 310.
157. Eine einfache Berechnung des Siebzehnecks. Bochow. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 250.
158. Démonstration d'une identité dans laquelle entrent des fonctions trigonométriques. Delahaye u. Listray. Mathesis Série 2, III, 55.
159. Équations entre les fonctions trigonométriques de trois angles. Déprez. Mathesis Série 2, III, 206.
160. Relation entre les cosinus de quatre angles dont la somme est un multiple de $2\pi$. Van Dorsten. Mathesis Série 2, III, 96. — Catania ebenda 97.

Vergl. Geschichte der Mathematik 55. Gleichungen 81, 82. Reihen 146.

## W.

### Wärmelehre.

161. Der Wärmeaustausch an der Erdoberfläche und in der Atmosphäre. W. von Bezold. Berl. Akad. Ber. 1892, 1139.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung.

162. Ueber ein neues Ausgleichungsverfahren bei der Aufstellung von Sterbetafeln. L. Anton.. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 61.
163. Ueber die Ermittelung der Sterblichkeit, Invalidität u. s. w. bei Gesammtheiten mit ein- und austretenden Personen. W. Küttner. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 148.
164. Eine Anwendung der Theorie des Tauschwerthes auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung. G. Helm. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 374.

## Z.

### Zahlentheorie.

165. Ueber einen Satz Euler's aus der Partitio numeri. L. Goldschmidt. Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, 121.
166. Équation entre deux séries, les signes des membres de l'une dépendant d'une condition arithmologique. E. Cesaro. Mathesis Série 2, III, 205.
167. Sur la base du système de numération dans lequel aucun des nombres 10101, 101010101, 1010101010101 etc. n'est premier. C. Bergmans etc. Mathesis Série 2, III, 144.
168. Sur une somme de deux carrés qui est aussi la somme de trois, de quatre et de cinq carrés. Mandart. Mathesis Série 2, III, 235.
169. Si un nombre premier $p$ n'est pas la somme de deux carrés, $p^2$ est la somme de trois carrés. E. Catalan. Mathesis Série 2, III, 256.
170. Tout nombre entier qui est une somme de trois carrés peut se mettre sous la forme d'une somme de quatre carrés fractionnaires. J. Neuberg. Mathesis Série 2, III, 137, 168.
171. Sur l'équation $(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)=u^2+v^2+w^2$. E. Catalan. Mathesis Série 2, III, 105.
172. Mettre $x^{10}-5^5.y^{10}$ sous la forme d'un produit de trois facteurs entiers. Fauquembergue. Mathesis Série 2, III, 70.

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Zur Kreismessung des Archimedes.

Von

FRIEDRICH HULTSCH

in Dresden.

Für die Logistik und Arithmetik der alten Griechen fliessen unsere Quellen weit spärlicher als für die Geometrie. Immerhin aber lassen sich die grossen Lücken der Ueberlieferung einigermaassen dadurch ergänzen, dass wir den Methoden nachspüren, nach denen die Alten zu gewissen, uns überlieferten Endresultaten von Rechnungen gelangt sind. Auf diesem Wege ist aus den Handbüchern der praktischen Geometrie und Stereometrie, welche auf Heron von Alexandria zurückzuführen sind, schon mancher, früher unbekannter Satz der alten Logistik wieder ermittelt worden und vieles Andere der Art wird sich aus derselben Quelle noch schöpfen lassen. Aber schon vor Heron hat Archimedes durch seine Sandrechnung und seine Kreismessung eine vollkommen ausgebildete Kenntniss der Logistik und allgemeinen Arithmetik uns bezeugt; nur erschwert es die kurze Fassung beider Schriften ungemein, das Lehrgebäude der Arithmetik wieder herzustellen, das einst Archimedes mit voller Beherrschung der Theorie, wie der Praxis, sich gebildet hatte. Während er nun in der Sandrechnung zu einer reinen Darstellung des decimalen Systems gelangte und alles Rechnen auf die Operationen mit den Zahlbegriffen *eins* bis *neun* und auf die Einreihung jeder innerhalb dieser Grenzen gefundenen Zahl nach ihrer decimalen Stellung beschränkte*, so konnte er bei der Kreismessung ein ähnliches rationelles Verfahren nicht zulassen. Denn dann hätte er eine bisher unbekannte Rechnungsweise nach Zehnteln, Hunderteln u. s. w. einführen, mithin die Abtheilungen δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά, μυριοστά u. s. w. bilden müssen, in deren jeder dann nur von 1 bis 9 zu zählen war. Das wäre also unsere decimale Bruchrechnung, nur im fremdartigen Gewande griechischer Zahlwörter und Zahlzeichen gewesen. Allein niemals, weder vor noch nach Archimedes, ist ein Grieche

* Vergl. in Wissowa's Real-Encyclopädie der classischen Alterthumswissenschaft Archimedes von Syrakus § 6.

auf diese Gruppirung der Brüche nach dekadischen Nennern gekommen, und das ist nicht zu verwundern, da es keine decimale Stellenbezeichnung vermittelst der uns geläufigen neun Ziffern und der Null gab. Vielmehr wurde, um auch die feinsten Brüche übersichtlich darzustellen, entweder sexagesimal getheilt*, oder man bildete nach Analogie der Sexagesimalbrüche Abtheilungen von μυριοστά in erster, zweiter Potenz u. s. w., also Myriadenbrüche, wie wir sie kurz bezeichnen dürfen (siehe unten Abschn. II, III).

Allein für Archimedes war bei allen arithmetischen Darstellungen die Rücksicht auf das Maass des Verständnisses, das er im Allgemeinen bei seinen Zeitgenossen voraussetzen konnte, entscheidend.** So wies er in der Sandrechnung die Unendlichkeit der Zahlenreihe nach, ohne auch nur ein einziges Zahlwort abweichend von dem gewöhnlichen Sprachgebrauche zu bilden, so rechnete er auch in der Kreismessung, wo allenthalben mit gebrochenen Zahlen zu operiren war, in den üblichen gemeinen Brüchen und beschränkte die Endresultate seiner vielverschlungenen Rechnungen auf leicht aussprechbare Abrundungen.

* Die Bildung grosser Zahlen nach sexagesimaler Gruppirung liegt den Darstellungen Platon's über die geometrische Zahl zu Grunde (VIII. Buch vom Staate S. 546 B.C, und vergl. Hultsch in dieser Zeitschr., hist.-lit. Abtheilung XXVII 1882 S. 51 bis 54, 58 bis 60). Eine Theilung nach Sechzigsteln, und zwar angewendet auf den rechten Winkel, erscheint bei Aristarchos von Samos (s. Nachrichten von der K. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen 1893 S. 373). Die bis heute übliche astronomische Sexagesimaltheilung tritt schon bei Hypsikles (um 180 v. Chr.) in vollkommen ausgebildeter Gestalt hervor (Manitius, des Hypsikles Schrift Anaphorikos, Progr. Kreuzsch. Dresden 1888 S. V flg., XXIX flg.). Bei Ptolemaios wird nicht nur der Kreis in dieser Weise eingetheilt, sondern es werden auch die Einhundertzwanzigstel des Diameters (d. i. Sechzigstel des Radius) gezählt nach Ganzen (τμήματα), Sechzigsteln dieser Ganzen, zweiten Sechzigsteln u. s. w.

** Aehnlich hat schon Herakleides in seiner Biographie des Archimedes (bei Eutokios zu Archim. Kreismessung S. 266, 1 Heib.) sich geäussert. Nur ist ihm nicht beizustimmen, wenn er sein Urtheil dahin zuspitzt, Archimedes habe bei seiner Kreismessung lediglich auf den Bedarf des praktischen Lebens Rücksicht genommen (ἔστι τοῦτο τὸ βιβλίον — πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον), eine Meinung, welche dann Eutokios am Schlusse seines Commentars weiter ausführt (S. 300, 20 bis 302, 13). Auch insofern hat Herakleides, vom streng mathematischen Standpunkte aus, ungenau sich ausgedrückt, als er die Lösung des Archimedes schlechthin bezeichnet als ein σύνεγγυς δεδεῖχθαι (S. 266, 5). Denn σύνεγγυς bedeutet nach dem allgemeinen Gebrauche der griechischen Mathematiker einen Näherungswerth schlechthin, nicht einen Werth, der an sich unbestimmbar bleibt und nur zwischen zwei Grenzen eingeschlossen werden kann (in letzterem Sinne bezeichnet Eutokios S. 300, 18 ganz richtig die Herstellung einer noch engeren Umgrenzung durch ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγαγεῖν). Für den alltäglichen Bedarf aber taugt ein solcher, lediglich umgrenzter Werth gar nicht. In der That haben die Späteren von Heron an, wenn sie für das praktische Rechnen eine Näherung brauchten (abgesehen davon, dass manche auf

## I.

Ueberliefert sind uns in der Kreismessung* der Reihe nach folgende auslaufende Brüche von Wurzelwerthen aus mehrstelligen Zahlen:

$$\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ \frac{9}{11},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{4}.$$

Die Nachrechnung hat ergeben, dass damit Annäherungen, statt

$$\frac{169}{2.591+1},\ \frac{359\frac{33}{64}}{2.1172+1},\ \frac{1211\frac{1}{16}}{2.2339+1},\ \frac{4152}{2.3013}$$

u. s. w., gesetzt worden sind.** Also hat Archimedes, nur um sich dem populären Verständniss anzubequemen, die ziemlich complicirten Brüche, auf welche er durch den Gang der Ausrechnungen kam, durch auffällig starke, für uns zum Theil schwer verständliche Kürzungen auf Brüche mit den einstelligen Nennern 2, 4, 6, 8 gebracht. Nur ausnahmsweise hat er einen

---

noch ungenauere Werthe verfielen), lediglich den oberen und so bequemen Archimedischen Grenzwerth $3\frac{1}{7}$ verwendet, niemals aber mit der Umgrenzung zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ gerechnet. Hätte Archimedes ein *σύνεγγυς*, d. i. eine mittlere Näherung zwischen seinen beiden Grenzwerthen aufstellen und dabei auf einen Bruch mit zweistelligem Nenner sich beschränken wollen, so wäre es ihm, wie die folgenden Erörterungen zeigen werden, ein Leichtes gewesen, $3\frac{14}{99}$ ausfindig zu machen (denn $\frac{14}{99}$ ist zu $\frac{1}{7}$ der nächste kleinere Bruch mit zweistelligem Nenner und andererseits möglichst weit von $\frac{10}{71}$ entfernt). Hätte er aber, immer das praktische Bedürfniss berücksichtigend, einen noch genaueren und doch thunlichst bequemen Mittelwerth mit dreistelligem Nenner gesucht, so würde sich ihm $\frac{443}{141}=3\frac{20}{141}$ dargeboten haben, wie noch (in Abschnitt IV) zu zeigen ist. Allein von alledem hat er Nichts gethan, also auch nicht bei Abfassung seiner Schrift die Tendenz verfolgt, dem Bedarfe des gewöhnlichen Lebens zu dienen. Wohl aber hat er, genau wie bei der Sandrechnung (die doch aller Praxis fern lag), zwar ganz abstract mathematisch gedacht und die schwierigsten Folgerungen in kürzester und deshalb oft schwer verständlicher Form aneinander geknüpft, die Endresultate aber durchaus in Anlehnung an den populären Sprachgebrauch ausgedrückt, mithin in dieser Hinsicht ganz dem allgemeinen Verständniss seiner Zeitgenossen sich anbequemt.

* Archimedis opera rec. Heiberg I S. 264 bis 270. Ausserdem werden S. 268, 15 und 270, 2 behufs Kürzung von Brüchen, die im Laufe der Rechnung sich ergeben haben, die Brüche $\frac{4}{13}$ und $\frac{11}{40}$ verwendet.

** Siehe das Nähere in meiner Abhandlung: „Die Näherungswerthe irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes“ in Nr. 10 des Jahrganges 1893 der Nachrichten von der K. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen S. 419 bis 423, 413 bis 418.

Bruch mit zweistelligem Nenner, $\frac{9}{11}$, gesetzt; allein es liess sich gerade in diesem Falle nachweisen, dass die nächste Kürzung, auf welche an dieser Stelle die Ausrechnung ihn führen musste, $\frac{3}{4}$ war, und statt dessen $\frac{9}{11}$ nur aus dem Grunde gewählt worden ist, um später einen Bruch durch 40 kürzen zu können.*

Da alle diese Brüche weit grösseren ganzen Zahlen angefügt und diese ganzen Zahlen, beziehentlich ihre Quadrate, für den Fortgang der Rechnung hauptsächlich massgebend sind, so haben die starken Kürzungen der auslaufenden Brüche keinen nachtheiligen Einfluss auf das Schlussresultat der Kreismessung ausgeübt.**

Wenn man nun alle diese Rechnungen bis ins Einzelste verfolgt, so stellt sich zunächst heraus, dass Archimedes nicht nur recht schwierige Operationen mit gemeinen Brüchen geläufig durchgeführt, sondern auch die Aufgaben, verschiedene gemeine Brüche mit einander zu vergleichen und Brüche mit vierstelligen Nennern thunlichst zu kürzen, auf durchsichtige Formeln zurückgeführt hat.

Dies gilt offenbar auch für den Schluss sowohl des ersten als des zweiten Theiles der Beweisführung zum dritten Satze der Kreismessung. Durch seine Ausrechnungen war Archimedes auf die Umgrenzung:

$$3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} > \pi > 3 + \frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}}$$

geführt worden.*** Diese umständlichen Brüche mussten möglichst gekürzt werden, um das Schlussergebniss der Kreismessung für das allgemeine Verständniss zurecht zu machen.

Nach Ausweis der handschriftlichen Ueberlieferung hat Archimedes statt des eben angeführten oberen Grenzwerthes die Näherung $3\frac{1}{7}$, und statt des unteren $3\frac{10}{71}$ gesetzt. Die erstere Abrundung ergab sich ihm sofort, wenn er nach einer anderwärts bewährten Methode den Nenner des gegebenen Bruches um 1 verminderte. Denn da es sich um den oberen Grenzwerth handelte, so musste der statt $\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$ gesuchte, möglichst zu kürzende Bruch einen grösseren Werth darstellen, und dieser wurde erreicht durch Verkleinerung des Nenners. Da nun von dem gegebenen

---

* Vergl. meine vorher angeführte Abhandlung S. 417 flg.

** Ebenda S. 420 flg.

*** Archim. ed. Heib. I S. 266, 13; 270, 7 und vergl. meine vorher angeführte Abhandlung S. 389, 392 flg.

Nenner nur etwa $\frac{1}{5000}$ dieses Nenners abgezogen wurde, so lag von vornherein eine an Gewissheit grenzende Wahrscheinlichkeit vor, dass mit der Kürzung $\frac{1}{7}$ die allergeeignetste Annäherung statt des berechneten Bruches gefunden sei. Ueberdies wird bald sich zeigen, dass zu $\frac{1}{7}$ der nächste kleinere Bruch mit zweistelligem Nenner $\frac{14}{99}$ ist. Da nun $\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} > \frac{14}{99}$ ist, so liegt klar vor Augen, dass Archimedes, entsprechend dem unteren Grenzwerthe $\frac{10}{71}$, als oberen Grenzwerth nur $\frac{10}{70} = \frac{1}{7}$ finden konnte.

Nicht so glatt verlief die Kürzung des anderen berechneten Bruches. Als oberer Grenzwerth war angesetzt $3\frac{1}{7}$, dann kam als kleinerer Werth der im zweiten Theile des Beweises berechnete Bruch:

$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} = 3 + \frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}},$$

und statt dessen musste ein noch kleinerer gekürzter Werth gesucht werden. Da als obere Grenze hinter den 3 Ganzen bereits der Bruch $\frac{1}{7}$ gefunden war, so bot sich zunächst als untere Grenze der nächste Bruch mit einstelligem Nenner $\frac{1}{8} = \frac{1}{7+1}$ dar. Somit war die Umgrenzung:

$$\frac{1}{7} > \frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} > \frac{1}{7+1}$$

hergestellt.

Nun würde es eine ganz müssige Frage sein, ob nicht Archimedes bei $\frac{1}{8}$ als unterem Grenzwerthe sich hätte beruhigen können*; denn die Ueberlieferung lehrt, dass er $\frac{10}{71}$ gesetzt und damit eine weit genauere Annäherung als $\frac{1}{8}$ gewählt hat.

Wir schliessen hieraus, dass er seine Umgrenzung für $\pi$ durch Brüche, deren Nenner kleiner als 100 sind, auszudrücken beabsichtigte. Es trat demnach bei der unteren Begrenzung die Aufgabe an ihn heran, in der Reihe $\frac{1}{7} > \frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} > \frac{1}{8}$ zwischen dem zweiten und dritten Gliede einen

* Dieser für die Praxis bequeme Näherungswerth findet sich zuerst bei Vitruvius, dann bei indischen Mathematikern und später noch bei Bouvelles (1470 bis 1533) und Albrecht Dürer (1471 bis 1528). Cantor, Vorles. über Gesch. der Mathematik I² S. 508 (vergl. mit II 290 flg.), 602 (vergl. mit II 427), II 353 flg., 427, 483.

Bruch mit zweistelligem Nenner einzuschalten, der möglichst nahe bei dem zweiten Gliede liegen sollte.

Gewiss ist die Annahme zulässig, Archimedes habe den elementaren Satz gekannt, dass, wenn $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ist, auch $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$ ist. Mehrere Hilfssätze, welche Aristarchos über die Grössen und Entfernungen von Sonne und Mond und Archimedes in der Kreismessung angewendet haben, lassen sich aus dem Sammelwerke des Pappos als Bestandtheile alter mathematischer Hilfsbücher nachweisen*, und da bei Pappos VII Propos. 8 der Theilsatz, dass, wenn $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ist, auch $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d}$ ist, sich vorfindet, so spricht alle Wahrscheinlichkeit dafür, dass schon Archimedes auch diesen ganz elementaren und für das ihm vorliegende Problem unerlässlichen Hilfssatz, und zwar in der vollen Form: $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$ gekannt hat.**

Nun sind meines Erachtens zwei Fragen genau auseinander zu halten, nämlich erstens, auf welchem Wege Archimedes die von ihm gesuchte Einschaltung zwischen $\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}}$ und $\frac{1}{8}$ gefunden hat, und zweitens, nach welcher Methode er, nachdem er auf $\frac{10}{71}$ gekommen war, sich davon überzeugte, dass dieser Bruch in der That die nächste, den Voraussetzungen der Rechnung entsprechende Annäherung darstellt.

Anlangend die erste Frage habe ich unter verschiedenen Möglichkeiten, die sich darboten, diejenige Lösung vorgeschlagen, welche vermittelst des Endgliedes $\frac{1}{8}$ am einfachsten darzustellen ist.*** Den früher besprochenen oberen Grenzwerth hatte Archimedes vergrössert, indem er den Nenner um 1 verminderte und dadurch unmittelbar auf die Kürzung $\frac{1}{7}$ kam. Nach dieser Analogie war hier, bei dem unteren Grenzwerthe, zunächst Vergrösserung des Nenners um 1 zu versuchen, um einen kleineren Grenzwerth

* Siehe meine vorher angeführte Abhandlung S. 373, 2, 375, 1 und 2, 389, 1, 392, 1, 394, 1.

** Vergl. ebenda S. 425. Ohne von dem Satze des Pappos Kunde zu haben (denn die Ausgabe von Commandino ist erst 1588/89 erschienen) hat Nicolas Chuquet in seinem im Jahre 1484 verfassten *Triparty en la science des nombres* den Satz, jedoch ohne Beweis, aufgestellt, dass der Zahlenwerth $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ immer zwischen $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ liegt. Cantor, Vorles. II S. 318, 322 flg. Bei Brüchen mit gleichem Nenner fällt eine solche Einschaltung zusammen mit dem arithmetischen Mittel.

*** Näherungswerthe u. s. w. S. 424 flg.

zu finden. Der Weg der Rechnung lag klar vor Augen, sobald man den gegebenen Bruch $\frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$ (S. 270, 7 Heib.) zerlegte in $3\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} = 3\frac{1137}{8069}$ und nun zu dem letzteren Nenner 1 hinzuzählte. Der so gewonnene kleinere Bruch liess sich durch 3 kürzen, und aus der Ungleichung $\frac{379}{2690} > \frac{1}{8}$ ergab sich nun das Zwischenglied $\frac{379+1}{2690+8} = \frac{10}{71}$.

Der noch rückständige Beweis aber, dass $\frac{10}{71}$ in der That zu $\frac{1137}{8069}$ den nächsten unteren Grenzwerth mit zweistelligem Nenner darstellt, ist folgendermaassen zu führen.*

Zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{7+1}$ lassen sich unendlich viele Zwischenglieder von der Form $\frac{n}{7n+1}$ einschieben, wobei für $n$ eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl, die $> 1$ ist, eingesetzt werden kann. Je grösser $n$ wird, desto näher liegt der so gebildete Bruch bei der oberen Grenze $\frac{1}{7}$, und umgekehrt um so näher bei $\frac{1}{8}$, je mehr sich $n$ dem Werthe 1 nähert.

Allenthalben nun, wo es sich darum handelt, verschiedene, uns überlieferte Annäherungen für $\pi$ mit einander zu vergleichen, wird es sich empfehlen, jedesmal die Werthe für $n$ auszurechnen und in Vergleich zu

---

* Den von hier bis S. 131 reichenden Abschnitt habe ich niedergeschrieben, nachdem mir von Prof. Franz Rietzsch, dem ich schon in der Abhandlung über die Näherungswerthe meinen Dank auszusprechen hatte, folgende Vermuthung mitgetheilt worden war, wie Archimedes von der Begrenzung $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{1137}{8069}$ auf die Abrundung $\pi > 3\frac{10}{71}$ gekommen sei: Da der Bruch $\frac{1}{7} = \frac{2}{14} = \frac{3}{21} = \cdots = \frac{n}{7n}$ zu gross war, so suchte Archimedes einen Bruch $\frac{n}{7n+1}$, der kleiner als $\frac{1137}{8069}$ war, aber möglichst nahe bei diesem Bruche lag. Aus der Ungleichung $\frac{n}{7n+1} < \frac{1137}{8069}$ folgte $n < 10\frac{37}{110}$, also, da $n$ eine ganze Zahl bedeutet, $n = 10$, d. h. $\frac{10}{71}$ war derjenige Bruch, welcher den gestellten Bedingungen genügte. Für $n < 10$ werden die Brüche zu klein und für $n > 10$ zu gross. Es ist nämlich, wenn man der Reihe nach $n = 1, 2, 3 \ldots$ setzt, $\frac{1}{8} < \frac{2}{15} < \frac{3}{22} \cdots$, und es zeigt sich $\frac{9}{64} < \frac{10}{71} < \frac{1137}{8069} < \frac{11}{78}$. Hätte Archimedes einen Bruch mit dreistelligem Nenner zugelassen, so würde er $n = 10\frac{37}{110+1} = 10\frac{1}{3}$ gesetzt und daraus für $\pi$ die untere Begrenzung $3\frac{31}{220}$ ermittelt haben.

stellen. Um im Folgenden unnöthige Weiterungen zu vermeiden, werde ich die zu jedem Werthe für $\pi$ berechnete Zahl $n$ die Kennziffer nennen.

Zwischen zwei beliebigen Gliedern der eben erwähnten Reihe lässt sich jedesmal ein Zwischenwerth von der Form $\frac{a+c}{b+d}$ einschieben. Selbstverständlich liegt die Kennziffer jedes so berechneten Zwischenwerthes zwischen den Kennziffern der beiden Grenzwerthe.

Da Archimedes zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{8}$ nur Brüche mit zweistelligem Nenner gesucht hat, so ist die ganze Reihe dieser Brüche, von $\frac{1+1}{7+8}=\frac{2}{15}$ aus, nach beiden Seiten hin zu entwickeln.

Aufsteigend von $\frac{2}{15}$ erhalten wir $\frac{3}{22}, \frac{4}{29} \cdots \frac{10}{71} \cdots \frac{14}{99}$. Letzteres Glied stellt den nächsten Bruch mit zweistelligem Nenner bei dem obersten Grenzwerthe $\frac{1}{7}=\frac{10}{70}$ dar.

Herabsteigend von $\frac{2}{15}$ erhalten wir $\frac{2+1}{15+8}=\frac{3}{23}$, dann $\frac{4}{31}$ u. s. w., bis zu $\frac{12}{95}$, dem nächsten Bruche mit zweistelligem Nenner bei dem untersten Grenzwerthe $\frac{1}{8}$.

Das Mittelglied $\frac{2}{15}$, von dem wir ausgingen, trägt die Kennziffer 2; davon aufsteigend erhielten wir Glieder mit den Kennziffern 3 bis 14, herabsteigend solche mit den Kennziffern $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$ u. s. w. bis $1\frac{1}{11}$.

Um nun die vollständige Reihe aller Brüche mit zweistelligem Nenner zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{8}$ zu erhalten, sind ausser den eben erwähnten Kennziffern noch diejenigen aufzusuchen, welche ebenfalls auf Zwischenwerthe mit den Nennern $<100$ führen. So giebt uns die Kennziffer $6\frac{1}{2}$ den Bruch $\frac{13}{93}$, den wir zwischen $\frac{7}{50}$ und $\frac{6}{43}$ (Kennziffern 7 und 6) einzuordnen haben. Demnächst führt die Kennziffer $5\frac{1}{2}$ auf $\frac{11}{79}$, zwischen $\frac{6}{43}$ und $\frac{5}{36}$, u. s. w.

Doch sehen wir jetzt von den übrigen Einschaltungen ab, da alle diese Werthe $<\frac{7}{50}$ sind. Für die Archimedische Rechnung allein würden wir ja nur die Glieder zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{10}{71}$ brauchen; da aber ein historischer

Excurs uns später noch auf andere Annäherungen für $\pi$ führen wird, so stellen wir hier in einer Uebersicht die zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{7}{50}$ liegenden Brüche mit zweistelligem Nenner zusammen und schalten je an Ort und Stelle sowohl die von Archimedes ausgerechneten Grenzwerthe als auch mehrere von späteren Mathematikern berechnete Annäherungen für $\pi$ ein. Am Schluss fügen wir noch das Endglied der ganzen Reihe, $\frac{1}{8}$, hinzu, weil auch die Näherung $3\frac{1}{8}$ in der Zeit nach Archimedes mehrmals aufgestellt worden ist.

Allen diesen Werthen, die wir kurz als unvollkommene Näherungen bezeichnen können, stehen rationale Kennziffern zur Seite (denn auch die Kennziffer zu $\frac{1}{7}$ ist, obschon unendlich gross, als eine rationale Zahl zu betrachten). Die vollkommene Näherung für die transcendente Zahl $\pi$ ist bekanntlich nach den neuesten Methoden nicht blos für jeden denkbaren Bedarf des Rechnens, sondern noch weiter über alle menschliche Fassungskraft hinaus bestimmt worden.* Für die nun folgenden Uebersichten genügt es, 8 Decimalstellen von $\pi$ aufzuführen.** Um den Vergleich mit den rationalen Näherungen zu erleichtern, sei noch bemerkt, dass zu $\pi$ nach Analogie die angenäherte Kennziffer $15{,}996\overline{6}$ gebildet werden kann. Auch die achtstelligen Annäherungen für die Werthe $\frac{U}{D}$ und $\frac{U'}{D}$ (wobei $D$ den Diameter, $U$ bez. $U'$ den Umfang des um- und des eingeschriebenen 96-Ecks bezeichnen) mögen sammt ihren angenäherten Kennziffern*** zunächst hier Platz finden:

---

* Vergl. F. Rudio: Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre, vier Abhandlungen über die Kreismessung u. s. w. S. 41 flg., besonders S. 46.

** Für die Bezeichnung angenäherter Werthe durch Decimalbrüche stehen bekanntlich zwei Methoden zu Gebote, entweder die Hinzufügung von Punkten hinter der letzten Stelle, oder die Erhöhung der letzten Stelle um 1 und Ueberstreichung dieser erhöhten Zahl, wenn die nächste Stelle = 5 oder $> 5$ sein würde, während die letzte Zahl ohne Strich bedeutet, dass die nächste Stelle $< 5$ sein würde. Ich habe in den folgenden Uebersichten die zweite Bezeichnungsweise vorgezogen, nicht blos, weil sie im Allgemeinen üblicher ist, sondern auch, weil sie den Vortheil gewährt, dass man je eine Stelle weniger zu setzen braucht, um annähernd denselben Grad von Genauigkeit zu erreichen, wie wenn man je eine Stelle mehr niederschreibt und dann Punkte beifügt. Auch hier habe ich die freundliche Mitwirkung von Rietzsch, der unaufgefordert alle Annäherungen nachgerechnet und jede letzte Stelle fixirt hat, mit Dank zu erwähnen.

*** Berechnet nach den zehnstelligen Annäherungen 3,142714600 beziehentlich 3,141031953.

| Angenäherte Kennziffer. | Annäherung, auf 8 Stellen ausgerechnet. |
|---|---|
| 143,029 | $\frac{U}{D} = 3{,}1427146$ |
| $15{,}996\bar{6}$ | $\pi = 3{,}141592\bar{6}$ |
| 11,0385 | $\frac{U'}{D} = 3{,}141031\bar{9}$ |

Hieraus ist sofort ersichtlich, dass in der folgenden Tabelle der von Metius aufgestellte Mittelwerth (vergl. unten IV) der Zahl $\pi$ am allernächsten liegt. Ferner ist leicht zu ersehen, dass die oberen, von verschiedenen Mathematikern gesetzten Grenzwerthe sämmtlich, wie es sein soll, grösser sind als $\frac{U}{D}$, dass aber unter den unteren Grenzwerthen, die sämmtlich kleiner als $\frac{U'}{D}$ sein sollen, derjenige von Leonardo irrthümlich grösser als $\frac{U'}{D}$ ausgefallen ist.

| Kennziffer. | Annäherung für $\pi$. | Nachweis der Mathematiker, welche die Annäherung gefunden haben, und andere Bemerkungen. |
|---|---|---|
| $\infty$ | $3\frac{1}{7} = 3{,}142857$ | Obere von Archimedes gesetzte Annäherung. |
| $667\frac{1}{2}$ | $3\frac{1335}{9347} = 3{,}14282\bar{7}$ | Oberer von Archimedes ausgerechneter Grenzwerth. |
| $163\frac{1}{2}$ | $3\frac{327}{2291} = 3{,}142732$ | Oberer von Leonardo von Pisa berechneter Grenzwerth. |
| $39\frac{1}{11}$ | $3\frac{430}{3021} = 3{,}14233\bar{7}$ | Berechnet nach einer Construction des Nicolaus Cusanus. |
| 20 | $3\frac{20}{141} = 3{,}14184\bar{4}$ | Annäherung, die aus den Archimedischen Grenzwerthen abgeleitet werden kann. |
| $19\frac{1}{2}$ | $3\frac{39}{275} = 3{,}141818$ | Annäherung des Leonardo von Pisa. |
| 17 | $3\frac{17}{120} = 3{,}14166\bar{7}$ | Annäherung des Ptolemaios.<br>Obere von Metius gesetzte Grenze. |
| $16\frac{1}{11}$ | $3\frac{2832}{20000} = 3{,}1416$ (genau) | Annäherung d. Aryabhatta nach einem griechischen Autor, der um das 3. b. 4. Jahrh. n. Chr. gelebt hat |
| 16 | $3\frac{16}{113} = 3{,}14159\bar{3}$ | Annäherung des Metius. |
| 15 | $3\frac{15}{106} = 3{,}141509$ | Untere von Metius gesetzte Grenze. |
| 14 | $3\frac{14}{99} = 3{,}141414$ | Nächster Werth mit zweistelligem Nenner, der kleiner als $3\frac{1}{7}$ ist (siehe oben S. 122 Anm.**). |

| Kennziffer. | Annäherung für $\pi$. | Nachweis der Mathematiker, welche die Annäherung gefunden haben, und andere Bemerkungen. |
|---|---|---|
| 13 | $3\frac{13}{92} = 3{,}141304$ | — |
| 12 | $3\frac{12}{85} = 3{,}141176$ | — |
| $11\frac{5}{26}$ | $3\frac{291}{2063} = 3{,}14105\overline{7}$ | Unterer von Leonardo von Pisa berechneter Grenzwerth. |
| 11 | $3\frac{11}{78} = 3{,}14102\overline{6}$ | Annäherung des Orontius Finaeus. |
| $10\frac{37}{110}$ | $3\frac{1137}{8069} = 3{,}14091\overline{0}$ | Unterer von Archimedes ausgerechneter Grenzwerth. |
| 10 | $3\frac{10}{71} = 3{,}140845$ | Untere von Archimedes gesetzte Annäherung. |
| 9 | $3\frac{9}{64} = 3{,}140625$ (genau) | — |
| 8 | $3\frac{8}{57} = 3{,}14035\overline{1}$ | — |
| 7 | $3\frac{7}{50} = 3{,}14$ (gen.) | Annäherung des Liu-hwuy. |
| 1 | $3\frac{1}{8} = 3{,}125$ (genau) | Annäherung für die Praxis nach Vitruvius, Bouvelles, Dürer u. A. (siehe oben S. 125 Anm.*). |

Wir kehren nun zu Archimedes zurück. Als unteren Grenzwerth hatte er berechnet $3\frac{1137}{8069} = 3 + \frac{1137}{7 \cdot 1137 + 110}$. Der auslaufende Bruch trägt also die Kennziffer $\frac{1137}{110} = 10\frac{37}{110}$ und liegt mithin zwischen $\frac{11}{78}$ und $\frac{10}{71}$ (Kennziffern 11 und 10). Da nun ein kleinerer Bruch als $\frac{1137}{8069}$ erforderlich ist, so ergiebt sich $\frac{10}{71}$ als der nächste untere Grenzwerth, wenn der Nenner des Bruches $< 100$ bleiben soll.

## II.

Wie Eutokios in seinem Commentare (S. 300, 15 bis 302, 13 Heib.) mittheilt, ist die Kreismessung des Archimedes zunächst von dessen jüngerem Zeitgenossen Apollonios von Perge, später von Philon von Gadara und von dessen Schüler Sporos von Nikaia in der Schrift *Ἀριστοτελικὰ κηρία** kritisirt worden. Unter diesen hat nur Sporos es

* Bei Eutokios ist (S. 300, 23) *Πόρος* überliefert; aber im Commentar zum 2. Buche über Kugel und Cylinder (S 90, 4 Heib.) wird *σπόρος* durch die beste Handschrift bezeugt. Daher hat schon Fabricius Biblioth. Gr. IV S. 203 Harles. stillschweigend die Namensform *Sporus* nicht blos für Eutokios S. 90, 4, sondern auch für S. 300, 23 in Anspruch genommen und zugleich festgestellt, dass die S. 300, 26 erwähnte Schrift des Sporos *κηρία* mit ihrem vollen Titel

gewagt, einen Tadel gegen Archimedes zn erheben; dieser habe nämlich die Gerade, welche dem Umfange des Kreises gleich sein soll, nicht genau ermittelt. Mit Recht nimmt Eutokios seinen Autor gegen diesen Vorwurf in Schutz, indem er, ganz im Sinne des Archimedes, betont, dass eine solche Gerade nach ihrem Verhältniss zum Durchmesser nimmermehr durch Zahlen bestimmt, sondern nur zwischen zwei, durch Zahlen ausgedrückte Grenzen eingeschlossen werden könne. Die neuesten Untersuchungen über diese Frage haben ihm Recht gegeben und zugleich, was zur Widerlegung des Sporos hier kurz bemerkt sei, erwiesen, dass eine constructive Lösung des Problems der Quadratur des Zirkels überhaupt unmöglich ist.*

Dagegen haben Apollonios und Philon, soweit wir aus dem Berichte des Eutokios ersehen können, sich darauf beschränkt, zu zeigen, dass man noch genauere Umgrenzungen für das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser finden könne, als von Archimedes gesetzt waren. Nun hat der Letztere seine ganze Darstellung von vornherein darauf gerichtet, gewisse leicht aussprechbare Grenzen festzustellen, mithin die Möglichkeit, noch genauere, wenn auch weniger leicht aussprechbare Grenzen zu finden, niemals geleugnet. Ja, er selbst hat ja genauere Werthe, und zwar Brüche mit den Nennern $4673\frac{1}{2}$ und $2017\frac{1}{4}$, das ist (nach Einrichtung der Brüche) 9347 und 8069, ausgerechnet, ehe er mit seinen Annäherungen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ abschloss. Wenn also Apollonios und Philon noch genauere Grenzwerthe gesetzt haben, so haben sie die Kreismessung des Archimedes nur nach der rechnerischen Seite hin ergänzt, nicht im Mindesten aber die Fundamente seiner Beweise erschüttert und ebenso wenig seine Annäherungen als ungeeignet nachgewiesen.

Mit geringen formalen Abweichungen berichtet Eutokios inhaltlich ganz dasselbe von Apollonios wie von Philon:

---

Ἀριστοτελικὰ κηρία (S. 264, 19) gelautet hat. Den Ausdruck κηρία, Honigwaben, deutet Tannery in Simplicii in Arist. phys. libros quattuor priores comment. ed. H. Diels, praefat. p. XXVII, unter Berufung auf Gell. N. A. praefat. 6 als *electa*, Birt, Das antike Buchwesen S. 94, als ein gelehrtes Werk voll Süssigkeit und mit Bienenfleiss zusammengetragen. Als Epoche des Sporos setzt Tannery das Ende des 3. Jahrh. n. Chr. an: s. dens. Sur les fragments d'Eudème de Rhodes in den Annales de la faculté des lettres de Bordeaux, tome IV (1882) p. 75 flg. Erwähnt wird Sporos auch in den Scholien zu Aratos und in den Doxographi p. 231 Diels: s. Tannery, Sporos de Nicée a. a. O. p. 257 flg., und Diels in seiner Ausgabe des Simplicius in Arist. phys. etc. praefat. p. XXVII. Vergl. auch Tannery, Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules in den Mém. de la société des sciences de Bordeaux, 2e série, V (1883) S. 216.

* Vergl. Rudio a. a. O. S. 6 bis 68.

*καὶ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἐν τῷ ὠκυτοκίῳ ἀπέδειξεν αὐτὸ* (das Problem der Kreismessung) *δι' ἀριθμῶν ἑτέρων ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγαγών. τοῦτο δὲ ἀκριβέστερον μὲν εἶναι δοκεῖ...* *Φίλωνα — εἰς ἀκριβεστέρους ἀριθμοὺς ἀγαγεῖν τῶν ὑπ' Ἀρχιμήδους εἰρημένων, τοῦ τε ζ' φημὶ καὶ τῶν ι' οα'.*

Dann giebt der Commentator sein Urtheil dahin ab: *ἅπαντες γὰρ ἐφεξῆς* (alle der Reihe nach, also auch die beiden eben Genannten) *φαίνονται τὸν σκοπὸν αὐτοῦ ἠγνοηκότες. κέχρηνται δὲ καὶ τοῖς τῶν μυριάδων πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς, οἷς οὐκ εὔκολον παρακολουθεῖν τὸν μὴ διὰ τῶν Μάγνου λογιστικῶν ἠγμένον.*

Vier Autoren nennt Eutokios in dem bisher besprochenen Abschnitte, und von diesen ist ihm offenbar der letzte, und gewiss auch der jüngste von allen*, verhältnissmässig am besten bekannt. Magnus lehrte also in seiner Logistik, wie man die Multiplication und die Division grosser Zahlen bewältigen könne durch die Vervielfältigung und die Theilung der Myriaden, oder, mit anderen Worten, er führte alle Ausrechnungen auf den Bereich der Zahlen von 1 bis 9999 zurück und bestimmte durch besondere Ausdrücke, welche Stufen in der ganzen Zahlenreihe, sowohl der Ganzen als der entsprechend zu benennenden Theile, jeder Myriade zukommen.

Wie wir uns des Magnus Darstellung der *πολλαπλασιασμοὶ τῶν μυριάδων* zu denken haben, das lernen wir aus dem zweiten, leider zu Anfang verstümmelten Buche der Sammlung des Pappos. Hier wird ein ausführlicher Bericht über ein verloren gegangenes, auch dem Titel nach unbekanntes Werk des Apollonios gegeben.** Trotz der lückenhaften Ueberlieferung

---

* Von dem Mathematiker Magnus ist ausser der obigen Angabe des Eutokios Nichts bekannt. Dass er jünger als Sporos war, darf nach dem Zusammenhange der Worte des Eutokios als wahrscheinlich gelten. Demnach würde die Epoche des Magnus in das 4. bis 5. Jahrhundert zu setzen sein. Eine genauere Datirung würde sich ergeben, wenn der Verfasser der Logistik identisch wäre mit dem Chronographen Magnus von Karrhai, der nach Malalas S. 329, 2 Bonn. mit dem Kaiser Julianus (361 bis 363) in Verkehr gestanden hat. Dieser Magnus wird (laut freundlicher Mittheilung von Büttner-Wobst) ausser a. a. O. auch S. 332 Bonn. von Malalas als Quelle angeführt. Nach der Annahme Mendelssohn's in seiner Ausgabe des Zosimos S. XXXIX flg. soll Magnus auch von Zosimos III, 12 bis 34 benutzt worden sein. Doch hat Büttner-Wobst: Der Tod des Kaisers Julian, in Philol. LI S. 574 Anm. 34, einen nicht unwesentlichen Einwand gegen diese Hypothese erhoben. Ein um vier Jahrhunderte jüngerer Chronograph Magnus, der zuerst von Fabricius Bibl. Gr. VII S. 444 Harles aus dem *μέγας χρονογράφος* herausgedeutet worden ist, welcher am Rande der Handschrift des Chronicon paschale verschiedene bis in das 8. Jahrhundert reichende Notizen eingetragen hat, kann hier, wo es sich um den von Eutokios citirten Mathematiker Magnus handelt, nicht in Betracht kommen.

** Pappi collectio II Propos. 14 bis 26 (S. 2 bis 24), Hultsch zu Pappos Bd. III S. 1212 flg. und Index unter *ὁμώνυμος*, Nesselmann: Algebra der Griechen

bei Pappos ist es gelungen, die Multiplicationsmethode, welche Apollonios in der verloren gegangenen Schrift zur Darstellung grösster Zahlen eingeschlagen hat, klar zu stellen, und es hat sich dabei zugleich gezeigt, dass die Schrift durch die Sandrechnung des Archimedes angeregt worden war. Man braucht nicht etwa anzunehmen, Apollonios habe darin gegen den letzteren polemisirt; aber sicher hat er zeigen wollen, dass man die Zahlenreihe bis zu unfassbar hohen Beträgen fortsetzen könne, ohne zu dem künstlichen Rahmen der Archimedischen Oktaden seine Zuflucht zu nehmen. Die Griechen beginnen, wenn sie von 1 bis 9999 Einheiten gezählt haben, wieder mit 1, nämlich der Einheit der Myriaden.* Waren nun auch die *μυριάδες*, gerade so wie vorher die *μονάδες*, ausgezählt, so liess Apollonios wieder von 1 anfangen, nämlich in dem Rahmen der *διπλαῖ μυριάδες*, wo 1 die Geltung von $10000^2$, und die folgenden Zahlen entsprechende Geltung ($2 . 10000^2$ bis $9999 . 10000^2$) hatten. Dann kam die Einheit der *τριπλαῖ μυριάδες* ($1 = 10000^3$), dann die der *τετραπλαῖ* und so fort. Wie Apollonios nach dieser Methode die Multiplication bis zu einer überaus grossen Zahl durchgeführt hat, ist aus den Sätzen des Pappos deutlich zu erkennen. Es war kein decimales Rechnen in unserem Sinne, denn es fehlten unsere Ziffern mit der Null, mithin auch die dekadische Stellenbezeichnung; aber es war dem wirklichen decimalen Rechnen so weit angenähert, als es nur immer mit griechischen Zahlwörtern und Zahlzeichen möglich ist.

Hiernach können wir das Hauptsächliche betreffs der Multiplication, wie sie in der Logistik des Magnus gelehrt wurde, wieder herstellen. Magnus liess keinen Betrag von *μονάδες* über 9999 zu. Waren so viele *μονάδες* erreicht, so begann die Zählung wieder mit 1 im Rahmen der *μυριάδες*, hiernach weiter im Rahmen der *διπλαῖ*, *τριπλαῖ μυριάδες* und so fort. Das waren also bei ihm die *μυριάδων πολλαπλασιασμοί*.

---

S. 125 flg., Cantor Vorlesungen I² 330 flg., 425 flg., Hultsch in Zeitschr. für Mathem. u. Phys., hist.-liter. Abtheil., XXVII S. 58 flg., ders. in Berliner Philol. Wochenschr. 1885 S. 569 flg. und in Wissowa's Real-Encyclopädie unter Apollonius von Perge vergl. mit Arithmetica § 10, Tannery: L'arithmétique des Grecs dans Pappus in Mém. de la soc. des sciences de Bordeaux, 2. sér., III S. 351 flg.

* Nach der Analogie von *δισχίλιοι*, *τρισχίλιοι* u. s. w. bildet der gewöhnliche Sprachgebrauch zwar auch *δισμύριοι*, *τρισμύριοι* u. s. w.; allein überall, wo es sich um eigentliche Ausrechnungen handelt, bei denen man die Zahl von 9999 Einheiten übersteigt, wird gleichmässig im Rahmen der Myriaden, wie in dem der Einheiten, von 1 aus weiter gezählt und gerechnet. Archimedes (Aren. S. 288, 24, 290, 6, 8 Heib.) hat zwar gelegentlich *μυριάκις μύριοι*, das ist die höchstmögliche Bezeichnung mit einem Zahladverb, gebildet, jedoch nur, um so viele Myriaden in allgemein verständlicher Weise zählen zu können. Dann ordnet er diese Zahl sofort in das System seiner Oktaden ein, welches lediglich zu dem Zwecke von ihm aufgebaut ist, um keine grössere Zahlbezeichnung als höchstens 9999 μυριάδες + 9999 μονάδες zuzulassen.

Wie stand es aber mit den Divisionsregeln? Zunächst ist klar, dass eine noch so grosse Zahl, als Dividendus gesetzt, rückläufig nach denselben Principien sich theilen liess, wie sie vorher zum Product angeschwollen war. In der vorerwähnten Schrift des Apollonios war die letzte Multiplication (nach Pappos Bd. I S. 24):

$$(19\,M^4 + 6036\,M^3 + 8480\,M^2)\,10\,M^9,$$

wobei statt 10 000 die griechische Abkürzung $M$ = *μυριάδες* gesetzt worden ist. Das Resultat ist:

$$196\,M^{13} + 368\,M^{12} + 4800\,M^{11}.$$

Setzen wir nun letzteres Product als Dividendus und $10\,M^9$ als Divisor, so lässt sich leicht zeigen, auf welche Weise rückläufig der Quotient $19\,M^4 + 6036\,M^3 + 8480\,M^2$ herauskommt. Schwieriger schon würde die Darstellung werden, wenn im Divisor zu den $10\,M^9$ noch eine Anzahl von $M^8$ hinzuträte, und immerfort schwieriger, je mehr Glieder, herabsteigend von der höchsten Potenz von $M$ bis zu den einfachen Myriaden und zuletzt bis zu den *μονάδες*, im Divisor sich vorfinden würden.

Das sind die *μυριάδων μερισμοί*, soweit sie unmittelbar aus den Multiplicationen bei Apollonios sich entwickeln lassen. Was geschah aber, wenn die Division nicht aufging oder von vornherein der Dividendus kleiner als der Divisor war? Auch darüber giebt Eutokios einen Wink. Um den Näherungsrechnungen des Apollonios und Philon, so sagt er, folgen zu können, müsse man nach der Logistik des Magnus geschult sein. Das sei aber schwierig, und deshalb empfehle sich weit mehr die Annäherungsmethode durch die Sexagesimalrechnung, wie sie aus der Syntaxis des Ptolemaios bekannt sei. Hieraus geht doch deutlich hervor (was übrigens schon von vornherein als wahrscheinlich gelten musste), dass Magnus mit seinen *μυριάδων μερισμοί* nicht bei den Ganzen stehen geblieben, sondern auch zur Bruchrechnung fortgeschritten ist. Und zwar kann das, wenn wir den Spuren im Berichte des Eutokios folgen, nicht anders geschehen sein, als durch fortgesetzte Umrahmung nach Myriaden, ganz analog der Umrahmung durch die Zahl 60 und ihre Potenzen bei der Sexagesimalrechnung. Er bildete also der Reihe nach Brüche mit den Nennern 10 000, $10\,000^2$ und weiter, wenn man diese Vermuthung wagen will (denn schon bis zu dem Nenner $10\,000^2$ herabzusteigen war für den Griechen eine rechnerische Herculesarbeit, und auch heutigen Tages pflegt man ja nur ausnahmsweise bis zur 8. Stelle hinter dem Komma zu rechnen).

Um nun die Zahlengruppen, auf welche Magnus durch fortgesetzte Theilung kam, zu benennen, war gewiss die Analogie der Sexagesimalrechnung massgebend. Wie vorher die Myriaden nach Potenzen gruppirt waren, um die Theilung bis zu den Monaden zu ermöglichen, so folgten nun im Quotienten die Zehntausendstel, das ist *μυριοστά* (nämlich *πρῶτα*),

dann, wenn nöthig, die μυριοστὰ δεύτερα, d. i. Brüche mit dem Nenner $10000^2$, und es konnte auch weiter gezeigt werden, dass, wenn man dieses System, unabhängig vom praktischen Rechnen, fortsetzen will, auch noch μυριοστὰ τρίτα und so fort sich ansetzen lassen.

Die Hauptsache blieb, ganz so wie bei der Rechnung nach Potenzen von Myriaden, die Feststellung des Rahmens, ehe man zur Einzelausrechnung schritt. Aus dem Divisionsexempel, welches vor kurzem in Anschluss an Apollonios aufgestellt wurde, sei jetzt, um die Vergleichung recht deutlich zu machen, die Aufgabe $(196 M^{13} + 368 M^{12}) : 10 M^9$ herausgeschnitten. Das oberste Glied des Quotienten fällt offenbar in den Rahmen der μυριάδες $^{13-9} = M^4$. Nun dividirt man 196 Ganze durch 10 Ganze, und erhält als Quotienten 19, nämlich $M^4$. Es sind aber $6 M^{13}$ als Rest geblieben. Diese werden zu $60000 M^{12}$ verwandelt und die obigen $368 M^{12}$ des Dividendus hinzugezählt. Es waren also $60368 M^{12}$ durch $10 M^9$ zu dividiren. Wiederum war zuerst der Rahmen für das nun folgende Glied des Quotienten, nämlich $M^3$, festzustellen und dann weiter zu verfahren wie vorher. Genau in dieser Weise konnte die Bruchrechnung ausgeführt werden. Behalten wir dieselben Ziffern, wie vorher, bei und stellen zunächst als Aufgabe die Division $196 : 10$ (nämlich μονάδες). Als oberstes Glied des Quotienten ergeben sich sofort 19 μονάδες. Der Rest 6 wird in Zehntausendstel verwandelt und durch weitere Division erhält man (in diesem Falle ohne Rest) ͵ς μυριοστά, die sich zu ς' δέκατα $= 0{,}6$ kürzen lassen. Ferner ist leicht zu ersehen, wie die Divisionsaufgabe $\left(196 + \frac{368}{M}\right) : 10$ mit griechischen Zahlenbezeichnungen zu lösen sein würde, und, wenn wir weiter gehen wollen, so brauchen wir nur statt 10 etwa 11 als Divisor zu wählen, um ausser den μυριοστὰ πρῶτα auch μυριοστὰ δεύτερα, τρίτα u. s. w. zu erhalten.

Wir haben soeben, im Anschluss an Apollonios, möglichst einfache Beispiele gewält; allein auch für alle anderen Fälle, mögen Dividendus und Divisor auch noch so complicirt sein, gelten dieselben Gesetze. Für die Sexagesimaltheilung haben Theon zu Ptolemaios und ein Anonymus, der besonders über die Sexagesimalrechnung gehandelt hat, die Hauptregeln uns überliefert*; wenn wir nun diese Texte zu Grunde legen und statt ἑξηκοστά allenthalben μυριοστά einsetzen, so werden wir eine möglichst angenäherte Vorstellung von den Regeln erhalten, welche Magnus in seiner Logistik über die μυριάδων μερισμοί aufgestellt hat.

Dass die Ausrechnungen in μυριοστά ungleich schwieriger waren, als die in ἑξηκοστά, fällt sofort in die Augen. Denn bei der Sexagesimal-

* Theon zum I. Buche der Syntaxis des Ptolem. S. 110 bis 113, 118 flg. Halma, Opusculum de multipl. et divis. sexagesim. Diophanto vel Pappo attribuendum S. 6 flg. Henry.

rechnung kann innerhalb einer jeden Abtheilung keine grössere Zahl als 59 vorkommen, während bei der Myriadenrechnung die Zahlen bis 9999 anschwellen. Bis 59 sind sowohl die Primzahlen, als die theilbaren Zahlen mit ihren verschiedenen Theilern leicht kenntlich, sodass ein geübter Rechner das Meiste durch Kopfrechnen erledigen kann; wenn es sich dagegen um Beträge bis 9999 handelt, so geht es nicht ohne umständliche, und zwar schriftlich zu fixirende Zwischenrechnungen ab.

Man darf es daher dem Eutokios nicht verdenken, wenn er allein die sexagesimale Theilung für praktisch brauchbar erklärt und es ablehnt, auf die schwer verständlichen *μυριάδων μερισμοί*, wie sie Magnus nach dem Vorgange des Apollonios und Philon dargestellt hatte, näher einzugehen.

(Schluss folgt.)

# Recensionen.

**Saggio d'introduzione alla teoria delle quantità complesse geometricamente rappressentate** per B. CARRARA. Cremona 1893.

Der Zweck des Werkes ist, wie der Verfasser in seiner Vorrede sagt, das Studium der geometrisch dargestellten complexen Grössen in Italien zu fördern. Diese Vorrede ist besonders aus dem Grunde interessant, weil sie eine übersichtliche Darstellung der Geschichte des in Rede stehenden Gebietes giebt. — Was den Inhalt des Werkes selbst anbetrifft, so giebt der Verfasser in dem ersten Theile die Definition der complexen Grössen, sowie die Ausführung der verschiedenen Rechnungsarten mit denselben. Im zweiten Theile bringt er zunächst einige Sätze über Reihen; sodann wendet er sich zur Functionentheorie, in welcher nur die eindeutigen Functionen betrachtet werden und entwickelt die Fundamentaleigenschaften einer Function einer complexen Variabeln, die Sätze über Wurzeln einer Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades und den Cauchy'schen Satz über bestimmte Integrale. Man ersieht hieraus, dass besonders der auf die Functionentheorie bezügliche Theil des Werkes sehr knapp gehalten ist und dass es sich wohl empfehlen würde, denselben bei späteren Auflagen etwas ausführlicher zu gestalten. Bei der Ableitung der Sätze des ersten Theiles wird im Allgemeinen die geometrische Methode bevorzugt. Die Beweisführung ist fast immer klar und verständlich, nur die Darstellung der Kreisbogen als Logarithmen (S. 56) lässt die nothwendige Deutlichkeit vermissen. Dagegen sind die Auseinandersetzungen im Anfange des ersten und im zweiten Capitel des zweiten Theiles etwas zu sehr ausgedehnt. Jedenfalls ist das Werk sehr wohl zur Einführung in das Studium der complexen Grössen geeignet. Es würde aber diesen Zweck in noch höherem Grade erfüllen, wenn der Verfasser die angedeuteten Aenderungen vornehmen würde. MAX MEYER.

---

**Lehrbuch der Geometrie** für höhere Lehranstalten von Dr. H. RUMPEN und Dr. AUG. BLIND. Druck und Verlag von Albert Ahn. Köln und Leipzig 1893.

I. Theil: Planimetrie (zweite, nach den „Lehrplänen der höheren Schulen" verbesserte Auflage).

Das vorliegende Werk zeichnet sich im Allgemeinen durch eine klare Ausdrucksweise und übersichtliche Darstellung aus, so dass es wohl der *Absicht* der Verfasser, ein gutes Schullehrbuch zu sein, entspricht. Aller-

dings ist der Inhalt nicht zu reichlich bemessen, und man vermisst manche lieb gewordenen Lehrsätze. Einige Beweise hätten wohl vereinfacht werden können, wie z. B. der des vierten Congruenzsatzes, während in anderen Fällen, wie z. B. in Aufgabe Nr. 302 „Ein gegebenes Dreieck $ABC$ von einem Punkte $E$ auf $AB$ aus in sieben gleiche Theile zu theilen“ eine etwas ausführlichere Anleitung erwünscht gewesen wäre.

II. und III. Theil: Trigonometrie und Stereometrie.

Dasselbe, was wir über Inhalt und Umfang des I. Theiles gesagt haben, gilt auch für den II. und III. Theil. Die trigonometrischen Functionen werden zunächst nur für spitze Winkel aus dem rechtwinkligen Dreieck definirt und in Verbindung mit diesen die Dreiecksberechnung auseinandergesetzt. Die trigonometrischen Functionen der stumpfen Winkel werden erst später eingeführt, während der Verlauf dieser Functionen für grössere Winkel nicht in Betracht gezogen wird. Auch die Anordnung der Lehrsätze in der Stereometrie weicht von der üblichen ab. Die Eintheilung wird nach den verschiedenen zu besprechenden Körpern ausgeführt, während die Lehrsätze über Ebenen und Linien immer nur dann erörtert werden, wenn sie zur Ableitung der Körper gebraucht werden. Weshalb der planimetrische Satz Nr. 62 bei der Besprechung des Tetraeders erst eingeschoben ist, will uns nicht einleuchten. Es wäre doch praktischer, denselben nach Erledigung der Congruenzsätze, also im I. Theil des Werkes, aufzuführen.

---

Max Meyer.

**Lehrbuch der Geometrie** für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten von Dr. Hugo Fenkner, mit einem Vorworte von Dr. W. Krumme, in zwei Theilen. Erster Theil: Ebene Geometrie. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Verlag von Otto Salle. Braunschweig 1892.

Das vorliegende Werk verfolgt einen von denjenigen der meisten Lehrbücher verschiedenen Zweck. Es will dem Schüler nicht die Kenntniss einer gewissen Anzahl von Lehrsätzen und deren Beweise übermitteln, sondern es will denselben in den Stand setzen, selbstständig die Beweise zu finden. „Der Schüler soll nicht die Beweise, sondern das Beweisen lernen“, wie es in der Vorrede heisst. Das hierzu in Anwendung gebrachte Verfahren besteht im Wesentlichen darin, dass das Lehrbuch nicht den Beweis selbst, sondern eine Analysis des Beweises giebt, welche der bei den Constructionsaufgaben üblichen ähnlich ist. „Aus den Sätzen werden diejenigen als ‘Beweismittel’ hervorgehoben, welche zum Beweise der anderen Sätze dienen.“ Ob dieses Verfahren im geometrischen Unterricht vortheilhaft ist, kann nur die Praxis entscheiden. Gewiss wird jeder Lehrer diese Methode an geeigneten Stellen anwenden, da man sich aber im Allgemeinen wohl nicht darauf beschränken kann, nur die Analysis

des Beweises durchzunehmen, so fragt es sich, ob das vorgeschriebene mathematische Pensum in der zur Verfügung stehenden Zeit auf diese Weise erledigt werden kann. Ein sehr wichtiges Erforderniss eines Lehrbuches ist es dagegen, dass die Lehrsätze in einer bestimmten und zu keiner Zweideutigkeit veranlassenden Form ausgesprochen werden. Hierauf ist aber nicht immer genügend Rücksicht genommen worden. Als Beispiele mögen folgende Fälle dienen. Lehrsatz 22: Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen. Lehrsatz 61: Die Summe der Diagonalen eines $n$ Ecks ist gleich $\frac{n.(n-3)}{2}$. Auch die Beweisführung ist nicht immer die einfachste, wie z. B. im Lehrsatz 57, in welchem es sehr wohl möglich ist, mit einer Hilfslinie auszukommen.

Max Meyer.

**Arithmetische Aufgaben.** Mit besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Trigonometrie, Physik und Chemie. Zum Schulgebrauch, sowie zum Selbstunterricht bearbeitet von Dr. Hugo Fenkner. Ausgabe A): Für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. Pensum der Prima. Verlag von Otto Salle. Braunschweig 1893.

Die unter dem vorstehenden Titel erschienene Sammlung enthält eine reiche Auswahl von Aufgaben aus dem gesammten für Prima bestimmten Gebiete, welche besonders durch die Anwendungen auf Physik und Chemie anregend wirken. Der Inhalt ist folgendermassen eingetheilt:

| | |
|---|---|
| Erster Abschnitt: | Maxima und Minima. |
| Zweiter Abschnitt: | Die Combinationslehre. |
| Dritter Abschnitt: | Der binomische Lehrsatz. |
| Vierter Abschnitt: | Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung. |
| Fünfter Abschnitt: | Die Kettenbrüche. |
| Sechster Abschnitt: | Rechnung mit complexen Zahlen. |
| Siebenter Abschnitt: | a) Arithmetische Reihen höherer Ordnung; |
| | b) Die Exponentialreihe und die logarithmische Reihe; |
| | c) Die Convergenz der unendlichen Reihen. |
| Achter Abschnitt: | Gleichungen dritten Grades. |
| Neunter Abschnitt: | Gleichungen vierten Grades. |
| Anhang: | Unbestimmte Gleichungen. |

Ob dieses Werk allerdings sich zum Selbstunterricht eignet, dürfte vielleicht zu bezweifeln sein, denn dazu sind die den Aufgaben vorangehenden Erläuterungen häufig zu kurz gefasst. Besonders gilt dies von dem Abschnitt der Combinationslehre und den arithmetischen Reihen höherer Ordnung. In der Schule dagegen dürfte aus den oben angeführten Gründen dieses Werk seinem Zweck vollkommen entsprechen.

Max Meyer.

**Die Quadratur des Kreises** von Dr. ANDR. ÓZEGOWSKI. Selbstverlag des Verfassers. In Commission von W. Niesiotowski. Ostrowo 1893.

Eine ernste wissenschaftliche Besprechung kann man dem vorliegenden Werke beim besten Willen nicht zu Theil werden lassen, und es wird, um die grosse Sachkenntniss des Verfassers zu veranschaulichen, genügen, wenn wir einzelne seiner Aussprüche anführen. So sagt er z. B. Seite 6: „Es ist uns auch bekannt, dass materielle Kreise, die einem von allen Richtungen her gleichmässigen Drucke ausgesetzt werden, sich in gleichseitige Sechsecke verwandeln. Die Kreislinie verwandelt sich hierbei in eine gerade Linie." Ferner behauptet er, dass, wenn man auf die Seite eines regelmässigen Sechsecks vom Mittelpunkte des umschriebenen Kreises ein Loth fällt, dieses Loth gleich $\frac{6}{7}$ des Radius ist. Zum Schluss gelangt der Verfasser zu folgendem Resultat: Der Umfang des Kreises ist gleich $\frac{48R}{7}$, der Inhalt gleich $R^2 . 3$. „Wir sehen, dass wir den Kreisumfang bisher zu klein und die Kreisfläche zu gross berechnet haben". Besonders genussreich gestaltet sich das Studium dieser Abhandlung dadurch, dass der Verfasser aus Princip seine Figuren nicht erklärt hat. Er spricht sich darüber folgendermassen aus: „Es würde ausreichen, nur die mathematische Figur zu liefern, die gemeinverständlich ist, und zu der sich Jeder die Lehrsätze, Behauptungen und Beweise in seiner Muttersprache aufstellen kann!" Diese Bemerkungen mögen genügen, um den wissenschaftlichen Werth dieser Arbeit zu kennzeichnen. Allen Denjenigen, welche sich einmal eine heitere Stunde bereiten wollen, können wir die Lectüre derselben dringend empfehlen.

MAX MEYER.

---

**Grundzüge der Differential- und Integralrechnung** von Dr. OTTO STOLZ, ord. Professor an der Universität zu Innsbruck. Erster Theil: Reelle Veränderliche und Functionen. Mit vier Figuren im Text. Druck und Verlag von B. G. Teubner. Leipzig 1893.

Das vorliegende Werk ist vor allen Dingen für Denjenigen zum Studium geeignet, welcher in die Differential- und Integralrechnung vom Standpunkte der neueren Functionentheorie eingeführt werden will. Für einen Anfänger ist dasselbe indessen weniger geeignet, da die functionentheoretischen Grundlagen nicht eingehend genug behandelt worden sind und auch ziemlich bedeutende Vorkenntnisse in der Reihentheorie und Algebra vorausgesetzt werden. Sehr anerkennenswerth ist die Gründlichkeit und Strenge in der Ableitung der einzelnen Beweise. Besonders interessant ist der Abschnitt über Maxima und Minima, in welchem der Verfasser auch seine eigenen Untersuchungen über Functionen mehrerer Veränderlichen darstellt. Dem gewählten Titel bleibt er indessen nicht immer treu,

indem er bei der Entwickelung der algebraischen Functionen auch complexe Veränderliche hinzuzieht. In der Integralrechnung ist noch besonders hervorzuheben, dass der Zweck und die Verwendbarkeit der einzelnen Methoden immer deutlich hervortritt.

MAX MEYER.

---

**Kritische Grundlegung der Arithmetik** von HEINRICH KLOOCK. Röhrscheid & Ebbecke. Bonn 1893.

Die vorliegende Schrift zerfällt in vier Theile:

I. Auffindungszeiten und ursprüngliche Form der hauptsächlichsten Neuheiten meiner „Neuen Arithmetik",
II. Die Arithmetik Euklids,
III. Euler,
IV. Dühring,

und bildet die Vorbereitung zu einer Arithmetik, die der Verfasser demnächst erscheinen lassen will. Der erste Theil besteht aus einer Reihe von Aufzeichnungen, welche genau mit dem Datum ihrer Entstehung versehen worden sind. Wenn es nun wohl auch interessant ist, bei einem hervorragenden Werke den allmäligen Entwickelungsgang verfolgen zu können, so darf man das in Bezug auf ein noch unveröffentlichtes Buch wohl gerade nicht behaupten. Da der Verfasser auch Vieles angeführt, was er später als irrthümlich wieder verworfen hat, so ist es sehr schwierig, dasjenige herauszuheben, was er definitiv bestehen lassen will. Sein hauptsächlicher Widerspruch gegen die bisherige Arithmetik beruht darauf, dass er die negativen irrationalen imaginären Grössen nicht als eigentliche Zahlen anerkennen will; sie sind nach ihm nur aufgeschobene Rechnungsoperationen. Indem er versucht, die einzelnen Rechnungsarten auf eine einfache Weise abzuleiten, giebt er für dieselbe folgendes Schema:

| | -Basis | | -Index | | -Product |
|---|---|---|---|---|---|
| Prim- | $a$ (Augend) | + | $b$ (Addend) | = | $c$ (Summe) |
| Bi- | $a$ (Multiplicant) | . | $b$ (Multiplicator) | = | $c$ (Product) |
| Tri- | $a$ (Basis) | hoch | $b$ (Exponent) | = | $c$ (Potenz) |

u. s. w.

Es wird nun die Frage aufgeworfen, ob man dieses Schema nicht erweitern und so zu neuen Rechnungsarten gelangen könnte, und der Verfasser findet eine solche Erweiterung in dem Ausdruck $a^{\left\{a^{[a\cdots]}\right\}(n \text{ mal})}$, für welche er die Bezeichnung $a^{(n)}$ oder $a$ in der $n^{\text{ten}}$ Bipotenz einführt. Auf die Untersuchung dieser Grössen wird aber nicht weiter eingegangen

und als Grund hierfür Folgendes angegeben: „Jedoch kamen mir schon die Bipotenzen so widerlich unzugänglich vor, dass ich überhaupt nicht versucht habe, die Intraimaginarität ihrer selbstverständlichen Umkehrungen zu erproben."

Die folgenden Abschnitte enthalten nicht eine Besprechung der gesammten Arithmetik der drei oben genannten Mathematiker, sondern beschränken sich auf die Erörterung einzelner Punkte. Wie sich der Verfasser im Allgemeinen zu diesen stellt, ist schon durch das Vorhergesagte gekennzeichnet. Bei Euklid wird besonders die Anordnung der Sätze im siebenten Buche gerügt. Sehr scharf wird mit Euler umgegangen, über dessen Algebra der Verfasser folgendes Urtheil abgiebt: „In behaglicher Breite wird die mathematische Zeichensprache, wie sie sich in den letzten Jahrhunderten herausgebildet hatte, erläutert. In fast allen Capiteln scheint das die Hauptsache zu sein. Die Lehrsätze werden nur so beiläufig als leicht durchschaubare Wahrheiten angeführt. Statt der gründlichen und strengen Beweise Euklid's findet man hier höchstens Erprobungen ihrer Richtigkeit an einzelnen Beispielen bestimmter Zahlen". Und ferner: „Wem also daran liegt, die mathematische Sondersprache und -Schrift, sowie die Hauptsätze der Arithmetik an sich ohne schärfere Begründung kennen zu lernen oder sich wieder ins Gedächtniss zurückzurufen, dem wird die lesbare und ausführliche Darstellung Euler's gute Dienste thun."

Viel günstiger wird die Arithmetik Dühring's behandelt, mit welcher sich der Verfasser in vielen Punkten einverstanden erklärt. Auf alle Einzelheiten der vorliegenden Schrift einzugehen, können wir wohl vorläufig verzichten. Der geeignete Zeitpunkt hierfür dürfte erst dann gekommen sein, wenn in dem angekündigten grösseren Werke eine zusammenhängende und eingehende Darlegung der Grundprincipien gegeben sein wird.

Max Meyer.

---

**The Method of Indeterminate Coefficients and Exponents applied to Differential Equations.** Dissertation submitted in partive fulfilment of the requirements for the degree of doctor of philosophy in the university faculty of pure Science, Columbia College by Edwin Mortimer Blake, E. M. New-York 1893.

Der Verfasser behandelt in den ersten beiden Abschnitten Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung, die aus einer endlichen oder unendlichen Summe von Gliedern der Form

$$Kx^{\alpha_0+i\beta_0}\prod_{p=1}^{p=n}\cdot y_p^{\alpha_p+i\beta_p}\left(x\frac{dy_p}{dx}\right)^{\gamma_p+i\delta_p}$$

bestehen, wo $K$ und die Exponenten complexe Constanten, $x$ die unabhängige, $y_1 \dots y_n$ die abhängigen Veränderlichen sind. Er sucht diese durch Reihen mit complexen Coefficienten zu integriren unter Anwendung der Transformation $y = x^{M+iN}(C+y')$.

Dieselbe Methode wird sodann im dritten Abschnitte auf ein System von partiellen Differentialgleichungen angewendet, deren linke Seiten aus Summen der Form bestehen:

$$K\prod_{s=1}^{s=m}\left\{x_s^{a_s+ib_s}\prod_{p=1}^{p=n}\cdot y_1^{\alpha_p+i\beta_p}\left(x\frac{dy_p}{dx_s}\right)^{\gamma_{p_s}+i\delta_{p_s}}\right\}.$$

Im vierten Abschnitte werden einige Beispiele für die Anwendbarkeit der Methode gegeben.

MAX MEYER.

---

**Lehrbuch der Stereometrie.** Auf Grund von Dr. FERD. KOMMERELL's Lehrbuch neu bearbeitet und erweitert von Dr. GUIDO HAUCK, Geh. Regierungsrath und Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin (früher Professor an der Königl. Oberrealschule zu Tübingen). Siebente Auflage (sechste der Neubearbeitung). Verlag der H. Laupp-schen Buchhandlung. Tübingen 1893.

Das Werk zerfällt in drei Bücher. Im ersten wird das Verhältniss der Geraden und Ebenen im Raume behandelt, im zweiten krumme Flächen und Vielkant, und im dritten Polyeder und Umdrehungskörper. Der Inhalt ist sehr reichlich bemessen und im Besonderen ist die Einführung des Prismatoids im Vergleich zu anderen Lehrbüchern eine sehr glückliche. Eine fernere Abweichung von den gebräuchlichen Werken besteht in der Benennung einiger Körper. Wenngleich auch im Allgemeinen in dieser Beziehung die möglichst grösste Einheitlichkeit zu wünschen ist, so dürften doch die hier eingeführten Namen schon ihrer Kürze wegen sich empfehlen. Die Beweise sind leicht verständlich dargestellt; störend wirkt es nur, dass fast durchgängig, je nachdem zwei, drei und vier Lehrsätze zusammengestellt sind, die Beweise dann erst der Reihe nach gegeben werden, ohne dass hierdurch eine wesentliche Raumersparniss bewirkt wird. In den dem eigentlichen Lehrtheil folgenden Anhängen scheint vielfach die Kraft eines Durchschnittschülers überschätzt zu sein. Vielleicht empfiehlt es sich auch, Sätze, auf die späterhin Bezug genommen wird, von dem Anhang in den Haupttheil zu versetzen.

MAX MEYER.

---

**Der Coordinatenbegriff und die Kegelschnitte in elementarer Behandlung.** Ein Beitrag zur Einführung der neuen Lehrpläne vom Oberlehrer Dr. WILHELM KRIMPHOFF. Programmbeilage zum Jahresbericht des Königl. Gymnasiums zu Paderborn. Junfermann'sche Buchdruckerei. Paderborn 1893.

Es wird zunächst der Coordinatenbegriff kurz auseinander gesetzt und die Gleichung der geraden Linie und des Kreises abgeleitet. Sodann wendet sich der Verfasser zur Theorie der Kegelschnitte, von welchen in dem vorliegenden Theile nur die Ellipse behandelt ist. Die betreffenden Lehrsätze werden aber auf rein synthetischem Wege abgeleitet, während die Gleichung der Ellipse erst zum Schluss entwickelt wird. Auf diese Weise

fehlt die eigentliche Verbindung zwischen dem ersten und zweiten Theile, und der Schüler erkennt hierbei nicht die Bedeutung der Coordinaten für die Behandlung der Kegelschnitte. Dass die Abhandlung nur die nothwendigsten Sätze enthält, ist bei ihrem geringen Umfange von 32 Seiten wohl selbstverständlich.

Max Meyer.

---

**Synthetische Geometrie der Kegelschnitte** nebst Uebungsaufgaben für die Prima höherer Lehranstalten von Dr. J. Lange, Oberlehrer an der Fr. Werder'schen Oberrealschule in Berlin. Verlag von H. W. Müller. Berlin 1893. Preis 1.20 Mk.

Zunächst werden die wichtigsten Sätze über die harmonischen Gebilde kurz abgeleitet und die Fundamentaleigenschaften der Ellipse, Hyperbel und Parabel auf elementarem Wege entwickelt. Sodann werden diese drei Curven als Schnitte eines geraden Kegels mit einer Ebene betrachtet, und die Erörterung für dieselben von hier ab, so weit dieses möglich ist, gemeinsam durchgeführt. Die Auswahl der gebotenen Lehrsätze ist sehr reichlich, so dass in dieser Beziehung wohl allen Wünschen genügt wird. Die letzten Abschnitte über projectivische und involutorische Beziehungen hätten allerdings entbehrt werden können, denn diese Untersuchungen erhalten nur dann ihre richtige Bedeutung, wenn sie als Grundlage einer Theorie der Kegelschnitte dienen, während sie hier nur in einem losen Zusammenhang mit dem Vorhergehenden stehen.

Max Meyer.

---

**Elementar-synthetische Kegelschnittslehre.** Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten bearbeitet von Dr. Handel, Oberlehrer am Königl. Realgymnasium zu Reichenbach i. Schl. Weidmann'sche Buchhandlung. Berlin 1893.

Das unter dem vorstehenden Titel erschienene Lehrbuch stellt sich die Aufgabe, die Theorie der Kegelschnitte auf elementar-synthetischem Wege mit Ausschluss der projectivischen Beziehungen darzustellen. Dasselbe behandelt in den ersten Abschnitten Parabel, Ellipse und Hyperbel getrennt. Im vierten Abschnitte werden sie gemeinsam als Schnitte eines Kegels mit einer Ebene abgeleitet und hieran die Sätze über Pol und Polare angeschlossen. Die Aufeinanderfolge der Lehrsätze ist für die drei einzelnen Curven möglichst übereinstimmend angeordnet und bei der Beweisführung oft nur auf den entsprechenden Satz bei der Parabel verwiesen. Eine gewisse Vereinfachung wird durch den von dem Verfasser im Jahre 1889 veröffentlichten Satz herbeigeführt, dass der Schnittpunkt zweier Tangenten von den Brennstrahlen der Berührungspunkte gleichweit entfernt ist. (Metrische Beziehungen an Tangentenfiguren der Kegelschnitte. Ostern 1889. Im Commissionsverlag von Meyer & Müller. Berlin.) Eine reiche Sammlung von Uebungsaufgaben bildet den Schluss des Werkes.

Max Meyer.

**Theory of functions of a complex variable,** by A. R. FORSYTH, Sc. D., F. R. S., Fellow of Trinity college, Cambridge — University Press, 1893 — XXII und 682 S.

Die Handbücher der Functionentheorie, über welche die moderne Mathematik verfügt, sind bislang zumeist von einem einheitlichen und damit auch freilich einseitigen Standpunkte verfasst. Wir haben da im Gebiete der Functionen einer complexen Veränderlichen (um nur die Hauptrichtungen zu berühren) neben Weierstrass' Theorie diejenige Riemann's, wir haben des Ferneren die von Clebsch inaugurirte Behandlung der algebraischen Functionen auf curventheoretischer Basis, endlich etwa die dem arithmetischen Denken sinnverwandten Richtungen von Kronecker und Dedekind-Weber. Im Gegensatz zu dem bisher verbreiteten Brauche hat Herr Forsyth in seinem oben genannten Werke eine Vielseitigkeit des Standpunktes bevorzugt, indem er die auf Cauchy, Weierstrass und Riemann zurückgehenden Zweige der Functionentheorie neben einander behandelt. Es ist dabei aber mehr eine encyklopädische Darstellung angestrebt, als dass es sich um den Versuch einer organischen Verschmelzung der Weierstrass'schen mit den Riemann'schen Resultaten gehandelt hätte. Ein solcher Versuch hätte auch nicht im Sinne des vorliegenden Buches gelegen, das in erster Linie ein einführendes Lehrbuch sein will und die Theorien von Cauchy, Weierstrass und Riemann unter möglichster Wahrung ihres jeweiligen Charakters darzustellen sucht. Functionentheoretische Denkweisen, die sich bisher weniger in den Vordergrund stellten (wie z. B. die der Arithmetik entsprungene), werden bei Seite gelassen, und auch in den behandelten Theorien wird weniger auf die Entwickelung neuer Probleme gesehen, als vielmehr auf eine ausführliche und wohlbegründete Darstellung der Fundamente.

Forsyth's Buch wird auf die Weise ein willkommenes Hilfsmittel für das einführende Studium, wobei in der klaren und wohlgeordneten Art der Darstellung ein besonderer Vorzug zu erkennen ist. Es sei in dieser Beziehung noch bemerkt, dass dem Inhaltsverzeichnisse eine kurze Empfehlung über eine zweckmässige Capitelfolge beim ersten Studium vorausgesandt ist, und dass überdies eine grosse Reihe von Uebungsbeispielen, wo es angeht, dem Texte eingestreut sind. Nicht minder werthvoll ist das vorliegende Werk für den Forscher zumal auch deshalb, weil Herr Forsyth mit ausserordentlicher Sorgfalt die Literatur der jeweils behandelten Gegenstände verfolgt hat und die Nachweise auf die in Frage kommenden Originalabhandlungen bis in die neueste Zeit giebt.

Die nachfolgende Inhaltsangabe muss sich bei einem so reichhaltigen Werke natürlich auf das Hauptsächlichste beschränken.

In dem ersten eine allgemeine Einleitung enthaltenden Capitel wird die Interpretation der complexen Veränderlichen in der Ebene und auf der Kugeloberfläche besprochen sammt den Rechnungsregeln, welche für com-

plexe Grössen gelten. Die Definition des Functionsbegriffes wird nach Riemann gegeben und sogleich des Zusammenhangs dieser Definition mit der Theorie der conformen Abbildung gedacht. Es folgen eine Reihe weiterer Begriffsbestimmungen, wie die der Eindeutigkeit, der Mehrdeutigkeit, der Verzweigungsstelle u. s. w.

Das zweite Capitel behandelt die Integration im complexen Gebiete und ist insbesondere der Ableitung der bekannten Cauchy'schen Sätze gewidmet, die auch noch im ersten Theile des folgenden Capitels fortgesetzt werden. Zur Einübung der Integrationen im complexen Gebiete sind in einem besonderen Paragraphen des zweiten Capitels mehrere Beispiele ausführlich entwickelt.

Es folgt ein Capitel über die Potenzreihen-Entwickelungen der Functionen, welche nach Cauchy und Laurent gegeben werden. Hier wird dann die Wendung auf Weierstrass' Theorie genommen, indem im Anschluss an die Potenzreihen-Entwickelungen der Functionen einige principielle Begriffsbestimmungen der in Rede stehenden Theorie abgeleitet werden. Es handelt sich namentlich um die erste Artunterscheidung der Singularitäten in wesentliche und ausserwesentliche, um das Princip der analytischen Fortsetzung, sowie auch um das von Schwarz besonders cultivirte Princip der Symmetrie.

Die weitere Fortsetzung gilt nun zunächst der Durchbildung der Weierstrass'schen Ideenentwickelungen in der allgemeinen Theorie der analytischen Functionen. Ein besonderes Capitel wird neben einigen allgemeinen Sätzen der Besprechung der rationalen Functionen gewidmet, während die Capitel V und VI den Stoff der bekannten Abhandlung von Weierstrass „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen“ vom Jahre 1876 behandeln. Die Eintheilung ist so getroffen, dass im fünften Capitel die Functionen mit nur einer wesentlich singulären Stelle untersucht werden, im sechsten Capitel diejenigen mit einer endlichen Anzahl solcher Stellen.

Das Hauptinteresse in dem ersten Theile des Werkes haftet an den Auseinandersetzungen im siebenten Capitel, die eindeutigen Functionen mit unendlich vielen wesentlich singulären Punkten betreffend, Functionen, zu denen man in neuerer Zeit von verschiedenen Seiten her geführt worden ist. Im Sinne von Weierstrass wird die Entwickelung auf analytische Bildungsgesetze der Functionen gegründet, in Gestalt von Reihenentwickelungen, die entweder nach Potenzen oder nach complicirteren Functionen fortschreiten. Voran steht hier die Behandlung des bekannten Mittag-Leffler'schen Theorems über die Darstellung von Functionen mit unendlich vielen wesentlich singulären Stellen. Des Weiteren folgen die interessanten Untersuchungen über die natürlichen Grenzen analytischer Functionen, über analytische Bildungsgesetze, die in verschiedenen Bereichen der complexen Ebene verschiedene, in einander nicht fortsetzbare Functionen darstellen, über Functionen mit endlich aus-

gedehnten Lücken u. s. w. Es kommen hier neben Weierstrass namentlich auch neuere Untersuchungen französischer Autoren, wie Tannery u. A., zur Geltung. Besonders interessante Beispiele für diese Richtung des functionentheoretischen Forschens liefert bekanntlich die moderne Theorie der automorphen Functionen, wo dann mit den Hilfsmitteln der conformen Abbildung zumal das Zustandekommen natürlicher Grenzen unmittelbar evident wird. Es liegt aber in der Disposition des Forsyth'schen Werkes begründet, dass von diesen Gegenständen erst an einer sehr viel späteren Stelle die Rede ist.

In den demnächst folgenden Capiteln war es schwer, einen einheitlich geordneten Gedankengang der Gesammtentwickelung zu Grunde zu legen. Es hätten sich diese Untersuchungen zumeist ohne Weiteres in den Rahmen der Functionentheorie von Riemann einordnen lassen, deren Darstellung mit dem vierzehnten Capitel anhebt. Es war vielleicht eine Concession an einen namentlich in der französischen Literatur hervortretenden Geschmack, die Herrn Forsyth veranlasste, die Besprechung der mehrdeutigen (namentlich algebraischen) Functionen, der Perioden der Integrale, der doppeltperiodischen Functionen u. s. w. hier den eigentlichen Riemann'schen Capiteln vorweg zu nehmen; vielleicht lag auch der Wunsch vor, die analytischen Bildungsgesetze der Functionen hier von vornherein mehr in den Vordergrund zu stellen, als dies innerhalb der Riemann'schen Functionentheorie geschieht. Man wird ja auch sagen dürfen, dass die Behandlung der doppeltperiodischen Functionen durchaus in dem bekannten Stile von Weierstrass gehalten ist, und dass zumal das dreizehnte Capitel (die Functionen mit einem algebraischen Additionstheorem betreffend) ganz Weierstrass eigen ist. Immerhin darf man den Gedanken andeuten, dass, wenn irgendwo, hier ein Zusammengehen von Weierstrass und Riemann möglich gewesen wäre, und dass die dem Riemann'schen Denken so sinnverwandten Entwickelungen der Capitel VIII bis XI auch nach den principiellen Riemann'schen Capiteln (XIV flg.) als Ausführungen der letzteren gute Dienste leisten könnten. Dass sich übrigens die in den wenigen Capiteln IX bis XIII entworfene Theorie der elliptischen Functionen durch ausserordentliche Reichhaltigkeit auszeichnet, kann nur rühmend anerkannt werden.

Die Capitel XIV bis XVIII sind der Theorie der Riemann'schen Flächen gewidmet, und man hat in diesen fünf Capiteln einen besonders werthvollen Theil des Forsyth'schen Werkes zu sehen, der sich ebenso sehr durch umfassende Gründlichkeit, wie durch klare Anordnung im Einzelnen auszeichnet. So darf besonders anerkannt werden, dass in den Capiteln über die topologische Behandlung der Riemann'schen Flächen auch die bezüglichen Theoreme von Lüroth und Clebsch behandelt werden, denen man vielfach nicht die ihnen gebührende Beachtung schenkt. Besonders wird man es bewillkommnen, dass im Capitel XVII der Beweis

der Riemann'schen Existenztheoreme nach den Methoden von Schwarz und Neumann ausführlich entwickelt wird. Dass in dem reichhaltigen Capitel XVIII (Anwendungen der Existenztheoreme) viele Gegenstände berührt werden, deren volle Durchbildung nur besondere Monographieen geben können, versteht sich ja von selbst. Zum Zeichen, dass Herr Forsyth auch hier die Literatur bis in die neueste Zeit verfolgt hat, erwähnen wir etwa die multiplicativen Functionen, auf welche Appell vor wenigen Jahren die Aufmerksamkeit lenkte, und die jetzt eben durch Hurwitz und Ritter des ausführlichen untersucht sind.

Die letzten vier Capitel (XIX bis XXII) bilden wiederum eine Gruppe von zusammengehörigen Capiteln. Dem Charakter der in Frage kommenden Functionen nach könnte man übrigens auch schon die am Schlusse des Capitel XVIII gegebenen Entwickelungen über Differentialgleichungen hierzu rechnen. Es folgt zunächst in zwei Capiteln (XIX und XX) eine sehr interessante Theorie der conformen Abbildungen, welche bis hierhin verschoben wurde, um auf diese Weise den Eingang zu den Untersuchungen von Schwarz über Dreiecksfunctionen zu gewinnen, sowie dann weiter zu den Untersuchungen von Klein und Poincaré über automorphe Functionen. Capitel XIX giebt ausser allgemeinen analytischen Grundlagen der conformen Abbildungen eine grosse Reihe von Beispielen, wobei vor Allem die von Möbius als Kreisverwandtschaften bezeichneten Abbildungen und deren von Klein gelieferte Artentheilung Berücksichtigung finden. Riemann's Grundsatz von der Möglichkeit, einfach zusammenhängende Bereiche auf einander conform abzubilden, ist an die Spitze von Capitel XX gestellt. Die Anwendungen beziehen sich auf die Abbildung von Polygonen mit geradlinigen oder kreisförmigen Grenzen auf eine Halbebene. Im Besonderen wird wieder auf Dreiecksfunctionen specificirt, und zumal auf diejenigen, welche in der Theorie der regulären Körper auftreten.

Herr Forsyth ist solchergestalt an die Theorie der automorphen Functionen unmittelbar herangekommen, und es lag der Wunsch nahe, dem Leser auch noch hiervon ein kurzes Bild zu vermitteln. Diesem Zwecke dienen die beiden Schlusscapitel, die gruppentheoretisch bez. functionentheoretisch gehalten sind, und die sich an die Theorie der Modulfunctionen, sowie an die bekannten Arbeiten Poincaré's anschliessen. Es sollte sich hier natürlich nur um einige Stichproben dieser ausgedehnten Theorie handeln, wobei übrigens bemerkt sein mag, dass die Begriffe der eigentlichen und uneigentlichen Discontinuität zwar nach den bezüglichen Poincaré'schen Festsetzungen (in den Acta mathem. Bd. III S. 57) gebraucht sind; dass aber der Zweckmässigkeit dieser Festsetzungen berechtigte Bedenken entgegenstehen. Die Folge ist z. B. die Inconvenienz, dass die von Bianchi u. A. untersuchte Gruppe mit ganzen complexen Coefficienten der Form $(a+ib)$ hier uneigentlich discontinuirlich heisst, obwohl ihr eine reguläre Eintheilung des Raumes in endlich ausgedehnte

Polyeder zur Seite steht. Im functionentheoretischen Capitel (XXII) werden ausser einigen auf die Theorie der regulären Körper bezüglichen Entwickelungen die Poincaré'schen ΘReihen ausführlicher betrachtet. Eben diese Reihen waren es, vermöge deren Poincaré seiner Zeit die Existenz der automorphen Functionen bewies. Hierbei darf bemerkt werden, dass die inzwischen auf das Schwarz'sche alternirende Verfahren basirten directen Existenzbeweise der automorphen Functionen nicht nur vollen Ersatz für die Poincaré'schen Beweismethoden liefern, sondern nach gewisser Seite hin sich als weitertragend erweisen.

Der grosse Werth des Forsyth'schen Werkes als eines zuverlässigen Handbuchs der modernen Functionentheorie wird nur noch erhöht durch mehrere ausführliche Sach- und Autorenregister, welche dem Schlusse des Buches angehängt sind.

R. Fricke.

**Studien über die Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen.** Ein Anhang zu Heine's Handbuch der Kugelfunctionen. Von Dr. E. Haentzschel. G. Reimer. Berlin 1893. 180 S. 6 Mk.

Nachdem Lamé das System der dreifach orthogonalen krummlinigen Coordinaten, speciell zur Behandlung des Ellipsoidproblems die elliptischen Coordinaten eingeführt hatte, entstand die Frage, ob ausser den Flächen zweiten Grades noch weitere sich rechtwinklig schneidende Flächenschaaren vorhanden sind. Als solche wies Herr Moutard die Cyklidenflächen nach, welche später auch von Herrn Darboux und Herrn Wangerin auf anderem Wege gefunden worden sind. Weitere Beispiele von solchen Flächengattungen kennt man bis jetzt nicht.

In innigem Zusammenhang mit dieser Frage steht die andere: Für welche Körper ist es möglich, bei der Berechnung des Potentials die Potentialgleichung $\Delta V = 0$ auf gewöhnliche Differentialgleichungen zu reduciren? Die Herren Schwarz, Wangerin und Darboux haben sich mit diesem Gegenstande eingehend beschäftigt. Die vorliegende Arbeit stellt sich als eine wesentliche Ergänzung und werthvolle Fortsetzung dieser Untersuchungen dar. Es ist zu einem Theile eine zusammenhängende Darstellung der vom Verfasser schon früher an verschiedenen Stellen veröffentlichten Resultate (E. Haentzschel, „Ueber das Cartesische Oval", Grunerts Archiv 69, 1883. — „Ueber die Reduction der Gleichung $\Delta V = 0$ auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Beitrag zur Theorie der Lamé'schen Functionen zweiter Ordnung." Inauguraldissertation. Jena (Berlin, Mayer und Müller) 1883. — „Ueber den functionentheoretischen Zusammenhang zwischen den Lamé'schen, Laplace'schen und Bessel-schen Functionen." Schlömilch's Zeitschr. für Mathem. und Physik 31, 1886. — „Zur Theorie der Functionen des elliptischen Cylinders". Programm des Realgymnasiums zu Duisburg 1886. — „Ueber die Differentialgleichung

der Functionen des parabolischen Cylinders." Schlömilch's Zeitschr. für Mathem. und Physik 33, 1888. — „Ueber die Fourier-Bessel'sche Transscendente." Schlömilch's Zeitschr. für Mathem. und Physik 33, 1888. — „Beitrag zur Theorie der Functionen des elliptischen und des Kreiscylinders." Programm der III. städtischen Realschule zu Berlin 1889).

Die Hauptresultate der Herrn Wangerin zugeeigneten Arbeit sollen kurz angedeutet werden (vergl. das Referat in den Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 12 Nr. 1).

Herr Wangerin hatte in seiner Preisarbeit gefunden, dass die Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen nur für solche Rotationskörper ausführbar ist, deren Meridiancurve die ebene algebraische Isothermencurve

$$(x^2+r^2)^2+Ax(x^2+r^2)+B(x^2+r^2)+Cx^2+Dx+E=0$$

darstellt. Der Verfasser findet eine viel allgemeinere Meridiancurve, nämlich jede ebene algebraische Isotherme, definirt durch

$$x+ir=F(t+iu),\quad F'^2(t+iu)=AF^4+BF^3+CF^2+B'F+A'.$$

Als Fundamentalcurve ergiebt sich das cartesische Oval, das durch eine Inversion mit reellen Coefficienten die Curve des Herrn Wangerin, durch eine solche mit complexen Coefficienten die Curve

$$A(x^2+r^2)^2+Bx(x^2+r^2)+Cr(x^2+r^2)+Dx^2+Er^2$$
$$+Fxr+Gx+Hr+J=0$$

liefert. Aus der letzteren erhält man Rotationskörper von der achten Ordnung. Vermittelst der Transformationstheorie der elliptischen Functionen lässt sich leicht übersehen, dass die Zahl der Meridiancurven ins Unbegrenzte gesteigert werden kann.

Die Lösung des in Rede stehenden Problems hängt für Rotationskörper ab von der Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, durch welche gewisse Lamé'sche Functionen zweiter Ordnung definirt werden. Der Verfasser unterscheidet zwei Typen von derartigen Lamé-schen Functionen; der erste ist definirt durch:

$$\frac{d^2y}{du^2}=[\alpha(pu-e_\lambda)-h^2]y,$$

der zweite durch:

$$\frac{d^2y}{du^2}=\left[\frac{\alpha(e_\lambda-e_\mu)(e_\lambda-e_\nu)}{pu-e_\lambda}-h^2\right]y.$$

Unter den verschiedenen Gattungen, die jeder der beiden Typen enthält, werden besonders zwei hervorgehoben, die Lamé-Hermite'schen und die Lamé-Wangerin'schen Functionen, dort ist $\alpha=n(n+1)$, hier ist $\alpha=\nu^2-\frac{1}{4}$, wo $n$ und $\nu$ ganzzahlig sind. Ordnet man den Lamé-Hermite'schen beziehungsweise Lamé-Wangerin'schen Functionen vom ersten Typus gewisse Functionen $s$ zu, so erhält man eine Classe von

Riemann'schen $P$ Functionen mit vier singulären Stellen von der Eigenschaft, das eine Mal an der Grenze Laplace'sche Functionen zweiter Ordnung beziehungsweise Kugelfunctionen darzustellen, welche Functionen selbst wiederum an der Grenze in Bessel'sche Functionen entarten, oder (bei einem anderen Grenzübergang) in gewisse Riemann'sche $P$ Functionen mit drei singulären Stellen überzugehen. Ordnet man ebenso den Lamé-Hermite'schen beziehungsweise Lamé-Wangerin'schen Functionen vom zweiten Typus gewisse $z$ Functionen zu, so ergiebt sich eine Classe von Riemann'schen $P$ Functionen mit vier singulären Stellen von der Eigenschaft, das eine Mal an der Grenze geschlossene einfach periodische Functionen darzustellen, oder in gewisse Riemann'sche $P$ Functionen mit drei singulären Stellen überzugehen.

Der Verfasser betrachtet sodann die Lamé'sche Function höherer Ordnung, definirt durch:

$$\varphi(x)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}\varphi'(x)\frac{dy}{dx}+\psi(x)y=0,$$

wo $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ganze rationale Functionen $s^{\text{ten}}$ beziehungsweise $s-2^{\text{ten}}$ Grades von $x$ bedeuten, und legt sich die Frage vor, wann ist diese Differentialgleichung in geschlossener Form integrirbar, im Besonderen, wann ist das Product $v$ der beiden particulären Integrale oder eine Potenz derselben $v^r$ eine ganze rationale Function? In Vervollständigung der bezüglichen Brioschi'schen Untersuchungen zeigt sich, dass im Allgemeinen $r$ höchstens $=2$ sein, dass aber, wenn $\varphi(x)$ einen quadratischen Factor besitzt, $r$ jeden Werth annehmen darf. Ferner ergiebt sich das Resultat, welches bisher nur für specielle Fälle bekannt war: Ist

$$v^r=F(x)=P^r.Q,\quad P=x^\varrho+\cdots,\quad Q=x^\sigma+\cdots,$$
$$\psi(x)=\alpha_0x^{s-2}+\alpha_1x^{s-3}+\cdots+\alpha_{s-2},$$

und definirt die Differentialgleichung die verallgemeinerte Lamé-Hermite'sche Function, so muss $\alpha_0=-n(n+s-2)$

sein; definirt sie die verallgemeinerte Lamé-Wangerin'sche Function, so muss

$$\alpha_0=-\frac{(2\varrho+1)(2\varrho+2s-3)}{4}$$

sein; definirt sie die verallgemeinerte Laplace'sche Function, so muss

$$\alpha_0=-\frac{(r\varrho+1)(r\varrho+1+rs-2r)}{r^2}$$

sein. Ein Nebenresultat dieser interessanten Untersuchung ist die explicite Integration der verallgemeinerten Lamé-Hermite'schen Differentialgleichung für $n=1$, $s=3$; $n=1$, $s=4$.

Es wird noch gezeigt, dass die Gauss'sche hypergeometrische Reihe, die Riemann'sche $P$ Function mit drei singulären Stellen und die Heine-

sche Kugelfunction höherer Ordnung sämmtlich durch Laplace'sche Functionen zweiter Ordnung darstellbar sind.

Bei der Reduction der Potentialgleichung für Körper, die von Cylinderflächen zweiten Grades und den aus diesen durch die Transformation mittelst reciproker Radienvectoren entstehenden begrenzt sind, gelangt man zu den Functionen des elliptischen und des Kreiscylinders. Hiervon handelt der fünfte Theil, wo der Verfasser Anlass nimmt, auf eine Bruns'sche Arbeit [„Ueber eine Differentialgleichung der Störungstheorie", Astronomische Nachrichten Nr. 2533 (1883) und Nr. 2553 (1884)] genauer einzugehen und dieselbe in wesentlichen Punkten zu ergänzen. Diese Betrachtungen werden specialisirt und auf die Bessel'sche Transscendente angewendet, um die bezüglichen Cayley'schen Untersuchungen zu vertiefen. Es folgt eine Auseinandersetzung mit Herrn Hamburger wegen der kritischen Bemerkungen, die in der Arbeit Crelle's Journal 103 gegen die Cayley'sche Arbeit, Crelle's Journal 100, erhoben worden sind. Die Polemik dreht sich um die Frage: Haben nur die Normalintegrale mit geschlossener Potenzreihe Existenzberechtigung, wie Herr Hamburger meint, oder sind auch divergente Entwickelungen zulässig, was Herr Haentzschel behauptet?

Das Problem, die Bewegung der Wärme im Rotationsellipsoid zu bestimmen, führt nach Heine zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integral eine Cylinderfunction dritter Ordnung ist. Nach Andeutungen, die Heine in seinem Handbuch über die Weiterführung der Untersuchung gemacht hat, wendet der Verfasser die Hermite'sche Methode zur Integration dieser Differentialgleichung an, für deren Integral der Name „Heine'sche Function" in Vorschlag gebracht wird. Es wird die Bedingung ermittelt, unter welcher die Heine'sche Function in geschlossener Form darstellbar ist, und für diesen Fall werden die geschlossenen Normalintegrale aufgestellt. Die Resultate werden für den Fall der „hyper-Bessel'schen Transscendente" specialisirt. Hieran schliessen sich Reihenentwickelungen des allgemeinen Integrals, die nach Potenzen von $\frac{1}{\cos \varepsilon u}$ und nach solchen von $\frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon u}$ aufsteigen. Die vorliegende Function hat noch insofern ein besonderes Interesse, als sich zeigen lässt, dass die Kugelfunctionen, welche schon vorher als Grenzfälle der den Lamé-Wangerin'schen Functionen zweiter Ordnung adjungirten Functionen erschienen waren, auch als specieller Fall in der der genannten Cylinderfunction dritter Ordnung adjungirten Function enthalten sind.

E. Jahnke.

---

O. Flor, **Lösung des Problems: „Die Quadratur des Kreises".** Berichtigung der Zahl $\pi$. Stieda. Riga 1892.

Der Werth der Zahl $\pi$ wird berichtigt, $\pi$ ist nicht $= 3{,}1415\ldots$, sondern gleich 3,2!

E. Jahnke.

P. Michelsen, **Die bestimmten algebraischen Gleichungen des ersten bis vierten Grades.** Nebst einem Anhang: Unbestimmte Gleichungen. C. Meyer. Hannover 1893. 306 S. 4 Mk.

Dass auch der Verfasser sich die Frage vorgelegt hat, ob das Erscheinen seines Buches einem fühlbaren Bedürfniss abhelfe, geht aus einer Stelle der Einleitung hervor. Dieselbe Stelle lässt aber gleichzeitig vermuthen, dass der Verfasser die neuerdings erschienenen Aufgabensammlungen, insbesondere die von Herrn Wrobel („Uebungsbuch zur Arithmetik und Algebra" Werther. Rostock 1889) nicht kennt oder zu ingnoriren entschlossen ist. Denn von einem Fortschritt etwa gegen das eben erwähnte Uebungsbuch weiss selbst der Verfasser nicht zu berichten.

Indessen hat das vorliegende Buch als Aufgabensammlung, welcher zahlreiche Winke und in einem Anhange auch die Resultate beigegeben sind, immerhin Anspruch auf Beachtung.

E. Jahnke.

---

**Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumcurven und krummen Flächen.** Beilagen zu den Programmen der lateinischen Hauptschule in Halle a. S., Ostern 1886, 1888, 1893; Programm Nr. 217, 220, 237. Von Oberlehrer Dr. Hermann Grassmann.

Diese, einige achtzig grosse Quartseiten umfassende Arbeit ist als die erste im Drucke erschienene zu bezeichnen, die Raumcurven und krumme Flächen mittelst der Streckenrechnung im Sinne H. G. Grassmann's betrachtet, welche Rechnungsart wesentlich einfacher als die Hamilton'sche Quaternionenrechnung ist.

Der Herr Verfasser hat die Streckenrechnung, insoweit solches für seine Zwecke nöthig war, nicht im Zusammenhange seiner Untersuchung vorausgeschickt, sondern jeder Abtheilung derselben die erforderlichen Sätze der Rechnung mit Strecken vorangehen lassen, um dem Leser möglichst rasch den Nutzen der neuen Rechnungsart erkennbar zu machen, ihn nicht mit ausführlichen rein theoretischen Dingen der Streckenrechnung zu ermüden, ehe derselbe eine Anwendung sieht.

Dadurch ist nun freilich die Entwickelung dieses Theiles seiner Arbeit eine weniger exakte geworden, was sich jedoch mit Rücksicht auf deren Zweck und die beschränkte Bogenzahl bei Progamm-Abhandlungen sehr wohl entschuldigen lässt, zumal auch heute noch von solcher Seite das Studium der Ausdehnungslehre als schwierig bezeichnet wird, ihr noch Vorurtheile entgegen gebracht werden, von der es nicht zu erwarten sein dürfte.

Diese Schwierigkeit hat vorzugsweise ihren Grund in der derzeitigen Richtung des Studiums unserer angehenden Mathematiker, denen es im Allgemeinen, selbst nach abgeleistetem Staatsexamen und Doctorexamen, Mühe macht, sich anderen, tieferen geometrischen Begriffen anzupassen,

während ältere Ingenieure gegenwärtig mit verhältnissmässiger Leichtigkeit und mit Freudigkeit sich in den anfangs etwas fremdartig erscheinenden Gegenstand hineinarbeiten, was mich die Erfahrung lehrt.

Zunächst ist es geboten, den Gang der Abhandlung zu charakterisiren, welche dreizehn Abschnitte umfasst.

Der erste Abschnitt entwickelt das Additionsgesetz der Strecken, das äussere Product aus zwei und das aus drei Strecken, den Begriff der Ergänzung eines Parallelogrammes, das innere Product aus zwei Strecken und giebt die Differentiationsregeln für das äussere und das innere Product aus zwei Strecken.

Während in der Quaternionentheorie das Product aus zwei und aus mehreren Strecken im Allgemeinen die Summe aus einer Zahl und einer Strecke ist, bedeutet das äussere Product aus zwei Strecken das durch sie bestimmte Parallelogramm mit Rücksicht auf den Entstehungssinn des letzteren, das äussere Product aus drei Strecken das durch diese Strecken als in einer Ecke zusammenstossende Kanten bestimmte Parallelepiped mit Rücksicht auf den Entstehungssinn des letzteren. Unmittelbar fällt in die Augen, dass H. G. Grassmann den natürlichen Weg ging. Die Ergänzung eines Parallelogrammes ist eine zu ihm senkrechte Strecke, deren Länge gleich der Flächenzahl des Parallelogrammes ist, und erscheint, vom Endelemente einer solchen Strecke aus gesehen, der Entstehungssinn des Parallelogrammes positiv. Das innere Product aus zwei Strecken ist gleich dem Producte aus ihren Längen und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Nun werden im zweiten Abschnitte, nachdem daselbst die Fahrstrahlgleichung einer Raumcurve in kurzer Fassung aufgestellt worden ist, Streckengleichungen für die Tangente, die Schmiegungsebene und die erste Krümmung einer solchen Curve abgeleitet.

Der dritte Abschnitt enthält weitere Belehrung über die Streckenrechnung, er giebt äussere und innere Producte höherer Art, von Parallelogrammen, innere Producte von Parallelogrammen und Strecken.

Im vierten Abschnitte werden nun die erste Krümmung in etwas anderer Weise, die zweite Krümmung und die Schmiegungskugel einer Raumcurve behandelt.

Der fünfte Abschnitt giebt die Elemente der Lehre von den dreizeiligen Determinanten und einige weitere Sätze der Streckenrechnung.

Der sechste Abschnitt ist der Ableitung der Fahrstrahlgleichung der krummen Flächen, der Tangentenebene, der Flächennormalen und den Curven auf einer Fläche gewidmet.

Im siebenten Abschnitte stossen wir auf das Krümmungsmaass und die Abwickelung der Flächen.

Der achte Abschnitt beschäftigt sich mit den ebenen Schnitten, den Normalschnitten, schiefen Schnitten und Hauptschnitten einer Fläche.

Der neunte Abschnitt erzählt von den Krümmungslinien und den conjugirten Richtungen auf einer Fläche.

Der zehnte und elfte Abschnitt belehren uns über die Asymptotenlinien und die geodätischen Linien auf Flächen.

Im zwölften Abschnitte finden wir die geradlinigen und die abwickelbaren Flächen.

Endlich giebt uns der dreizehnte Abschnitt Aufschluss über die Minimalflächen.

Der Entwickelungsgang schliesst sich somit an den von Joachimsthal in seinem Werke über die Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung von Curven und Flächen inne gehaltenen ungefähr an, nur sind die Gleichungen der geometrischen Gebilde von anderer Beschaffenheit, nämlich rein geometrischer Natur, wodurch die Behandlung des Stoffes einfacher, leichtlebiger sich gestaltet.

Denselben Gegenstand hat Herr Professor Dr. F. Gräfe in seinen „Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen" (Leipzig, B. G. Teubner 1883) kurz in ähnlicher Weise besprochen. In beiden Fällen sind die Gleichungen der Raumcurven und Flächen dieselben.

Dadurch ist der Leser in der Lage, nunmehr selbst zu entscheiden, dass in der Geometrie die Streckenrechnung nach Grassmann der Rechnung mit Quaternionen vorzuziehen ist, gewisse Fälle ausgenommen, wo die mittlere Multiplication (die Quaternionenrechnung) fast von selbst in die Untersuchung eintritt. Auch diese Fälle gestalten sich nunmehr einfacher, denn wir haben die sehr störenden Zeichen $S$, $T$, $U$, $V$ der Quaternionenrechnung nicht mehr nöthig. Von dieser mittleren Multiplication hatte der Herr Verfasser keinen Gebrauch zu machen.

Wie der Titel der Abhandlung aussagt, giebt sie keine analytische Geometrie, sondern nur einen wesentlichen Theil derselben.

Ist $\varrho$ der Fahrstrahl einer Raumcurve, $t$ eine Zahlvariable, sind $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ und $\varepsilon_3$ drei nicht einer Ebene parallele Strecken, dann ist

$$\varrho = \sum_1^3{}_k f_k(t)\,\varepsilon_k = F(t)$$

die Fahrstrahlgleichung der Raumcurve.

Ist $\varrho$ der Fahrstrahl einer Fläche, sind $u$ und $v$ von einander unabhängige Zahlvariablen, dann ist

$$\varrho = \sum_1^3{}_k f_k(u,\,v)\,\varepsilon_k = F(u,\,v)$$

die Fahrstrahlgleichung der Fläche.

Nur mittelst dieser Gleichungen führt der Herr Verfasser seine Untersuchungen durch, sie sind es, welche für einen Theil der theoretischen *Mechanik* von grosser Wichtigkeit sind, eine viel elegantere und exactere

Behandlungsweise dieses Theiles herbeiführen, als solches mittelst der gewöhnlichen Coordinatengleichungen möglich ist, denn jedes mit ihnen erzielte Resultat lässt fast unmittelbar eine mechanische Deutung zu.

Die in der Abhandlung für Strecken und Zahlen verwendeten Zeichen werden, so weit ich die Sache übersehe, jedenfalls späterhin eine Aenderung erfahren, worauf ich besonders aufmerksam mache, wenngleich diese Zeichen mit den von unseren genialen H. G. Grassmann benutzten identisch sind. Nach meiner Meinung dürfen wir die Zahlen nicht durch griechische und die Strecken durch lateinische Buchstaben benennen, sondern wir müssen umgekehrt vorgehen. Bisher ist es fast durchweg gebräuchlich gewesen, für die Bezeichnung der Zahlen die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabetes zu nehmen, es ist das Lesen verschiedener mathematischer Werke nicht angenehm, wenn unter denselben Zeichen da Zahlen, dort Strecken verstanden werden müssen. Nach dieser Richtung hin hat jedenfalls Hamilton richtig disponirt. Sollen die Grassmann'schen Rechnungsmethoden sich leicht und bald einbürgern, dann haben wir sicher diesen Umstand sehr zu beachten.

Den Radius der ersten Krümmung einer Raumcurve hat der Herr Verfasser in mehrfacher Weise abgeleitet, es fehlt nur noch die der gewöhnlichen Formel entsprechende Streckenformel, welche sehr leicht herzustellen ist.

Wie schon bemerkt, benutzt der Herr Verfasser nur je eine Gleichung für die Curven und Flächen, er discutirt nicht die specielle Flächengleichung

$$\varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + f(x, y)\varepsilon_3,$$

welche aus der allgemeinen Flächengleichung leicht resultirt, auch geht er nicht auf specielle Curven und Flächen ein.

Die verwendeten Gleichungen sind nicht die einzigen, welche der geometrische Kalkül an die Hand giebt, vielmehr sind auch noch andere Gleichungen aufstellbar, die besondere Vortheile bieten, so z. B. existirt für die Flächen zweiten Grades eine sehr erspriessliche Streckengleichung. Diese Bemerkung mache ich lediglich deshalb, um dem Leser die etwaige Meinung zu nehmen, dass wir nur mit den angeführten Gleichungen rechnen können. Hat ja bereits Möbius in seinem barycentrisehen Kalküle Punktgleichungen von Curven und Flächen aufgestellt.

Durchweg sind in der Abhandlung die Relationen zwischen den cartesischen Coordinaten nicht berücksichtigt, das heisst von den Streckengleichungen, welche die Untersuchungsergebnisse darstellen, ist nicht zu den entsprechenden gewöhnlichen Coordinatengleichungen übergegangen worden, was nur rein mechanische Rechnungsoperationen erfordert. Diese Gleichungen sind immerhin werthvoll, sie sind, was die eigentliche Entwickelung anlangt, nebensächlicher Natur.

Für das leichtere Verständniss wäre es nicht unzweckmässig gewesen, an einigen speciellen Curven und Flächen zu zeigen, wie die Methode

praktisch arbeitet, zumal Geometer behaupten, man könne nach H. G. Grassmann wohl Sätze finden, aber nicht praktisch rechnen, welche Behauptung total aus der Luft gegriffen ist.

Bei der geringen freien Zeit, welche einem Gymnasiallehrer für Nebenarbeiten bleibt, sind die beregten fehlenden Dinge dem Herrn Verfasser nicht anzurechnen.

Die Aufgabe, welche der Herr Verfasser vor mehreren Jahren sich stellte, hat er durchweg gelöst. Die Entwickelung ist in allen ihren Theilen correct, die Sprache eine leicht verständliche. Der Leser muss durch diese Arbeit zum Studium der Werke seines Vaters und zur Mitwirkung an der Fruchtbarmachung der Rechnung mit geometrischen Grössen angeregt werden.

Um so mehr kann ich die Abhandlung empfehlen, da ich schon seit einigen Jahren im Besitze einer analytischen Geometrie auf Grund der Rechnung mit extensiven Grössen bin, für welche ich denselben Gegenstand discutiren musste, und im Ganzen meine Durchführung mit der des Herrn Verfassers übereinstimmt, was zeigt, dass auf beiden Seiten, unabhängig von einander, richtig gearbeitet worden ist.

Möge es dem Herrn Verfasser vergönnt sein, auch in Zukunft seine Thätigkeit auf dem betretenen Wege fortzusetzen.

FERDINAND KRAFT.

# Bibliographie

vom 16. April bis 31. Mai 1894.

### Periodische Schriften.

Auszug aus den Nivellements der trigonometrischen Abtheilung der königl. preuss. Landesaufnahme. Berlin, Mittler. II. Heft mit 1—7 Nachträgen 3 Mk. 55 Pf. III. Heft mit 1—5 Nachträgen 2 Mk. 55 Pf. IV. Heft mit 1—6 Nachträgen 3 Mk. 25 Pf.

Astronomische Arbeiten des kaiserl. königl. Gradmessungs-Bureaus. 5 Bd. Längenbestimmungen. Herausgegeben von E. Weiss und R. Schram. Wien, Tempsky. 16 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 23. Bd. (Jahrgang 1891) 2. Heft. Herausgegeben von E. Lampe. Berlin, G. Reimer. 9 Mk.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorologischen Instituts. 1893. II. Heft. Herausgegeben von W. v. Bezold. Berlin, Asher. 3 Mk.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1893. Ergebnisse der Beobachtungen an der Station Bremen. Herausgegeben von P. Bergholz. Bremen, Nössler. 3 Mk.

Observations de Poulkovo. Vol. X. Petersburg und Leipzig, Voss. 20 Mk.

Publications de l'observatoire central Nicolas. Série II, Vol. I. Ebendaselbst. 48 Mk.

### Geschichte der Mathematik.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. III. Bd. 1. Abtheilung: von 1668 bis 1699. Leipzig, B. G. Teubner. 6 Mk.

### Reine Mathematik.

Hagen, S. J., Synopsis der höheren Mathematik. 2. Bd. Geometrie der algebraischen Gebilde. Berlin, Dames. 30 Mk.

Laska, W., Einführung in die Functionentheorie. Stuttgart, Mayer. 1 Mk. 50 Pf.

Vieck, E. v., Zur Kettenbruchentwickelung der Lamé'schen und ähnlicher Integrale (Dissertation). Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 3 Mk. 60 Pf.

Pitz, H., Vierstellige Logarithmentafel. Giessen, Roth. 40 Pf.

Schlotke, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. III. Theil. Perspective. Dresden, Kühtmann. 4 Mk. 40 Pf.

## Angewandte Mathematik.

Vogler, A., Lehrbuch der praktischen Geometrie. 2. Theil. Höhenmessungen. Erste Hälfte: Nivelliren. Braunschweig, Vieweg. 11 Mk.

Klingatsch, A., Die graphische Ausgleichung bei der trigonometrischen Punktbestimmung durch Einschneiden. Wien, Gerold. 3 Mk.

Hoppe, O., Elementares Lehrbuch der technischen Mechanik. I. Abtheilung. Leipzig, Felix. 11 Mk.

## Physik und Meteorologie.

Korn, A., Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. II. Theil. Erster Abschnitt. Berlin, Dümmler. 3 Mk.

Gänge, C., Die Polarisation des Lichts, kurz dargestellt mit Anwendungen. Leipzig, Quandt & Händel. 1 Mk. 80 Pf.

Strehl, K., Theorie des Fernrohrs auf Grund der Beugung des Lichts. 1. Theil. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Wiebe, H., Tafeln über die Spannkraft des Wasserdampfs zwischen 76 und 101,5 Grad. Braunschweig, Vieweg. 2 Mk.

Howard, L., On the modifications of clouds (London 1803). Neudruck. Berlin, Asher. 3 Mk.

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Zur Kreismessung des Archimedes.

Von

FRIEDRICH HULTSCH
in Dresden.

Schluss.

### III.

Apollonios soll in seiner Schrift ὠκυτόκιον (oben S. 132 flg.) die Kreismessung des Archimedes dadurch verbessert haben, dass er andere Zahlen, als jener bei seinen Näherungsrechnungen, anwendete und dadurch die Grenzen verengerte, also ein genaueres Endresultat erzielte.

Leider ist dieses Zeugniss so kurz gefasst, dass sich daraus nichts Zuverlässiges über die Methode, welche Apollonios bei seiner Correctur anwendete, entnehmen lässt. Doch wird unter verschiedenen möglichen Hypothesen diejenige den grössten Grad von Wahrscheinlichkeit für sich haben, welche ein Minimum in den Abweichungen von der Schrift des Archimedes voraussetzt und dabei doch eine Verbesserung der Ausrechnungen des Vorgängers nachweist.

Folgende Hypothesen dürften hier in Betracht kommen. Apollonios kann ein anderes Vieleck als das Sechseck, von welchem Archimedes ausgegangen ist, zu Grunde gelegt haben, und es ist in dieser Hinsicht auf den Versuch des Mathematikers Antiphon zu verweisen, der um zwei Jahrhunderte früher vom eingeschriebenen Quadrat zum Achteck, Sechzehneck u. s. w. fortgeschritten war.* Oder, wenn er mit Archimedes vom Sechseck ausging, so konnte er etwa über das 96eck hinaus noch das 192eck rechnerisch verwerthen, oder er konnte zwar mit dem 96eck sich begnügen, aber für $\sqrt{3}$, wovon alle Rechnungen abhingen, genauere Näherungswerthe ermitteln**, oder er konnte endlich auch alle Voraussetzungen des Archimedes beibehalten und nur die starken Kürzungen der auslaufenden Brüche, die jener gewagt hatte, vermeiden.

* Bretschneider: „Die Geometrie von Euklides" S. 101, 124 flg., Cantor, „Vorlesungen I²" S. 190.

** Den Weg, wie dies leicht zu erreichen war, habe ich in den Näherungswerthen S. 404 Anmerkung 1 in Verbindung mit S. 398 flg. gezeigt.

Wir wenden uns also der letzten von diesen Hypothesen als der relativ wahrscheinlichsten zu und nehmen an, dass Apollonios lediglich durch genauere Ausrechnungen eine engere Begrenzung für $\pi$, als sein Vorgänger, ermittelt hat.

Darauf weist auch der Titel der Apollonischen Schrift, ὠκυτόκιον, hin. Ein ausgeliehenes Kapital, das ist ein verhältnissmässig grosser Betrag Geldes, gebiert kleinere Beträge, die als Zinsen an den Gläubiger abzuführen sind. Von dem Gebähren, τίκτειν, hiessen bei den Griechen die Zinsen τόκοι. Als normaler Zinsfuss galt, wie auch später bei den Römern, 1 Procent monatlich. Die wirklich vereinbarten Zinsen waren meist höher, doch wurden auch diese nach Procenten monatlich gerechnet, z. B. 1½ Drachme auf 1 Mine (= 100 Drachmen), das ist 18 Procent jährlich.* Aehnlich nun wie die Zinsrechnung von dem Kapitale zu den monatlichen Hunderteln herabstieg, so gelangte man, wie nach dem Vorgange des Apollonios vor kurzem gezeigt worden ist, von den grössten Zahlenbeträgen durch fortgesetzte Division zu immer kleineren, jedesmal in den Rahmen der zweiten Potenzen von 100, das ist der Myriaden, einzuordnenden Beträgen, bis man endlich auch die als Rest verbliebenen Einheiten in so und so viele μυριοστά, und wenn nöthig, auch δεύτερα μυριοστά u. s. w. theilte. In diesem Sinne hat Apollonios für seine Schrift über die Bruchrechnung den Titel ὠκυτόκιον, das ist die schnelle Berechnung auch der kleinsten Theile, gewählt.

Sein Ziel war, wie gesagt, die genauere Darstellung der Brüche, welche in der Archimedischen Kreismessung vorkamen. Wenn er seine Methode als ein schnelles Verfahren bezeichnete, so dürfen wir dieses Beiwort nicht vom modernen Standpunkte aus beurtheilen. Die Apollonische Rechnung nach μυριοστά nähert sich sehr der uns geläufigen decimalen Bruchrechnung, zeigt sich aber doch, weil die modernen Ziffern mit der Null und die streng dekadische Stellenbezeichnung fehlten, als recht ungefüge und steht, wie schon bemerkt wurde, wenn einmal mit griechischen Zahlenbezeichnungen gerechnet werden musste, an bequemer Handhabung weit hinter der Sexagesimalrechnung zurück. Allein, wenn man mit schnellem Rechnen ein sicheres Rechnen meint, das heisst ein solches, welches nicht zwischen verschiedenen Näherungsversuchen und Kürzungen gemeiner Brüche hin und her schwankt, sondern für die Theilung der Einheiten dieselbe Gruppirung nach Myriaden, wie für die Vervielfältigung der Einheiten, durchführt, so kann man dem Apollonios nur Recht geben.

Denn dass Archimedes im Laufe seiner Ausrechnungen nicht nur alle Brüche stark gekürzt, sondern aus verschiedenen Rücksichten einige Male auch Näherungswerthe gewählt hat, die mehr von dem anfänglich berech-

* Vergl. „Griechische Privatalterthümer“ von K. Fr. Hermann, 3. Auflage von H. Blümner, S. 457 flg.

neten genaueren Bruche abweichen, als es sein sollte, habe ich in der Schrift über die Näherungswerthe ausführlich gezeigt. Zwar hat ihn seine Meisterschaft in der Theorie wie in der Praxis des Rechnens davor bewahrt, Fehler in das Endresultat zu bringen (seine Grenzwerthe sind und bleiben die besten, nach den gegebenen Voraussetzungen erreichbaren); allein einem zeitgenössischen Mathematiker, der sich die Mühe nahm, die von Archimedes nur entfernt angedeuteten Ausrechnungen Zug um Zug zu controliren, war es gewiss nicht zu verdenken, wenn er Anstoss an den scheinbaren Willkürlichkeiten nahm und eine sichere Methode der Ausrechnung in Vorschlag brachte.

Das scheint Apollonios in seinem *ὠκυτόκιον* gethan zu haben, und zwar nach der mehrerwähnten Methode der myriadischen Theilung.

Lassen wir diese Hypothese zu, so ist auch der Versuch gestattet, jetzt noch dem Apollonios ebenso nachzurechnen, wie dieser einst dem Archimedes nachgerechnet haben mag.

Jedenfalls hat er bei Ausrechnung von Quadratwurzeln alle *μυριοστά* ermittelt, vielleicht auch darüber hinaus eine Annäherung im Rahmen der *δεύτερα μυριοστά* gesucht. Wie weit er bei der Quadrirung von Zahlen, welche aus Ganzen und Myriadenbrüchen gemischt waren, die Stellen ausgerechnet hat, lässt vor der Hand sich nicht entscheiden. Wahrscheinlich hat er hier möglichst gekürzt, da später durch Summirung grösserer ganzer Zahlen und dann durch erneutes Wurzelausziehen, auch eine stärkere Kürzung des im Radicandus auslaufenden Bruches zu keinem andern Betrage von *μυριοστά* der Wurzel führte, als aus dem ungekürzten Bruchtheile des Radicandus sich ergeben hätte.

Ausserdem war vorzusehen, nach welcher Seite hin an jeder Stelle der Rechnung die Brüche zu kürzen waren. Denn im ersten Theile des Archimedischen Beweises zum dritten Satze der Kreismessung waren von Anfang herein statt der genaueren Beträge, welche Schritt für Schritt herauskamen, jedesmal kleinere angenäherte Werthe einzusetzen, so dass am Ende, wo der Bruch umgekehrt wird, eine Annäherung, die grösser als der zuletzt berechnete Betrag ist, herauskam.* Im zweiten Theile des Beweises war allenthalben im entgegengesetzten Sinne zu verfahren.**

So konnte Apollonios bei der Correctur des ersten Theiles der Archimedischen Ausrechnungen, je nachdem er kürzte, zu folgenden Endergebnissen gelangen, wobei ich statt der schwerfälligen Bezeichnung nach *μυριοστά* und *δεύτερα μυριοστά* reguläre Decimalbrüche einsetze:

$$\pi < 3{,}142735,$$

oder

$$< 3{,}14274,$$

oder

$$< 3{,}1428.$$

* Vergl. Näherungswerthe S. 381 bis 389; 419 bis 423.

** Ebenda S. 389 bis 393; 413 bis 418.

Alle diese Werthe liegen, entsprechend den Voraussetzungen der Rechnung, zwischen der von Archimedes berechneten oberen Grenze

$$3+\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}=3{,}14282\bar{7}$$

und der Annäherung für das Verhältniss des Umfanges des umgeschriebenen 96eckes zum Kreisdurchmesser, welche, bis zur zehnten Stelle berechnet auf 3,142714600 auskommt.*

Welchen von diesen drei Beträgen Apollonios am Ende als definitive Näherung gesetzt hat, lässt sich nicht bestimmen. Zu Gunsten der obersten und relativ genauesten Zahl spricht die Analogie mit der Kreismessung des Leonardo von Pisa, der als oberen Grenzwerth

$$\frac{1440}{458\frac{1}{5}}=3\frac{327}{2291}\ \text{(Kennziffer } 163\tfrac{1}{2}\text{)}$$

berechnet hat. Dem für Apollonios' Ausrechnung angenommenen Werthe 3,142735 entspricht als nächst grössere gemischte Zahl, welche auf einen gemeinen Bruch von der Form $\frac{n}{7n+1}$ mit vierstelligem Nenner ausläuft, $3\frac{167}{1170}$ (Kennziffer 167).

Die Rechnungen im zweiten Theile des Archimedischen Beweises sind weit complicirter als die im ersten Theile, und der Versuch, dieselben durch Nachrechnen mit Myriadenbrüchen zu controliren, führt bald zu Schwierigkeiten, die mir als unlösbar erschienen sind. Ich unterlasse es daher, auch nur vermuthungsweise eine Zahl anzugeben, die Apollonios vielleicht gefunden haben könnte. Wohl aber lässt sich die unbekannte Zahl wenigstens in sehr enge Grenzen einschliessen.

Die genaue Annäherung für das Verhältniss des Umfanges des eingeschriebenen 96eckes zum Kreisdurchmesser ist 3,141031953 ... Statt dessen hat Archimedes den kleineren Betrag $\frac{6336}{2017\frac{1}{4}}=3{,}1409096\ldots$ ermittelt. Die von Apollonios ausgerechnete Zahl muss zwischen diesen Grenzen gelegen haben. Nun ist $3\frac{11}{78}=3{,}1410256\ldots$, es läge also die Vermuthung nahe, dass Apollonios einen Werth in Myriadenbrüchen ermittelt habe, den er zuletzt zu $\frac{11}{78}$ kürzen konnte. Allein ich glaube nicht, dass man, ausgehend von der Archimedischen Näherung $\sqrt{3}<\frac{1351}{780}$, bis auf $3\frac{11}{78}$ kommen kann; vielmehr wird eine etwas niedrigere Zahl sich ergeben. Ueberdies

* Diese Annäherung, sowie die später folgenden für das eingeschriebene 96eck und für das um- und eingeschriebene 192eck (S. 166 Anm.) hat Prof. Rietzsch mir freundlichst mitgetheilt.

steht auch ein indirecter Beweis gegen die Annahme, dass Apollonios $3\frac{11}{78}$ ausgerechnet habe, zu Gebote. Denn wenn er diese Näherung mit nur zweistelligem Nenner, welche weit genauer als die Archimedische Zahl $3\frac{10}{71}$ ist, gefunden hätte, so musste das zur Kenntniss der alexandrinischen Mathematiker kommen, und eine so einschneidende Verbesserung der Archimedischen Kreismessung konnte auch bei dem jüngeren Nachwuchs in den dortigen mathematischen Schulen nicht in Vergessenheit gerathen. Ptolemaios aber weiss an der demnächst anzuführenden Stelle nur von einer Kreismessung des Archimedes und begnügt sich zu constatiren, dass die von ihm (Ptolemaios) gefundene Näherung innerhalb der Archimedischen Grenzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ liegt.

Wir dürfen demnach als wahrscheinlich hinstellen, dass die von Apollonios in Myriadenbrüchen berechnete untere Grenze nicht auf einen kleinzahligen gemeinen Bruch sich kürzen liess, der eine augenfällige und allgemein verständliche Verbesserung des Archimedischen Resultates dargestellt hätte. Daraus folgt dann weiter, dass der untere Grenzwerth des Apollonios zwischen $3\frac{11}{78}$ (Kennziffer 11) und $3\frac{1137}{8069}$ $\left(\text{Kennziffer } 10\frac{37}{110}\right)$, das ist zwischen 3,14102 und 3,14091 lag.*

## IV.

Um die Kreismessung des Archimedes vollständig würdigen zu können, ist noch ein Ueberblick über verschiedene Versuche nöthig, welche nach Archimedes bis in die neuere Zeit gemacht worden sind, um die Zahl $\pi$ durch mehr oder minder genaue Annäherungen ungefähr darzustellen. Eine streng methodische Berechnung, durch welche nicht nur $\pi$ über allen praktischen Bedarf hinaus bestimmt, sondern auch der Weg gezeigt wurde, wie man jede etwa noch aufgegebene genauere Bestimmung auffinden könne, hat bekanntlich zuerst Ludolph van Ceulen (1540—1610) ausgeführt. Doch schlug noch nach der Veröffentlichung der Ceulen'schen Rechnungen Adriaen Metius (1527—1607) den alten Weg der ungefähren Annäherung ein. Mit diesem wird also unser Ueberblick abschliessen.

Archimedes hatte schlechterdings keine Näherung für $\pi$ finden, sondern diesen transcendenten Werth nur zwischen leicht kenntliche Grenzen einschliessen wollen (oben S. 122 Anmerk.**). Auch Apollonios hat daran nichts geändert, nur die Grenzen etwas enger gezogen. Um eine wirkliche Annäherung zu finden, bedurfte es der Trigonometrie, und so ist denn in

* Zu erwähnen ist zum Schluss noch die von Tannery, Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne, p. 66,1 angedeutete Hypothese, dass Apollonios den Diameter in 10000 gleiche Theile getheilt und denselben Werth für $\pi$, wie er durch Aryabhatta (unten S. 168) überliefert ist, gefunden habe.

der That der erste, nach Umständen recht genaue Näherungswerth für $\pi$ von Ptolemaios im sechsten Buche seiner Syntaxis (I p. 421 Halma) aufgestellt worden: *τοῦ λόγου τῶν περιμέτρων* (nämlich der Sonne und des Mondes) *πρὸς τὰς διαμέτρους ὄντος ὃν ἔχει τὰ $\bar{\gamma}$ η′ λ″ πρὸς τὸ $\bar{\alpha}$· οὗτος γὰρ ὁ λόγος μεταξύ ἐστιν ἔγγιστα τοῦ τε τριπλασίου πρὸς τῷ ἑβδόμῳ μέρει καὶ τοῦ τριπλασίου πρὸς τοῖς δέκα ἑβδομηκοστομόνοις**, *οἷς ὁ Ἀρχιμήδης κατὰ τὸ ἁπλούστερον συνεχρήσατο.*

Auch hier ist ein fertiges Resultat mitgetheilt, aber über die Methode, wie es ermittelt wurde, nichts bemerkt. Doch ist es leicht, das Fehlende zu ergänzen. Wie Archimedes, so hat auch Ptolemaios seiner Rechnung das 96eck zu Grunde gelegt, und zwar musste er, um seine Sehnentafel benutzen zu können, vom eingeschriebenen 96eck ausgehen. Der Centriwinkel zur Seite dieses Vieleckes beträgt $3^0 45'$. In den Tafeln des Ptolemaios sind nur zu den Winkeln von 30 zu 30 Minuten die Sehnen ausgerechnet; es ist aber durch Beifügung von Interpolationszahlen vorgesehen, dass auch zu jedem bis auf die einzelne Minute bestimmten Winkel die Sehne berechnet werden kann.

So erhalten wir (nach Ptolem. I p. 38 vergl. mit 37) zu dem Winkel von $3^0 45'$ die Sehne $\frac{\bar{3}\ 55'\ 34''}{120}$**, und berechnen daraus, indem wir den Diameter $= 1$ setzen, den Umfang des eingeschriebenen 96ecks zu $\bar{3}\ 8'\ 27''\ 12'''$. Diesen Betrag nun hat Ptolemaios in Erwägung, dass der Umfang des eingeschriebenen Vieleckes kleiner ist als die Kreisperipherie, abgerundet zu $\bar{3}\ 8'\ 30'' = 3\frac{17}{120}$***.

Damit war eine Näherung gefunden, welche die früheren Berechnungen bei Weitem übertraf. Denn wenn auch weder Archimedes noch Apollonios auf einen Mittelwerth für $\pi$ ausgegangen sind, so bleibt es uns doch unverwehrt, behufs der Vergleichung mit der Ptolemäischen Zahl, aus jenen

* So ist nach den Handschriften und im Einklang mit Archimedes I S. 262,21 Heib. die Lesart Halmas *ἑβδομηκοστοῖς μόνοις* zu verbessern. Vergl. Jahrb. f. Philol. herausgegeben von Fleckeisen 1893 S. 748 flg.

** Mit Ptolemaios bezeichne ich durch überstrichene Zahlen die ganzen Einhundertzwanzigstel des Diameters. Vergl. oben S. 122 Anmerkung*.

*** Es darf nicht unerwähnt bleiben, dass diese Näherung genau das arithmetische Mittel zwischen den Verhältnissen der Perimeter des um- und eingeschriebenen 192eckes zum Kreisdurchmesser darstellt. Denn, wenn wir das erstere Verhältniss mit $U_{192}$, das letztere mit $U'_{192}$ bezeichnen und dafür die genauen siebenstelligen Annäherungen einsetzen, so erhalten wir:

$$U_{192} = 3{,}141880,$$
$$U'_{192} = 3{,}141452,$$

und daraus das Mittel . . . . . . $= 3{,}141666 = 3\frac{17}{120}$.

Hiernach könnte die Frage aufgeworfen werden, ob etwa Ptolemaios seine vom eingeschriebenen 96eck abgeleitete Annäherung mit Hilfe des um- und ein-

Grenzwerthen Mittelwerthe von der Form $\frac{n}{7n+1}$ abzuleiten. Die Ptolemäische Zahl trägt die Kennziffer 17. Aus den von Archimedes ausgerechneten Grenzwerthen $3\frac{1335}{9347}$ und $3\frac{1137}{8069}$ berechnet sich ein Mittelwerth $3\frac{309}{2177}$ mit der Kennziffer $22\frac{1}{14}$. Der Fehler in dieser Annäherung für $\pi$ wird merklich verringert, wenn wir, ganz im Sinne des Archimedes, die von ihm gekürzten Grenzwerthe zu Grunde legen; denn von der ausgerechneten unteren Grenze ist die Archimedische untere Kürzung weiter entfernt als die obere Kürzung von der ausgerechneten oberen Grenze. So erhalten wir, indem wir statt $\frac{1}{7}$ aus leicht ersichtlichem Grunde $\frac{10}{70}$ einsetzen, $3\frac{10+10}{70+71} = 3\frac{20}{141}$ mit der Kennziffer 20. Apollonios hat die Archimedischen Grenzen verengert; da er aber wahrscheinlich die Methode des Archimedes im Uebrigen beibehalten hat, so dürfen wir nicht erwarten, dass aus seinen Begrenzungen ein genauerer Mittelwerth sich ergeben werde. Setzen wir nach den obigen Darlegungen die Grenzen auf etwa 3,1428 und 3,1409, so ergiebt sich ein Mittelwerth mit der Kennziffer 20,1..., also keine wesentliche Abweichung von der soeben gefundenen Kennziffer 20.

Ptolemaios hat also nicht nur dadurch sich ein Verdienst erworben, dass er zuerst schlechthin eine Näherung für $\pi$ setzte, sondern diese Näherung ist auch merklich genauer als die Mittelwerthe, welche mit einiger Wahrscheinlichkeit aus den Grenzbestimmungen des Archimedes und Apollonios sich ableiten lassen.

Einen bedeutenden Schritt weiter hat ein unbekannter griechischer Mathematiker gethan, den zwar keine von unseren Quellen nennt, dem aber der Inder Aryabhatta (geb. 476) ohne Zweifel gefolgt ist, wenn er in seinem Rechenbuche schreibt: Zu 100 (ist) 4 zu addiren, (die Summe)

---

geschriebenen 192eckes controlirt habe. Um hierauf zu antworten bedürfte es einer besonderen Untersuchung darüber, welche Annäherungen für $U_{192}$ und $U'_{192}$ Ptolemaios hat auffinden können. Dass dabei nicht die eben angeführten genauen Annäherungen in Betracht kommen dürfen, ist klar; doch liegt es nicht ausser dem Bereiche der Wahrscheinlichkeit, dass auch weniger genaue, für Ptolemaios aber erreichbare Annäherungen einen Mittelwerth nahe bei $3\frac{17}{120}$ ergeben haben würden. — Ohne Belang ist die Erklärung des Theo (p. 316,24 edit. Basil.) zu der obigen Stelle. Er denkt nicht daran, dass Ptolemaios doch das eingeschriebene 96eck nach seinen eigenen Sehnentafeln berechnen musste, und beruhigt sich dabei, die Archimedischen Grenzwerthe $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ umzusetzen zu den sexagesimalen Annäherungen $\bar{3}$ 8′ 34″ und $\bar{3}$ 8′ 27″ und daraus als ungefähres Mittel die von Ptolemaios gesetzte Zahl $\bar{3}$ 8′ 30″ zu entnehmen (*ὧν μεταξύ ἐστιν ὁ τῶν $\bar{γ}$ η′ λ″ πρὸς τὸ $\bar{α}$ λόγος*).

mit 8 zu multipliciren, dazu noch 62000 zu addiren, so (erhält man) für einen Diameter von 2 Myriaden den angenäherten Werth der Peripherie des Kreises.*

Als einen Glücksfall dürfen wir es bezeichnen, dass der indische Mathematiker seiner Quelle ganz wörtlich gefolgt ist, anstatt die nahe liegende Kürzung $\frac{3927}{1250}$, welche später von Bhaskara gesetzt worden ist**, anzuführen. So erkennen wir, dass der Bruch mit dem Zähler 62832 und dem Nenner „2 Myriaden" das arithmetische Mittel aus zwei Brüchen, deren jeder 1 Myriade zum Nenner hatte, darstellt. Nach den Tafeln des Ptolemaios habe ich vor Kurzem die Sehne des Winkels von $3^0\,45'$ auf $\bar{3}\ 8'\ 27''\ 12'''$ berechnet. Das ergiebt, zu einer gemischten Zahl mit Myriadenbrüchen umgerechnet, 3,140888..., wofür in Anbetracht, dass es sich um die untere Grenze handelt, als Abrundungen die kleineren Werthe 3,14088, oder, wenn nur die μυϱιοστά berücksichtigt wurden, 3,1408 zu setzen sind. Es stellt also die von Aryabhatta überlieferte Zahl 3,1416 das arithmetische Mittel aus den Grenzwerthen 3,14088 und 3,14232, bez. 3,1408 und 3,1424, dar.

Der griechische Autor des Aryabhatta hat sich der Myriadenbrüche bedient, das heisst, er ist in derjenigen Bruchrechnung geschult gewesen, die, wie Eutokios meldet, in der Logistik des Magnus gelehrt wurde (siehe Abschnitt II). Er hat mit völliger Sachkenntniss aus den Tafeln des Ptolemaios, statt der von letzterem gewählten Abrundung, das genauere Verhältniss des Umfanges des eingeschriebenen 96eckes zum Kreisdurchmesser ermittelt und dieses mit richtiger Annäherung zu 3,14088 oder 3,1408 umgesetzt. Dann hat er dieser unteren Grenze als obere Grenze einen Werth gegenübergestellt, der wahrscheinlich als Mittel zwischen den Verhältnissen der Perimeter des umgeschriebenen 96- und 192eckes zum Kreisdurchmesser zu betrachten ist. Denn wenn wir das erstere Verhältniss mit $U_{96}$, das letztere mit $U_{192}$ bezeichnen, so können wir dafür zwei Werthe einsetzen, welche nur nach Methoden, die im Alterthum erwiesener Maassen bekannt waren, berechnet sind. Für $U_{96}$ ist oben (S. 163 flg.) ganz nach Archimedischen Voraussetzungen und mit Anwendung der Myriadenbrüche 3,142735 oder in fünfstelliger Abrundung 3,1428 ermittelt worden.

---

* So habe ich die französische Uebersetzung von L. Rodet, Leçons de calcul d'Âryabhaṭa, Journal asiatique, 7. série, tome XIII (1879) S. 399 wörtlich ins Deutsche übertragen. Mit Recht bemerkt Rodet S. 411, dass die eigenthümliche, von Aryabhatta statt des Bruches $\frac{3927}{1250}$ gewählte Bezeichnung „Verhältniss von 62832 zu 2 Myriaden" unverkennbar auf eine griechische Quelle hinweist: car les Grecs seuls au monde ont fait de la myriade l'unité numérique de second ordre. Vergl. auch Cantor, Vorlesungen I² S. 558, 561 flg., 595—604, 612.

** Vergl. Algebra with arithmetic — from the Sanscrit — translated by H. Th. Colebrooke, London 1817, p. 87; Rodet a. a. O.; Cantor, Vorlesungen I², S. 612; Rudio, Archimedes u. s. w. S. 18.

Berechnet man dann weiter, genau nach denselben Voraussetzungen, $U_{192}$, so erhält man 3,141985 oder abgerundet 3,1420. Mag man nun die genaueren oder die abgerundeten Zahlen zu Grunde legen, so ergiebt sich als arithmetisches Mittel in fünfstelliger Ausrechnung 3,1424. Höchstwahrscheinlich hat diese Zahl dem unbekannten Autor als obere Grenze vorgeschwebt, und daraus folgt weiter, dass er als untere Grenze nicht die oben angeführte sechsstellige Zahl, sondern ebenfalls eine fünfstellige Abrundung, nämlich 3,1408, gewählt hat.

Wie der unbekannte Autor dazu gekommen ist, jenes Mittel aus $U_{96}$ und $U_{192}$ zu wählen, bleibt freilich vor der Hand eine ungelöste Frage. Jedenfalls stellt die von ihm gefundene Annäherung für $\pi$ einen wesentlichen Fortschritt gegen früher dar. Denn das Mittel aus seinen beiden Grenzwerthen ergiebt $3\frac{177}{1250}$ mit der Kennziffer $16\frac{1}{11}$, und dieser Werth liegt merklich näher bei $\pi$ als der Ptolemäische $3\frac{17}{120}$ mit der Kennziffer 17.

Die Epoche des unbekannten Autors fällt zwischen Ptolemaios und Aryabhatta, und zwar gewiss nicht unmittelbar nach dem ersteren, aber auch nicht ganz nahe vor dem letzteren (denn im 5. Jahrhundert gab es nur Erklärer und Bearbeiter der älteren griechischen Werke, keine producirenden Mathematiker mehr). So erhalten wir als ungefähre Epoche das dritte bis vierte Jahrhundert.*

Von der Annäherung mit der Kennziffer $16\frac{1}{11}$ wäre es nur ein kleiner Schritt bis zu der besseren $3\frac{16}{113}$ mit der glatten Kennziffer 16 gewesen. Damit hat es indes gute Weile gehabt; erst Metius hat zu Ende des 16. Jahrhunderts diesen Werth gefunden. Dazwischen aber ist eine grosse Reihe von anderen Näherungsversuchen zu verzeichnen, welche weit weniger genau als die Zahlen des Ptolemaios und des griechischen Autors des Aryabhatta sind. Es seien jedoch hier nur diejenigen Versuche erwähnt, welche für den Vergleich mit den altgriechischen Kreismessungen bemerkenswerth sind.

Zunächst sei der Näherung des Liu-hwuy $3\frac{7}{50}$ (Kennziffer 7) gedacht.** Ein Blick auf die obige Uebersicht (S. 130 flg.) zeigt, dass dieser Werth weit von der unteren Archimedischen Begrenzung, mithin um so weiter von $\pi$ entfernt ist. Möglicherweise ist uns hier nur die untere

* Wenn Magnus, der Verfasser der Logistik, für identisch mit Magnus, dem Zeitgenossen des Kaisers Julianus (oben S. 133 Anmerk.*), gelten darf, so ist der Autor des Aryabhatta genauer an das Ende des 4. Jahrhunderts zu setzen.

** Cantor I² S. 641; Rudio S. 20. Die Epoche des Liu-hwuy ist unbekannt. Er wird genannt von Tsu-tschung-tsche, der dem 6. Jahrhundert angehört haben soll.

Grenze einer Annäherung überliefert, die wir decimal als 3,14 zu lesen haben.*

Erst Leonardo von Pisa ist im Jahre 1220 in seiner Practica geometriae nach dem Vorgange des Archimedes zu einer Umgrenzung für $\pi$ zurückgekehrt, die er ebenfalls vom um- und eingeschriebenen 96ecke ableitete.** Er fand als obere Grenze $\frac{1440}{458\frac{1}{5}}$ $\left(\text{Kennziffer } 163\frac{1}{2}\right)$, und als untere Grenze $\frac{1440}{458\frac{4}{9}}$ $\left(\text{Kennziffer } 11\frac{5}{26}\right)$. Dabei ist ein Fehler untergelaufen; denn die untere Grenze $\frac{1440}{458\frac{4}{9}} = 3{,}141057\bar{7}$ ist grösser als das Verhältniss des Umfanges des eingeschriebenen 96eckes zum Kreisdurchmesser (oben S. 129 flg.), während sie doch nach Archimedischer Methode kleiner sein sollte. Aus beiden Grenzwerthen berechnete er im Nenner das arithmetische Mittel $458\frac{9+20}{2 \cdot 45}$, und rundete den auslaufenden Bruch $\frac{29}{90}$ zu $\frac{1}{3}$ ab. So erhielt er für $\pi$ die Näherung $\frac{1440}{458\frac{1}{3}} = 3\frac{39}{275}$ $\left(\text{Kennziffer } 19\frac{1}{2}\right)$, erreichte also nur eine unbedeutende Verbesserung des Mittelwerthes, welcher vor Kurzem aus den Archimedischen Grenzen gezogen worden ist (S. 167).

Mehr als zwei Jahrhunderte vergingen, bis Nicolaus Cusanus (1401 — 1464) in der Schrift de transformationibus geometricis, welche sich mit der Aufgabe der Arcufication einer Geraden beschäftigt, eine Construction angab, aus welcher nachträglich für $\pi$ die Annäherung 3,142337... ermittelt worden ist.*** Cusanus selbst hat vermuthlich die Näherung $3\frac{430}{3021} = 3{,}142337\bar{7}$ im Auge gehabt.† Dieser Betrag steht dem

---

* Ludolph van Ceulen de circulo p. 28 (vergl. unten S. 171 Anmerk.***) setzt 3,14 als erste untere Begrenzung für $\pi$, und stellt als obere Grenze 3,14 + 0,01 gegenüber. Später (p. 31 flg.) wird eine 19stellige und dann eine 21stellige Zahl von der Art ausgerechnet, dass die obere Grenze jedesmal nur um eine Einheit der letzten Stelle grösser ist als die untere Grenze.

** Scritti di Leonardo Pisano pubbl. da B. Boncompagni II S. 90 flg. (am Ende der fünften Zeile auf S. 90 ist $\frac{1}{5}$ 458 zu verbessern statt $\frac{1}{3}$ 458). — Nachträglich ist hier auf die Schrift von H. Weissenborn, Die Berechnung des Kreis-Umfanges bei Archimedes und Leonardo Pisano, Berlin 1894, zu verweisen, die einige Monate später, als das Manuscript meiner Abhandlung der Redaction überreicht worden war, erschienen und vom Verfasser freundlichst mir zugesendet worden ist. Daselbst findet sich S. 30 flg. ein interessanter Vergleich des von Leonardo angewandten Verfahrens mit der Archimedischen Methode.

*** Cantor II S. 178 flg.

† Da zu 3,142337... die angenäherte Kennziffer 39,09... ist, so hat Rietzsch darin den rationalen Werth $39\frac{1}{11}$ erkannt und danach die von Cusanus beabsichtigte Näherung auf $3\frac{430}{3021}$ bestimmt.

oberen Grenzwerthe des griechischen Mathematikers, dem Aryabhatta gefolgt ist (S. 169), sehr nahe.

Wieder um ein Jahrhundert später wurde ein nachgelassenes Werk des Orontius Finaeus (1494 — 1555) de rebus mathematicis hactenus desideratis veröffentlicht, in welchem als obere Grenze für $\pi$ die Archimedische Zahl $\frac{22}{7}$, als untere Grenze aber $\frac{245}{78} = 3\frac{11}{78}$ (Kennziffer 11) gesetzt wurde.* Mit letzterem Werthe hatte Finaeus die untere Grenze des Archimedes dahin verbessert, dass er den nächsten höheren Bruch mit zweistelligem Nenner auffand, der zugleich die Bedingung erfüllte, kleiner als das Verhältniss des Umfanges des eingeschriebenen 96eckes zum Kreisdurchmesser zu sein (oben S. 129 flg.). Allein er beging dann den Fehler, $\pi$ gleich dieser unteren Grenze zu setzen**, wählte also eine Näherung, die weit ab von den vorher besprochenen Mittelwerthen mit den Kennziffern 20 bis $16\frac{1}{11}$ lag.

Im Jahre 1596 veröffentlichte Ludolph van Ceulen, nachdem er die später nach ihm benannte Zahl schon in Einzelschriften bekannt gegeben hatte, sein Werk *van den Circkel.**** Dadurch angeregt, hatte Adriaen Anthoniß, gewöhnlich nach seinem Geburtsorte Metz Metius benannt (1527 — 1607), in Erinerung an die Kreismessung des Archimedes eine Umgrenzung für $\pi$ in möglichst kleinzahligen Brüchen von der Form

---

* Cantor II S. 347 flg.; Rudio S. 30.

** Cantor II S. 348.

*** Rudio S. 36 flg., Cantor II S. 551 flg. Mir stand zur Benutzung die lateinische Ausgabe: Ludolphi a Ceulen de circulo et adscriptis liber — omnia e vernaculo sermone Latina fecit — Willebrordus Snellius, Lugd. Bat. 1619, zu Gebote. Der Verfasser schliesst sich insofern ganz an Archimedes (den er p. 32 erwähnt) an, als er $\pi$ lediglich zwischen eine obere und untere Grenze einschliesst. Er bringt aber dazu als Neues (tot retro seculis a nemine unquam tentatum, nedum ut inventum sit) die Ausrechnung der Perimeter von Vielecken von sehr hohen Seitenzahlen nach einer übersichtlichen, freilich für das praktische Rechnen schwer zu handhabenden Methode. Zuerst geht er vom Fünfeck aus und gelangt durch fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahlen zu einer oberen und unteren Grenze von je 12 Decimalstellen hinter dem Komma. Dann legt er der Reihe nach das Quadrat, das Zwölfeck und das Sechzigeck zu Grunde und bildet dazu wieder durch Verdoppelung der Seiten andere Vielecke von möglichst hohen Seitenzahlen. Aus dem um- und eingeschriebenen Vielecke von $60.2^{29}$ Seiten (Rudio S. 36) leitet er eine Umgrenzung von 20 Stellen ab. Später hat er in dem Werke „De Arithmetische en Geometrische fondamenten" eine Ableitung bis auf 32 Stellen, und zuletzt nach glaubwürdigen Berichten eine solche von 35 Stellen berechnet (Rudio S. 37). Mag auch die von ihm angewendete Methode im Vergleich zu den später gefundenen schwerfällig erscheinen, so bleibt ihm doch das Verdienst, zuerst ausdrücklich einen Weg gezeigt zu haben, wie man zu immer genaueren Annäherungen gelangen könne (si cui libeat eandem viam insistere, huius rationis terminos etiam longe ulterius producere licebit). — Beiläufig sei bemerkt, dass durch die genauen Ausrechnungen Ludolph's van Ceulen zum ersten Male der Weg gezeigt worden ist, wie man an

$\frac{n}{7n+1}$, nämlich $3\frac{15}{106}$ und $3\frac{17}{120}$ aufgestellt.* Das sind Werthe mit den Kennziffern 15 und 17, und Metius hat auch, wie sein Sohn Adriaen Metius der Jüngere berichtet, es nicht versäumt, daraus nach Archimedischer Methode das Mittel $3\frac{15+17}{106+120} = 3\frac{16}{113}$ (Kennziffer 16) = 3,1415929... zu ziehen. So ist, als schon eine weit vollkommenere Annäherungsmethode gefunden worden war, nachträglich noch der beste Mittelwerth für $\pi$ festgestellt worden, der nach den Anschauungen und Weisungen des Archimedes überhaupt zu erreichen war. Die Ptolemäische Näherung $3\frac{17}{120}$ war als obere Grenze verwerthet und dazu die passendste untere Grenze ermittelt worden. Denn wenn wir die erstere mit $o$, die letztere mit $u$ bezeichnen, so war nun die Differenz $\pi - u$ der Differenz $o - \pi$ möglichst genähert, und so ergab sich leicht für $\pi$ ein Bruch mit dreistelligem Nenner, $\frac{355}{113}$, das ist die richtige Annäherung bis auf 6 Stellen hinter dem Komma. Natürlich war das aber nicht eher herauszubekommen, als bis die Ludolphische Zahl bekannt geworden war.

---

Stelle der Umgrenzung die Annäherung schlechthin setzen kann, ohne damit von der strengen Forderung der Archimedischen Methode abzuweichen. Ceulen schrieb noch allenthalben sowohl den grösseren als den kleineren Grenzwerth hin. Da aber jeder grössere Werth den kleineren nur um eine Einheit der letzten Stelle übertraf, so haben die Späteren mit Recht sich begnügt, nur den kleineren Grenzwerth zu schreiben und dahinter Punkte zu setzen. Somit bedeutet z. B. 3,14159... nicht blos, dass die so geschriebene Zahl noch mehr Stellen als die hier aufgeführten hat, sondern zugleich auch, dass sie zwischen den Grenzen 3,14160 und 3,14159 liegt. Auch die andere, oben S. 129 Anmerk.**, erwähnte Bezeichnungsweise lässt sich, wie leicht ersichtlich, auf eine Archimedische Umgrenzung zurückführen. Denn es bedeutet z. B. $3,14\bar{2}$ eine Zahl die kleiner als 3,1420 und grösser als 3,1415 ist; dagegegen bedeutet 3,142 (nämlich als angenäherter, nicht etwa als genauer Werth) eine Zahl, die grösser als 3,1420 und kleiner als 3,1425 ist.

* Rudio S. 32 flg.; Cantor II S. 552 flg.

## Recensionen.

J. Deruyts. **Essai d'une Théorie Générale des Formes Algébriques.** Bruxelles 1891. Hayez. IV und 156 S.

Die neueren Untersuchungen in der Formentheorie gehören zwei wesentlich verschiedenen Richtungen an; auf der einen Seite steht das Specialstudium einzelner Formen und Formenklassen, das grosse hierbei angesammelte Rechnungsmaterial geht über die Bedürfnisse der Gegenwart weit hinaus; auf der anderen Seite bewegen sich Probleme ganz allgemeinen Charakters (Endlichkeitsfragen, Reihenentwickelungen u. dergl.). Zu dieser zweiten Kategorie ist auch die vorliegende Schrift des talentvollen belgischen Mathematikers zu rechnen, die das wichtige Problem der „Reduction" der Formen behandelt.

Bekannt ist eine Abhandlung von Clebsch aus seiner letzten Lebenszeit, in der untersucht wird, wie sich die invarianten Eigenschaften von Formen, welche von einer beliebigen Reihe von Variabelnsystemen abhängen, zurückführen lassen auf diejenigen von Formen, für welche sich die Anzahl der Variabelnsysteme verringert hat. Das wesentliche Hilfsmittel ist ihm das gleichzeitige Operiren mit Coordinaten von verschiedenen ebenen Mannigfaltigkeiten, die sich als vollständige Determinanten von Matrices darstellen, deren Elemente nur Variabeln einer und derselben Art (Punktvariabeln) enthalten.

Eine ganz andere Behandlung des Gegenstandes verdankt man sodann Capelli, der es vorzieht, ausschliesslich Punktvariabeln zu Grunde zu legen. Indem er in den Mittelpunkt der Theorie den Polarenprocess und den inneren Zusammenhang zwischen den verschiedenen Polaroperationen stellt, vermag er eine elegante (endliche) Reihenentwickelung aufzustellen, welche das ursprüngliche Problem direct löst.

Deruyts hat nun seinerseits einen Weg eingeschlagen, der zwar formal einige Aehnlichkeit mit dem Capelli'schen Verfahren aufweist, jedoch in den Grundzügen durchsichtiger ist und vor Allem für eine weitere Entwickelung der Theorie geeigneter erscheint.

Der Grundgedanke des Verfassers — merkwürdiger Weise übrigens ziemlich gleichzeitig von Kronecker entwickelt — ist, die allgemeine lineare Substitution von $n$ Variabeln, oder, besser gesagt, die allgemeine lineare Gruppe, „aufzulösen" in eine Anzahl weit einfacherer Untergruppen. Eine

Function der Variabeln, welche sich gegenüber einer solchen Untergruppe, bis auf eine Potenz der Substitutions-Determinante, invariant verhält, und demnach einer charakteristischen linearen partiellen Differentialgleichung genügt, heisst eine „seminvariante" Function; erst, wenn gewisse einfache arithmetische Bedingungen erfüllt sind, geht sie in die gewöhnlich allein betrachtete „invariante Function" über, und tritt, als Leitglied der letzteren, unmittelbar in Evidenz.

Die Untersuchung der Eigenschaften dieser seminvarianten Functionen bildet das Fundament des Ganzen, insbesondere ergeben sich so alle die speciellen Eigenschaften wieder, welche von früheren Autoren (Cayley, Sylvester, d'Ocagne, Perrin u. A.) über Seminvarianten ausgesprochen sind.

Der Verfasser bekundet in der analytischen Deduction eine grosse Gewandtheit, indem er einmal die Clebsch-Aronhold'sche Symbolik auf die seminvarianten Functionen überträgt, andererseits aber, wo es zweckmässiger erscheint, die charakteristischen partiellen Differentialgleichungen benützt.

Mit Hilfe eben dieser seminvarianten Functionen gelingt es in der That, Formen mit mehreren Variabelnreihen auf einfacheren Bildungen aufzubauen.

Der Vorzug der neuen Methode zeigt sich beispielsweise bei der bisher vergeblich versuchten Durchführung der Aufgabe, die Anzahl der linear unabhängigen invarianten Functionen von vorgegebenen Grad- und Gewichtszahlen zu ermitteln.

Der Referent möchte dem Verfasser nur empfehlen, an die Abstractionskraft der Leser nicht zu grosse Anforderungen zu stellen, und die Einstreuung leichter Beispiele nicht zu verschmähen. Im Uebrigen ist die Diction eine klare und flüssige.

W. Franz Meyer.

---

E. Study. **Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen.** Eine analytisch-geometrische Untersuchung. Abhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. XX. Leipzig 1893. Hirzel. 146 S.

Trotzdem die vorliegende Abhandlung in einer Zeitschrift erschienen ist, so verdient sie hier wohl doch eine eingehendere Besprechung, einmal, weil ursprünglich eine Buchausgabe geplant war und hiervon nur aus äusseren Gründen abgegangen ist, sodann aber mit Rücksicht auf den Inhalt.

Im Verhältniss zu der ausgedehnten mathematischen Production der Gegenwart ist es eine seltene Erscheinung, wenn ein elementarer, insonderheit geometrischer Gegenstand von höheren Gesichtspunkten aus betrachtet und hierdurch mit neuen Gedanken erfüllt wird. Es ist wohl ausser Frage, dass die heutzutage bestehende Kluft zwischen Schulmathe-

matik und akademischer Mathematik der Wissenschaft als Ganzem keineswegs zum Heile gereicht. Umsomehr möchte der Referent die Arbeit des Herrn Verfassers begrüssen, in welcher die sphärische Trigonometrie zu drei wichtigen Gebieten der höheren Mathematik in Beziehung gesetzt wird, zur Gruppentheorie, zur Theorie der orthogonalen Substitutionen und vor Allem zu derjenigen der elliptischen Functionen. Das eigentliche, fortlaufende Leitmotiv ist der Gruppenbegriff, der ja unzweifelhaft dazu berufen ist, die künftige Wissenschaft zu beherrschen.

Da der Verfasser nicht in letzter Linie Schulmänner als Leser im Auge gehabt hat, so ist das Maass der zum Verständniss nothwendigen Vorkenntnisse so gering wie möglich bemessen worden; die grundlegenden Begriffe der Gruppentheorie werden überall da, wo sie zuerst auftreten, erklärt, und selbst im dritten Abschnitte, wo die elliptischen Functionen im Vordergrunde stehen, wird nur auf die Fundamentalformeln der Weierstrass'schen Theorie recurrirt, die durch die Schwartz'sche Formelsammlung, wie durch das Halphen'sche Werk Jedem zugänglich geworden sind.

Die Hauptschwierigkeit in der Auffassung scheinen nach der Meinung des Referenten die geometrischen Conceptionen des ersten Abschnittes darzubieten; mancher Leser wird sich eines unbehaglichen Gefühls nicht erwehren können, wenn er gleich im Anfange auf die ihm lieb und vertraut gewordene Vorstellung des sphärischen Dreiecks verzichten soll; die vom Verfasser zu Grunde gelegte Verallgemeinerung der fraglichen Vorstellung geht sogar über die bekannten Ideen von Möbius hinaus. Das Massgebende ist, dass sowohl die Seiten, wie die Winkel eines sphärischen Dreiecks mit einem bestimmten Drehungssinn behaftet erscheinen.

Für die Winkel um einen Punkt $A$ der Kugelfläche wird als positiver Drehungssinn etwa der festgesetzt, der für einen ausserhalb stehenden Beobachter dem Sinne der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzt ist. Die Grenzen eines Winkels sind 0 und $2\pi$.

Auf jedem der drei Hauptkreise, welche je zwei der drei Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$ verbinden, wird ebenfalls ein positiver Drehungssinn willkürlich angenommen. Läuft man in positivem Sinne von $A_1$ nach $A_2$, von $A_2$ nach $A_3$, und von $A_3$ wieder nach $A_1$, so sind damit drei, zwischen 0 und $2\pi$ enthaltene Bögen $a_3$, $a_1$, $a_2$ gegeben; ferner sei $\alpha_1$ der Winkel, um den man den Hauptkreis $A_3 A_1$, unter Festhaltung der Ecke $A_1$, positiv drehen muss, damit seine positive Richtung mit der positiven Richtung des Hauptkreises $A_1 A_2$ zusammenfällt, entsprechend $\alpha_2$, $\alpha_3$.

Der Inbegriff solcher sechs Stücke: dreier Seiten $a$ und dreier Winkel $\alpha$, ist ein „sphärisches Dreieck“, je zwei Dreiecke, die in diesen sechs Stücken übereinstimmen, gelten als identisch.

Ein unmittelbarer Erfolg der getroffenen Definitionen ist ein vollkommenes Reciprocitätsverhältniss zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks.

Drei gegebene Kreisbögen lassen sich nicht immer zu einem Dreieck zusammensetzen, sie haben vielmehr einem Systeme von acht Ungleichungen (Determinationen) zu genügen; es ist von Bedeutung, dass diese Ungleichungen ohne vorherige Entwickelung der Formeln der sphärischen Trigonometrie direct aus den Definitionen fliessen. Die einfachste Form der Ungleichungen wird durch Einführung der Stücke:

$$2s_0 = 2\pi - a_1 - a_2 - a_3, \quad 2s_1 = -a_1 + a_2 + a_3,$$
$$2s_2 = a_1 - a_2 + a_3, \quad 2s_3 = a_1 + a_2 - a_3$$

erzielt.

Abgesehen von Grenzfällen resultiren so 16 Typen vollständig reeller Dreiecke, 32 Typen solcher, bei denen nur die Seiten resp. die Winkel reell sind. Diese verschiedenen Gestalten von Dreiecken sind aber keineswegs getrennte Mannigfaltigkeiten, sondern können, wenigstens zum Theil, durch Vermittelung ausgearteter Dreiecke stetig in einander übergeführt werden.

Während bisher ein Dreieck durch drei Punkte einer Kugel bestimmt wurde, möge nunmehr die weitergehende Verallgemeinerung Platz greifen, wonach ein Dreikant (oder Dreiflach), mit dem Mittelpunkte der Kugel als Scheitel, als das Erzeugende anzusehen ist. Es entstehen dann 64 sogenannte „Nachbardreiecke“, die sich auf 16 reduciren, wenn man je vier zusammenfasst, die durch gleichzeitige Vorzeichenwechsel aller Seiten oder aller Winkel in einander übergeführt werden.

Die Grundlage alles Folgenden ist die Thatsache, dass die Seiten und Winkel von 64 Nachbardreiecken durch eine „Gruppe“ 64 linearer Substitutionen $G_{64}$ zusammenhängen. Um die wichtigsten hier anzuführen, so transformiren sich die Seiten $a$ und die Winkel $\alpha$ bei den Substitutionen $S_1$ resp. $T_1$ in:

$$S_1) \quad a_1,\ \pi + a_2,\ \pi + a_3;\quad 2\pi + \alpha_1,\ -\alpha_2,\ -\alpha_3,$$
$$T) \quad -a_1,\ -a_2,\ -a_3,\quad \alpha_1\ \ \alpha_2,\ \ \alpha_3.$$

Hierzu kommen die durch cyklische Vertauschung hervorgehenden $S_2 S_3$, sowie die zu allen diesen dualistischen $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$, T.

Vermöge dieser acht erzeugenden Operationen lässt sich jede Substitution der $G_{64}$ im Wesentlichen auf eine und nur eine Weise darstellen.

Unter den Untergruppen von $G_{64}$ ist namentlich eine $G_{16}$ bemerkenswerth, die aus der Zusammensetzung der $S$ mit den $\Sigma$ und der Identität erwächst. Diese Gruppen reichen indessen noch nicht aus, um die „Vorzeichen-Modificationen“, welche die Formeln der sphärischen Trigonometrie eingehen können, völlig zu übersehen, hierzu ist eine Art „Erweiterung“ nöthig.

Es wird nämlich nunmehr die Beschränkung aufgehoben, wonach Dreiecke als identisch gelten sollten, deren Seiten und Winkel sich nur

um Vielfache von $2\pi$ unterscheiden. Mit anderen Worten, die früheren Substitutionen werden jetzt ergänzt durch solche von der Form:

$$a'_i = a_i + 2k_i\pi, \quad \alpha'_i = \alpha_i + 2K_i\pi \quad (i = 1, 2, 3: k, K \text{ ganzzahlig}).$$

Hierbei erweist es sich als zweckmässig, die Bedingung hinzuzufügen, dass die Summe aller sechs $k$ und $K$ eine gerade Zahl sein soll.

Die ursprüngliche $G_{64}$ erweitert sich dadurch zu einer (unendlichen) ihr isomorphen Gruppe $\mathfrak{G}$; man kann leicht von $\mathfrak{G}$ zu $G_{64}$ und $G_{16}$ zurückgelangen. Endlich bedarf es noch der Eintheilung aller Dreiecke in zwei Klassen, die eigentlichen und uneigentlichen Dreiecke: die ersteren können aus einem Dreiecke, dessen Seiten und Winkel zwischen den Grenzen 0 und $2\pi$ liegen, durch stetige Aenderung hergeleitet werden, während das bei den letzteren, selbst auf imaginärem Wege — durch analytische Fortsetzung — nicht möglich ist. Jede der beiden Dreiecks-Mannigfaltigkeiten geht durch $\mathfrak{G}$ in sich über.

Die $G_{64}$ giebt damit zu einer $G_{128}$ Veranlassung.

Neben der Erweiterung der endlichen Gruppen auf unendliche geht nun eine zweite, die im endlichen Gebiet verbleibt.

Einmal nehme man die sechs Vertauschungen der Indices 1, 2, 3 hinzu, wodurch insbesondere aus der $G_{16}$ eine $G_{6.16} = G_{96}$ wird, andererseits vollziehe man durch Vertauschung der Seiten mit den Winkeln den Uebergang zum Polardreieck. Mittelst der Vereinigung beider Erweiterungen treten an die Stelle von $G_{128}$ und $G_{16}$ die neuen bemerkenswerthen Gruppen

$$G_{2.6.128} = G_{1536} \text{ und } G_{2.6.16} = G_{192}.$$

Weshalb gerade die genannten Gruppen eine besondere Rolle spielen, ersieht man aus den Vorzeichenänderungen, welche die trigonometrischen Functionen der ganzen und halben Seiten resp. Winkel denselben gegenüber erleiden.

Nach diesen gruppentheoretischen Vorbereitungen, die übrigens der Systematik halber ausführlicher gediehen sind, als es für das Verständniss des Folgenden erforderlich gewesen wäre, wendet sich der Verfasser im zweiten Abschnitte zu den Formeln der sphärischen Trigonometrie selbst und ihrer algebraischen Durcharbeitung, welche im Zusammenhange mit den orthogonalen Substitutionen ihren prägnanten Ausdruck findet.

Obgleich schon Lagrange nachgewiesen hatte, dass die zu seiner Zeit bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie ausschliesslich aus den drei Fundamentalformeln des Cosinussatzes durch trigonometrische Umformung abgeleitet werden können, so hat man später doch wieder diesen einfachen Weg verlassen, indem man zum Aufbau des Systems die Geometrie mehr als nöthig heranzog.

Der Verfasser nimmt hier den Weg von Lagrange wieder auf, und erhält auf kürzeste Weise der Reihe nach sämmtliche Formeln von Bedeutung.

Die Delambre'schen Formeln zeigen hierbei am deutlichsten die Folgenschwere der früher getroffenen Eintheilung der Dreiecke in eigentliche und uneigentliche: Bei den einen gelten die oberen, bei den anderen die unteren Vorzeichen, während z. B. der Cosinus- und Sinussatz für beide gleichmässig gilt. Da nun die eigentlichen Dreiecke nicht wieder in getrennte Schaaren zerfallen, sondern eine continuirliche Mannigfaltigkeit bilden, so ist ein zweiter Fortschritt, wie der vom Cosinus- und Sinussatz zu den Delambre'schen Formeln führende, der die Bestimmung des Vorzeichens einer an sich rational bekannten Quadratwurzel involvirt, nicht möglich: Die Entwickelung der sphärischen Trigonometrie ist also nach gewisser Richtung hin abgeschlossen.

Ohne auf die fortlaufende Bezugnahme auf die früher aufgestellten Gruppen einzugehen, kommen wir sofort zu dem Kernpunkte des Abschnittes, der algebraischen Umformung der Delambre'schen Gleichungen.

Führt man in ihnen die Grössen $l_i = ctg\frac{a_i}{2}$, $\lambda_i = ctg\frac{\alpha_i}{2}$ als Fundamentalelemente ein, so findet man, dass sich die Producte $l_i l_k$ und $\lambda_i \lambda_k$ gegenseitig linear ausdrücken nach dem Muster der Formel:

$$l_2 l_3 = \frac{1 - \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2}{-1 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2} \text{ (nebst der dualistischen).}$$

Diese drei Formeln enthalten wohl den algebraisch einfachsten Ausdruck der Abhängigkeit zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks.

Andererseits stehen dieselben Producte $l_i l_k$ und $\lambda_i \lambda_k$ auch zu den Anfangs eingeführten Stücken $s$, $\sigma$ in höchst eleganter Beziehung:

$$\sin s_0 : \sin s_1 : \sin s_2 : \sin s_3 = 1 : \lambda_2\lambda_3 : \lambda_3\lambda_1 : \lambda_1\lambda_2 \text{ (nebst der dualistischen).}$$

Es liegt nunmehr nahe, Zähler und Nenner der Ausdrücke für die $\lambda_i\lambda_k$ und $l_i l_k$ als selbständige Grössen $Y_0$, $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$; $Z_0$, $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$ einzuführen. Dann drücken sich sowohl die $Y$ durch die $Z$ (und umgekehrt), als auch beide durch vier neue Hilfsgrössen $X_0$, $X_1$, $X_2$, $X_3$ linear in Formeln aus, die bereits einen unmittelbaren Zusammenhang mit der Jacobi'schen Begründung der elliptischen Functionen durch die $\Theta$-Functionen erkennen lassen.

Vor der Hand ist es von grösserer Wichtigkeit, aus den $Y$ und $Z$ quadratische Ausdrücke aufzubauen nach dem Schema:

$$a_{00} = \Sigma Y^2{}_i = \Sigma Z^2{}_i, \quad a_{11} = 2(Z_2 Z_3 + Z_0 Z_1) = 2(Y_2 Y_3 + Y_0 Y_1),$$
$$a_{23} = 2(Z_2 Z_3 - Z_0 Z_1), \quad a_{32} = 2(Y_2 Y_3 - Y_0 Y_1).$$

Diese neun Grössen $a_{ik}$ sind die Coefficienten einer orthogonalen Substitution in drei Veränderlichen. Umgekehrt sind $X$, $Y$, $Z$ proportional einfachen linearen Verbindungen der $a_{ik}$.

Mit dem Cosinus der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks hängen die $a_{ik}$ in sehr einfacher Weise zusammen, wie man aus dem Muster der rational umkehrbaren Formeln

$$\cos a_1 = \frac{a_{23}}{a_{11}}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{a_{32}}{a_{11}}$$

sieht. Es ist aber von Bedeutung, dass die Zähler und Nenner dieser Verhältnisse, einzeln genommen, einfachere Eigenschaften besitzen, als die $\cos a_i$, $\cos \alpha_i$ selber.

Mit Hilfe der $a_{ik}$ kann man zu einer unbegrenzten Zahl neuer Relationen der sphärischen Trigonometrie gelangen.

Man wird nun weiterhin den Formeln der sphärischen Trigonometrie eine sehr anschauliche Bedeutung unterlegen können, wenn man die $X$ als homogene Coordinaten eines Raumpunktes auffasst. Da die $X$, $Y$, $Z$ durch die Identität

$$X_0 X_1 X_2 X_3 + Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 + Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 = 0$$

verknüpft sind, so sind die 3.4 Ebenen $X_i = 0$, $Y_i = 0$, $Z_i = 0$ die dreier „desmischen Tetraeder."

Es giebt gewisse Gruppen von Raumcollineationen, welche die Figur der drei Tetraeder als Ganzes unverändert lassen; unter diesen Gruppen ragt vorzüglich eine $G_{16}$ hervor. Unterwirft man einen beliebigen Punkt des Raumes den Collineationen der $G_{16}$, so nimmt er 16 Lagen an, die eine „Kummer'sche Configuration" bilden.

Damit sind die Vorbedingungen geschaffen, um die Mannigfaltigkeit aller sphärischen Dreiecke auf den Punktraum abzubilden, wodurch erreicht wird, dass man sich von einer Reihe merkwürdiger Dreieckstypen, die auf der Kugel nahezu unzugänglich sind, eine Vorstellung machen kann.

Ohne auf die ermüdende und nicht wesentliche Erörterung dieser verwickelten Raumfiguren einzugehen, gedenken wir lieber noch einer zweiten, planimetrischen Abbildung, die sich sogar für den elementaren Unterricht gut verwerthen lässt. Man kann nämlich die Halbmesser zweier Kreise so wählen, dass sich ihnen je ein Viereck von den Seiten $Y_i$ resp. $Z_i$ einbeschreiben lässt. Verbindet man noch die Ecken jedes Vierecks mit dem bez. Mittelpunkte, und zieht die Diagonalen, so treten nunmehr die Winkel $s$, $\sigma$, $a$, $\alpha$ unmittelbar vor's Auge. Als Anwendung lässt sich z. B. die Aufgabe, aus den Seiten eines sphärischen Dreiecks die Winkel zu finden, oder umgekehrt, sehr elegant constructiv lösen.

Wir müssen uns beeilen, um wenigstens das Wichtigste aus dem dritten Abschnitt, der den Zusammenhang der sphärischen Trigonometrie mit den elliptischen Functionen darlegt, herauszugreifen.

Um gleich das Hauptergebniss anzuführen: Während man sich seit Lagrange damit begnügte, die Elemente eines sphärischen Dreiecks durch

elliptische Functionen zweier Argumente darzustellen, werden hier allgemeiner solche von vier Argumenten zu Grunde gelegt. Hierdurch wird es erst ermöglicht, den Zusammenhang beider Gebiete, und dieser wiederum mit den orthogonalen Substitutionen, zu einem vollständigen und übersichtlichen zu gestalten.

Vom formalen Gesichtspunkte aus betrachtet ist es unschwer zu sehen, dass sich die im zweiten Abschnitte entwickelten Beziehungen zwischen den $X$, $Y$, $Z$ im Wesentlichen alle so in der Weierstrass'schen Theorie der $\sigma$, $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ vorfinden, wenigstens, sobald man die letzteren gewissen Modificationen unterwirft. Der tiefere Grund liegt aber in der Erkenntniss, dass die zahlreiche Menge der von Jacobi und Weierstrass aufgestellten Additionstheoreme wiederum vermöge des Gruppenbegriffs ein organisches Ganze ausmachen. Man gelangt zu 256 Additionstheoremen, die z. B. durch eine Gruppe von ebensoviel Substitutionen der auftretenden vier Argumente in sich übergehen. Die Substitutionen drücken aus, dass immer einige der Argumente um Periodenhälften vermehrt werden.

Diese Gruppen und andere sich daran anschliessende, stehen zu den mit der Figur der desmischen Tetraeder verknüpften in engster Beziehung. Die Coefficienten $a_{ik}$ der orthogonalen Substitutionen stellen sich zunächst unmittelbar dar als ganze, homogene Functionen zweiten Grades von $\Theta$-Functionen; führt man aber geeignete neue Argumente ein, so gelingt es sogar, die $a_{ik}$ in die Gestalt von ganzen homogenen Functionen ersten Grades der $\Theta$-Functionen der transformirten Argumente zu setzen; es ist das ein wesentlicher Fortschritt gegenüber Resultaten, die von Herrn Caspary herrühren. Gemäss den 256 Additionstheoremen giebt es 256 solcher Coefficiententafeln.

Es sei noch betont, dass die hier im Vordergrund stehenden Relationen zwischen den $a_{ik}$ keineswegs ohne Weiteres aus den Additionstheoremen fliessen, sondern algebraische Folgen der zwischen den Quadraten der $\sigma$-Functionen bestehenden linearen Gleichungen sind.

Der Verfasser hätte in diesem Sinne geradezu seine Schrift als eine „höhere Algebra der sphärischen Trigonometrie und der elliptischen Functionen" bezeichnen können. Das Wesentliche ist eben, dass die aus der Trigonometrie abgeleiteten Gruppen isomorph sind zu gewissen Gruppen linearer Substitutionen der Argumente elliptischer Functionen.

Es ist von vornherein zu vermuthen, dass sich ein derartiger Isomorphismus noch auf mannigfaltige andere Arten realisiren lässt, wofür der Verfasser selbst ein Beispiel anführt.

In einem Schlussworte deutet der Verfasser darauf hin, einer wie reichen Entwickelung die sphärische Trigonometrie in Zukunft noch fähig ist.

Wir schliessen diese gerade im Interesse der Lehrer so ausführlich gehaltene Besprechung mit dem Hinweis auf die vom Verfasser besonders

empfohlene, in Deutschland aber fast unbekannt gebliebene „Sphärische Trigonometrie" von J. A. Serset (7me éd. Paris 1888).

Berichtigung. S. 98 Zeile 11 statt: „ein Flächenelement stets wieder in ein Flächenelement übergehe" muss es heissen: „ein Paar benachbarter Flächenelemente stets wieder in ein Paar benachbarter Flächenelemente übergehe."

W. Franz Meyer.

---

**Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne** par Paul Tannery. Paris 1893. Gauthier-Villars & fils. VIII, 370 p.

Wenn Referent es unternimmt, über das neue geschichtliche Werk des geistreichen französischen Fachgenossen ganz kurz zu berichten, so muss er von vornherein zugestehen, dass man seiner Berechtigung zu einer solchen Darlegung Zweifel entgegenbringe. Auf dem Gebiete der Sternkunde sind wir nie thätig gewesen. Wir haben vielmehr stets die Nothwendigkeit eingesehen und vorkommenden Falles betont, uns auf die Geschichte der reinen Mathematik zu beschränken. Wir stehen daher dem Hauptinhalte des uns vorliegenden Bandes fast als Laie gegenüber. Herr Tannery hat indessen vielfach rein mathematische Fragen in das Bereich seiner Untersuchungen mit hineingezogen, und diese Einschaltungen dürften unserer Beurtheilung anheimfallen.

Herr Tannery hat seinen Stoff in 15 Kapitel getheilt, welchen noch einige Anhänge folgen. Die Ueberschriften der Kapitel lassen sich etwa so verdeutschen: 1. Bedeutung des Wortes Astronomie bei den Griechen. 2. Bedeutung des Wortes Astrologie bei den Griechen. 3. Die Alexandrinischen Mathematiker. 4. Die astronomischen Postulate nach Ptolemaeus und Elementarschriftstellern. 5. Kugelgestalt der Erde und Gradmessung. 6. Planetenbewegung. 7. Kugelkreise. 8. Das Sonnenjahr. 9. Sonnentafeln. 10. Hipparch und die Perioden der Mondbewegung. 11. Mondtafeln. 12. Die Parallaxen der Sonne und des Mondes. 13. Voraussagung von Finsternissen. 14. Planetentheorie. 15. Der Fixsternenkatalog. Anhang: 1. Uebersetzung eines astronomischen Lehrgedichtes aus dem zweiten vorchristlichen Jahrhunderte. 2. Das Leben des Eudoxus. 3. Antike Trigonometrie. 4. Das grosse Jahr des Josephus. 5. Meinungen der Alten über die Entfernungen der Planeten von der Erde. 6. Die Himmelskugeln nach Nasîr-Eddîn Attûsi von H. Carra de Vaux.

Dass die Bedeutung der beiden Wörter Astronomie und Astrologie nicht alle Zeit die gleiche war, dürfte als sicher gelten. Herr Tannery hält Astronomie für das ältere und findet seine Urbedeutung in der Unterscheidung von Sternbildern und in deren Benutzung bei der Eintheilung der Nacht in Stunden und des Jahres in Jahreszeiten. Wesentlich höher stand, wieder nach Herrn Tannery's Auffassung, die Astrologie als Anfang einer wissenschaftlichen Sternkunde, der Lehre von den Bewegungen der

Wandelsterne. Die Beschäftigung mit ihr setzt bereits eine Sphärik voraus, deren Anfänge man deshalb ziemlich früh vermuthen darf. Herr Tannery hält Eudoxus für den Verfasser eines dieses Wissensgebiet behandelnden Werkes, und wir haben wiederholt dieser Vermuthung beigepflichtet. Ueber Theodosius, den Verfasser einer heute vorhandenen Sphärik, weichen Herrn Tannery's Ansichten von den landläufigen ab. Suidas berichtet über Theodosius und dessen mathematische und astrologische Schriften. Er fährt dann fort: „Teodosius schrieb in Versen über den Frühling und andere Gegenstände. Er war aus Tripolis". Daraus folgert Herr Tannery, es seien zwei verschiedene Theodosius gemeint, und nur der Dichter sei aus Tripolis. Der Mathematiker dagegen sei gleich Hipparch, vielleicht als dessen Zeitgenosse, in Bithynien zu Hause gewesen, denn Strabon spreche von „Hipparch, Theodosius und dessen Söhnen, Mathematikern". Die Streitfrage dürfte eine ziemlich unwichtige sein, da Theodosius wesentlich Zusammensteller früher bekannter Wahrheiten und nicht ihr Erfinder war, aber wir vermögen nicht einzusehen, warum ein Mathematiker nicht auch Dichter gewesen sein und über den Frühling geschrieben haben soll; Strabon's Ausdruck legen wir dann vollends keine Beweiskraft bei. Im dritten Kapitel geht Herr Tannery dem Ursprunge der Trigonometrie entgegen. Er hält Hipparch für allzuwenig mathematisch begabt, um Erfinder der Trigonometrie sein zu können; Archimed und Apollonius müssen schon die Grundlagen gelegt haben, Letzterer in dem Okytokion, welches eine genauere Berechnung von $\pi$ lehrte, als die Kreismessung Archimed's. Inder setzten in vom griechischen Einflusse zeugenden Schriften $\pi = 3{,}1416$. Woher dieser Werth stammt, ist unbekannt. Herr Tannery stellt die geistreiche, nur leider durchaus in der Luft schwebende Meinung auf, das sei eben der von Apollonius im Okytokion berechnete Näherungswerth; Apollonius habe die Myriade als Nenner des Verhältnisses gewählt, wie er überhaupt die Myriade in ähnlicher Weise bevorzugte, wie Archimed die Chiliade. Wäre dieser Vergleich richtig, dann müsste Archimed als Grenzen für $\pi$ nicht $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ gesetzt haben, sondern $3{,}142 > \pi > 3{,}141$, und davon ist nirgend eine Spur zu finden. Wir glauben daher vor Herrn Tannery's noch weitergehenden Schlüssen Halt machen zu müssen. Dürfen wir noch eine weitere Bemängelung hinzufügen? Wir vermissen ein Namen- und Sachverzeichniss, dessen Fehlen die Benutzbarkeit von Herrn Tannery's Werken ungemein beeinträchtigt.

Cantor.

---

**La Correspondance de Descartes dans les inédits du fonds Libri** étudiée pour l'histoire des mathématiques par Paul Tannery. Paris 1893. Gauthier-Villars et fils. VII, 94 p.

Der Ankauf eines Theiles der Handschriften der Ashburnham-Bibliothek durch die französiche Regierung hat werthvolle Briefe wieder nach

Paris zurückgebracht, wo sie früher aufbewahrt waren, bis Libri es verstand, sie sich widerrechtlich anzueignen und ausser Landes zu führen. Herr Paul Tannery, welcher, seit die Herausgabe von Fermat's Werken in seine Hände gelegt ist, seine geschichtliche Begabung zwischen dem griechischen Alterthume und dem XVII. Jahrhundert fast hälftig getheilt hat, ist in der günstigen Lage gewesen, jene neuen Erwerbungen oder Wiedererwerbungen durchsehen zu können, und er hat darunter eine Anzahl von noch nicht herausgegebenen Briefen von Descartes erkannt. Den ganzen Wortlaut dieser Briefe hat Herr Tannery in dem *Archiv für Geschichte der Philosophie* (Berlin bei Reimer, IV, 442—449, 529—556; V, 217—222, 469—477) veröffentlicht, aber er hat daneben, und dafür sind wir ihm besonderen Dank schuldig, in einem dünnen aber inhaltreichen Bändchen diejenigen Briefstellen ausgewählt und erläutert, welche für die Geschichte der Physik und der Mathematik von Bedeutung sind. Wir werden vielleicht Gelegenheit haben von diesen Briefen an anderer Stelle Gebrauch machen zu können, hier wollen wir nur ganz allgemein bemerken, dass, wenn wir auch an Herrn Tannery's sachlichen Bemerkungen nicht rütteln, dennoch unsere Auffassung manchmal in dem Maasse von der seinigen abweicht, in welchem wir Descartes Persönlichkeit verschieden beurtheilen. Herr Tannery — das wissen wir auch aus mit ihm geführten Gesprächen — liebt seinen Descartes, wie er ihn bewundert. Uns ist bei gleicher Bewunderung des Gelehrten der Mensch Descartes mindestens unsympathisch. Ausser den Briefen hat Herr Tannery auch drei gegen die Geometrie Descartes gerichtete Flugblätter veröffentlicht, welche nach seiner offenbar das Richtige treffenden Ansicht von De Beaugrand herrühren, jenem Freunde Roberval's, dessen Namen man in der Geschichte vieler Streitigkeiten jener Zeit, z. B. auch der Fehde zwischen Roberval und Torricelli, begegnet. De Beaugrand hat den Lehrsatz von den Zeichenfolgen und Zeichenwechseln nicht verstanden. Mit den imaginären Gleichungswurzeln ist es ihm ebenso gegangen. Aus diesen Missverständnissen und einer übertriebenen Hochschätzung von Thomas Harriot braut sich eine Gemenge von Anklagen zusammen, denen ähnlich, welche Wallis später in seiner Algebra äusserte. Sollte hier das *post hoc* zugleich auch ein *propter hoc* sein? Wenn man die Anwesenheit des Lord Cavendish in Frankreich berücksichtigt, der sieben Jahre, nachdem die Flugblätter herausgekommen waren, gerade in den Kreisen verkehrte, in welchen sie Verbreitung gehabt haben müssen, so ist der Weg nicht lange zu suchen, auf welchem die Anklage zu Wallis gelangt sein könnte. Wallis freilich beruft sich nirgend auf De Beaugrand, allein auch das ist begreiflich. Wallis stand in dem vorerwähnten Streite zwischen Torricelli und den Franzosen vollständig auf Seiten des Ersteren. Er hatte also in De Beaugrand einen Gegner, und diesen als Quelle zu nennen, lag nicht in Wallis schriftstellerischen Gewohnheiten. Als Anhang hat Herr Tannery auch noch einzelne treffliche Bemerkungen zu den drei

ersten Bänden der neuen holländer Ausgabe von Huygens' Briefwechsel drucken lassen und bei dieser Gelegenheit die immer noch nicht ganz sichere Entstehungsgeschichte der Pariser Akademie der Wissenschaften um ein gutes Theil aufgeklärt.

CANTOR.

---

**Le scienze esatte nell'antica Grecia** di GINO LORIA, Prof. di geometria superiore nell' università di Genova. Libro I. **I geometri greci precursori di Euclide.** Modena 1893 coi tipi della Società tipografica, antica tipografia Soliani. 168 p. Estratto dal Vol. X, Serie II delle Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena. Sezione di Scienze, p. 3 e seguenti.

Herr Gino Loria hat 1890 in den Abhandlungen der Turiner Akademie unter dem Titel „Il periodo aureo della geometria greca" eine Uebersicht über die Leistungen des grossen Euklidischen Jahrhunderts veröffentlicht. Als wir im XXXVI. Bande dieser Zeitschrift Histor.-liter. Abthlg. S. 29—30 jene Schrift besprachen, schlossen wir mit dem Satze: „Wir sind berechtigt anzunehmen, Herr Loria werde seine Forschungen über griechische Geometrie fortsetzen, und wir freuen uns zum Voraus auf seine weiteren Arbeiten auf diesem Gebiete." Unsere Annahme fusste auf Aeusserungen des Verfassers selbst. Heute sind seine damaligen Versprechungen bereits zur Wahrheit geworden, und wir können das Erscheinen des ersten Abschnittes seines umfangreichen Werkes anzeigen. Das Ganze wird aus fünf Abschnitten bestehen: 1. Die Zeit der Vorbereitung, 2. die Zeit des grössten Glanzes, 3. die Zeit des Verfalles und der Commentatoren, 4. die Mathematik der Astronomen und der Feldmesser, 5. die griechische Arithmetik. Davon ist, wie schon gemeldet und wie aus der Ueberschrift ersichtlich, der erste Abschnitt der Oeffentlichkeit übergeben.

Herr Loria hat, wie er selbst erklärt, vielfachen Nutzen aus dem ersten Bande unserer Vorles. Gesch. Mathem. von 1880 gezogen; er hat daneben sämmtliche anderen seit 1880 erschienene geschichtlichen Arbeiten benutzt; er hat zum Vergleiche überall die Quellenschriften beigezogen. Er hat also ungefähr das Gleiche gethan, was unsere eigene Aufgabe bei der Bearbeitung der zweiten Auflage unseres ersten Bandes bildete, und sein erster Abschnitt entspricht etwa unseren Kapiteln 4—11 auf S. 104 bis 244 nach Ausschluss der von uns mitbehandelten Arithmetik. Es dürfte zur Bekundung der gegenseitigen Selbstständigkeit geeignet sein festzustellen, dass Herrn Loria's Heft in unsere Hände kam, bevor die zweite Auflage unseres ersten Bandes ausgegeben war, aber nachdem die 30 ersten Bogen (Kapitel 1—24) im Reindrucke vollendet uns vorlagen. Vielleicht gereicht es unserem beiderseitigen Bestreben nach Vollständigkeit zum Lobe, dass trotz dieser Unabhängigkeit von einander zwischen beiden Schriften eine Aehnlichkeit stattfindet, welche leicht bis ins Einzelne zu verfolgen wäre. Naturgemäss sind auch Abweichungen und Gegensätze vorhanden, denn wo

die Gewissheit fehlt und man zwischen Wahrscheinlichkeiten sich entscheiden muss, kann ein Forscher sehr leicht der einen Partei, wenn wir dieses Wort gebrauchen dürfen, beitreten, ein anderer der anderen. Im Allgemeinen hat Herr Loria die strittigen Fragen ausführlicher behandelt, als wir es gethan haben. Die von Simplicius aufbewahrte Stelle des Hippokrates von Chios z. B. ist mit grösster Weitläufigkeit behandelt, die berüchtigte Menonstelle nicht minder. Ueber die Kenntnisse des Eudoxus und die darauf bezüglichen Meinungen ist weit genauer berichtet, als wir es für nothwendig hielten. Das sind, möchten wir sagen, Geschmackssachen, und jeder Schriftsteller richtet sich nach dem eigenen Geschmack. Eine Bemerkung war uns neu, und wir bedauern, sie nicht früher kennen gelernt zu haben. Uns war nämlich immer entgangen, dass Clavius bereits in seiner Euklid-Ausgabe die Vermuthung aussprach, die Erfindung des pythagoräischen Lehrsatzes sei eine arithmetisch-geometrische gewesen und von dem Dreiecke mit den Seiten 3, 4, 5 ausgegangen. Ob übrigens Herr Loria bei Gelegenheit des pythagoräischen Lehrsatzes und ebenso bei Erwähnung der Lehren von Speusippus nicht das Gefühl empfand, es sei misslich, in jenen ältesten Zeiten die Arithmetik so scharf von der Geometrie zu trennen, dass man sie erst am Schlusse des Werkes im Zusammenhang behandele? Wir stellen nur die Frage. Wir geben zu, dass ihre Beantwortung eine verschiedene sein kann.

Cantor.

---

**Della varia fortuna die Euclide** in relazione con i problemi dell' insegnamento geometrico elementare di Gino Loria. Roma 1893. Tipografia Elzeviriana. A Corrado Segre nel dì delle sue nozze XXVI Marzo MDCCCXCIII. 37 p.

Sollen wir den Inhalt des Büchleins, durch welches der Verfasser nach italienischem Brauche die Hochzeitsfeier seines Jugendfreundes, des auch in Deutschland wohlbekannten Schriftstellers über mehrdimensionale Geometrie und Mechanik Corrado Segre, mitbeging, kurz angeben, so besteht er in Folgendem. Euklid's Geometrie besitzt neben unleugbaren grossen Vorzügen auch eben solche Mängel. Schon dem Alterthume waren dieselben weniger unbekannt, als man in der Regel annimmt, und unserem Jahrhunderte insbesondere scheint es vorbehalten geblieben zu sein, mit gewaltsam umstürzender Vergesslichkeit geleisteter Dienste Euklid aus den Schulen zu verdrängen, in welchen er fast zwei Jahrtausende unbeschränkt herrschte. Herr Loria weist diese neue Strömung, welcher der Hauptsache nach Legendre zuerst, dann schier zahllose Nachfolger andere und andere Bahnen zu eröffnen versuchten, in allen Theilen der gebildeten Welt nach. Er schliesst sich der Meinung an, Euklid's Geometrie habe im Wesentlichen sich überlebt und müsse einem Lehrbuche der Zukunft den Platz räumen. Wir sagen absichtlich einem Lehrbuche der Zukunft, denn durch

die schon vorhandenen Neuherstellungen erklärt Herr Loria sich nicht befriedigt. Er schliesst vielmehr mit einer äussert knapp gehaltenen Aufzählung derjenigen Anforderungen, welche er an das neue Lehrbuch stellt. Von unserer Seite können wir zunächst den ältesten Bemängelungen ein sehr grosses Gewicht nicht beilegen. Was Apollonius in dieser Richtung geschrieben haben mag, kennen wir kaum, ausser durch kurze Notizen bei Proklus, und die Versuche des Ptolemaeus, die Parallelentheorie besser zu stützen, lassen sich mit der denkbar grössten Bewunderung Euklids sehr wohl vereinigen. Die Thatsache bleibt denn doch vorhanden, dass im Kampf um's Dasein, welchen Bücher nicht minder als lebende Wesen zu bestehen haben, die Elemente des Euklid, des Apollonius, des Heron, des Nikomachus allein übrig geblieben sind, während die wettbewerbenden Schriften über Geometrie, über Kegelschnitte, über Feldmesskunst, über Arithmetik zu Grunde gingen. Wenn in einem neuen Aufleben des gleichen Kampfes die früheren Sieger unterliegen, so trägt keineswegs ihre geringere Tüchtigkeit die Schuld, sondern die durchaus veränderten Kampfes- und Lebensbedingungen. Die Geometrie, um nur von ihr zu reden, während Aehnliches auch von anderen Theilen der Mathematik gesagt werden könnte, ist im neunzehnten Jahrhunderte eine wesentlich neue geworden. Dinge, welche Pappus, welche noch Desargues, Pascal kaum ahnten, sind in den Vordergrund getreten und müssen, darin stimmen wir Herrn Loria vollkommen bei, schon in den Anfangslehren vorbereitet werden. Aber ebenso sicher sind wir, dass Herr Loria als tüchtiger Geschichtskenner nicht in den Chor der Euklidverächter um jeden Preis einstimmt, welche das griechische Meisterwerk um so niedriger stellen, je weniger sie es zu kennen pflegen. CANTOR.

---

**Die Berechnung des Kreis-Umfanges bei Archimedes und Leonardo Pisano** von Prof. Dr. H. WEISSENBORN. Sonderabdruck aus den Berliner Studien für classische Philologie und Archaeologie. Bd. XIV, Heft 3. Berlin 1894. Bei S. Calvary & Co. 32 S.

Herr Heilermann hat 1881 im XXVI. Bande dieser Zeitschrift den bekannten Satz des Theon von Smyrna über Seiten- und Diametralzahlen erweitert, so dass er nicht nur, wie bei Theon, $\sqrt{2}$ in immer grösserer Annäherung kennen lehrt, sondern zur näherungsweisen Darstellung beliebiger Quadratwurzeln tauglich wird. Herr Weissenborn hat 1883 im XXVIII. Bande dieser Zeitschrift und in einem besonderen Schriftchen: „Die irrationalen Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron“ den gleichen Gedanken weiter gesponnen und nachzuweisen versucht, schon Heron, ja sogar schon Archimed, hätten von derartigen Sätzen ausgehend die bei ihnen vorkommenden Quadratwurzeln näherungsweise bestimmt. In seiner neuesten Schrift wiederholt Herr Weissenborn seine früheren Behauptungen und ergänzt sie, indem er auch die Bemerkungen, welche Leonardo

von Pisa zu der Archimedischen Kreismessung gemacht hat, in das Bereich seiner Betrachtungen einbezieht. Er sieht sich auch bestärkt in der Ueberzeugung, der kunst- und sinnreiche Aufbau der Archimedischen Untersuchung könne nur die Absicht verfolgt haben, zu beweisen, was in einem Lande, in welchem viel gebaut wurde, durch Versuche gefunden worden war. Als jenes Land wird vermuthungsweise Aegypten genannt. Wenn wir Herrn Weissenborn richtig verstehen, so nimmt er also an, die fortlaufende Ungleichung $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ sei den Aegyptern um 260 v. Chr. bekannt gewesen. Irgend eine geschichtliche Beglaubigung sämmtlicher Behauptungen ist nicht beigebracht, scheint uns auch unbeibringlich.

Cantor.

---

**Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft.** Eine mathematisch-historische Studie von Prof. Ferdin. Jos. Obenrauch. Separatabdruck aus dem Jahresberichte der Landes-Oberrealschule in Brünn für das Schuljahr 1892/93. Brünn. Druck von R. M. Rohrer. 33 S.

Der Verfasser beabsichtigt, wie wir brieflicher Mittheilung desselben entnehmen, der Aufgabe, deren Inhalt in dem Wortlaute der Ueberschrift klar vorgezeichnet ist, drei bis vier Abhandlungen zu widmen, deren erste nunmehr durch den Druck Verbreitung gefunden hat. Sein demgemäss etwas ausgreifender Plan gestattet ihm eine gewisse Ausführlichkeit, und diese wieder macht es, dass gleich die erste Abhandlung nicht ganz zu ihrem Titel passen will. Von Gaspard Monge ist nur soweit die Rede, als ein Theil seiner Lebensgeschichte geschildert wird, und bei dieser Gelegenheit die Ueberschriften einiger seiner Arbeiten bekannt werden. Deren inhaltliche Tragweite kommt noch nicht zur Sprache. Dagegen sind Rückblicke auf die Entwickelung der verschiedenen geometrischen Auffassungen und Behandlungsweisen geworfen, welche der ganzen Programm-Abhandlung den beabsichtigten Charakter einer Einleitung verleihen. Eigene Untersuchungen wird man hier nicht beanspruchen, und erst in der Fortsetzung darf man erwarten, dass Herr Obenrauch zeige, wie tief er in den Schriftsteller eingedrungen ist, zu dessen Schilderung und Würdigung er die Feder ergriff. Indem wir dementsprechend auch unser Urtheil bis zu dem Augenblicke zurückhalten, der uns gestattet, es in gerechter Weise zu bilden, benutzen wir die Gelegenheit, hier öffentlich auf eine ähnliche Arbeit hinzuweisen, die sonst vielleicht weniger bekannt werden möchte, als sie es verdient. Herr Dr. K. Fink, Professor an der Realschule zu Tübingen, hat die Entwickelungsgeschichte der projectiven Geometrie als ein Gebiet erkannt, auf welchem noch Vieles zu thun bleibt, und er hat vorläufig einige Ergebnisse seines Studiums in dem in Tübingen erscheinenden, Mathematikern nur verhältnissmässig selten in die Hände

fallenden Correspondenzblatte f. d. Gel.- und Realschulen niedergelegt. Im 7. und 8. Hefte des Jahrganges 1892 erschien sein Monge (47 S.), im 1. und 2. Hefte des Jahrganges 1893 sein Dupin (27 S.). Andere Biographien sollen, sei es in der gleichen Zeitschrift, sei es in einer anderen, nachfolgen, und wenn unser persönlicher Wunsch in Erfüllung geht, wird aus der Zusammenfassung derselben ein Bändchen entstehen, geeignet, eine nach unserer Meinung vorhandene Lücke auszufüllen, insofern die übrigen Schilderungen halten, was die beiden ersten versprechen, woran wir keinen Augenblick zweifeln.

CANTOR.

---

**Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichtes.** Eine vergleichende Planimetrie von Dr. HEINRICH SCHOTTEN. Zweiter Band. Leipzig 1893. B. G. Teubner. IV, 410 S.

Wir haben Bd. XXXVI dieser Zeitschrift, Historisch-literarische Abtheilung S. 98—100, den ersten Band des Schotten'schen Werkes besprochen und dabei geäussert, dass wir dem zweiten Bande mit Begierde entgegensehen. Heute dürfen wir über die Erfüllung dieser Begierde berichten, dürfen zugleich bezeugen, dass der zweite Band dem ersten mindestens ebenbürtig ausgefallen ist und den neuen Wunsch rege macht, den dritten Band und in ihm das ganze Werk vollendet zu sehen. Noch ein Band? Eine Planimetrie von vielleicht 73 Druckbogen, während es an ganz guten Planimetrien von etwa 73 Seiten nicht fehlt? Diese Frage aufzuwerfen ist gewiss nur im Stande, wer das Werk selbst nicht kennt, und sei es auch nur aus darüber vorhandenen Referaten. Herr Schotten giebt eine Planimetrie, seine Planimetrie. Aber er begnügt sich nicht damit, sie zu geben. Er begründet jede Definition, jeden mit dem Schüler gemachten noch so kleinen von dem alltäglichen Exercierreglement abweichenden Schritt durch ununterbrochene Vergleichung alles dessen, was ihm anderweitig darüber bekannt wurde. Es ist eine Pädagogik der Planimetrie, welche Herr Schotten schreibt, und diese konnte und durfte nicht kürzer ausfallen.

Der zweite Band besteht aus vier Kapiteln mit folgenden Ueberschriften: 1. Richtung und Abstand. Lagen- und Maassuntersuchungen. 2. Der Winkel. 3. Die Lehre vom Parallelismus. 4. Anwendungen zur Winkel- und Parallelenlehre.

Wir wünschen zunächst, diejenigen Definitionen anzugeben, welche der Verfasser als Ergebniss seiner interessanten Untersuchungen erzielt. Richtung ist ihm (S. 106) die unmittelbare Beziehung zweier Punkte auf einander, die im Strahle zur Anschauung kommt, Abstand (S. 106 Note 1) die unmittelbare Beziehung zweier Punkte auf einander, die in der Strecke zur Anschauung kommt. Der Winkel ist (S. 114) das Maass der Drehung. Parallel heissen (S. 208) zwei Gerade, welche constanten Abstand von einander, also keinen Punkt gemeinsam haben.

Diese Definitionen sind in mancher Beziehung erweiterungsfähig. Man kann z. B. von dem Abstande zweier Punkte ausgehend zu dem Abstande eines Punktes von einem höheren Raumgebilde oder gar zu dem Abstande zweier höheren Raumgebilde gelangen. Herr Schotten schlägt vor, den Begriff des Nachbarpunktes (S. 44—45) einzuführen. Der Abstand eines Punktes von sämmtlichen Punkten einer Linie, einer Fläche ist im Allgemeinen verschieden. Ein solcher Abstand ist der kleinste, und der Punkt des räumlichen Gebildes, von welchem zum gegebenen Punkte der kleinste Abstand vorhanden ist, heisst dessen Nachbarpunkt. Wir sind sonst mit Herrn Schotten's Vorschlägen, auch soweit sie Benennungen betreffen, durchweg einverstanden, nur dieser Nachbarpunkt will uns nicht behagen. Unter Nachbarpunkt dürften weitaus die meistens Leser dasselbe verstehen, was französisch *un point voisin*, deutsch unter Benutzung eines Fremdwortes ein *consecutiver* Punkt genannt zu werden pflegt, das heisst ein unendlich nahe liegender Punkt des gleichen Raumgebildes, dem der gegebene Punkt angehört. Was Herr Schotten meint, dürfte vielleicht besser Gegenüberpunkt, *point de vis-à-vis*, genannt werden.

Auch der Begriff des Parallelismus ist (S. 185) der Erweiterung fähig, das heisst auch auf andere Gebilde als Gerade anwendbar. Herr Schotten nennt solche Gebilde dann parallel, wenn je zwei gegenseitige Nachbarpunkte (in der vorerwähnten Bedeutung dieses Wortes) constanten Abstand von einander haben. Wir bemerken hierzu ergänzend, dass Leibniz zuerst diesen allgemeinen Parallelismus mit der gleichen Definition 1692 in einem Aufsatze der Acta Eruditorum in die Wissenschaft einführte (Leibnizen's Mathematische Werke herausgegeben von C. J. Gerhardt, Bd. V S. 280) und ausdrücklich erklärte, *quae dudum mihi fuit definitio parallelismi in genere sumti.*

Die erwähnten Definitionen begründet Herr Schotten in den drei ersten Kapiteln des Bandes, indem er sie mit den übrigen vergleicht, welche in früheren und späteren Zeiten für die entsprechenden Begriffe aufgestellt worden sind. Da er, vielleicht auf den von ihm als berechtigt erkannten, in unserem Berichte über den ersten Band ausgesprochenen Wunsch hin, die Schriftsteller nach ihrer Zeitfolge und nicht nach ihren Ansichten ordnet, so ist um so deutlicher zu erkennen, wie in abwechselnden Zeitläufen bald die eine, bald die andere Definition die Oberhand hatte, was keineswegs ausschloss, dass nicht lange darnach die vorher unterlegene wieder in Aufnahme kam. Im vierten Kapitel wendet Herr Schotten seine Begriffsbestimmungen an, um auf ihnen die Grundlehren der Planimetrie bis zur Lehre vom Dreiecke aufzubauen.

Wir haben oben von Herrn Schotten's eigenthümlichen Benennungen gesprochen, welche uns sehr wohlgefallen. Wir denken dabei vorzugsweise an die 16 beim Durchschnitt zweier Parallelen durch eine Transversale auftretenden Winkelpaare. Jedermann weiss, in wie heilloser Weise hier bei

den Schriftstellern eine Namensverwirrung auftritt, nicht am Wenigsten dadurch veranlasst, dass die gewählten Namen nicht durchsichtig sind. Herr Schotten suchte einem einheitlichen Gedanken in den Namen Ausdruck zu geben. Eines der 16 Winkelpaare liegt nämlich entweder in Bezug auf beide Schenkel gleichmässig, das heisst auf derselben Seite der Transversalen (z. B. rechts oder links) und auf gleichen Seiten der Geschnittenen (z. B. oberhalb oder unterhalb). Dann sollen die Winkel gleichliegend heissen. Der zweite Fall ist der, dass die Winkel auf derselben Seite der Transversalen und auf ungleichen Seiten der Geschnittenen, oder aber auf verschiedenen Seiten der Transversalen, dagegen auf gleichen Seiten der Geschnittenen liegen. Solchen Winkeln ist der Name halbgleichliegend zugedacht. Ungleichliegend endlich heissen Winkel, die ebensowohl auf verschiedenen Seiten der Transversalen, als auf ungleichen Seiten der Geschnittenen liegen. Wenn wir nach unserer Meinung über neue Namen gefragt werden, so pflegen wir immer auch darauf zu achten, ob es Namen sind, welche übersetzungsfähig sind, welche also den Mathematikern nichtdeutscher Zunge gleichfalls dienstbar gemacht werden können. Das ist aber mit homolog, hemihomolog, heterolog entschieden der Fall, und somit bewähren sich die von Herrn Schotten in Anschluss an Herrn Ziegler (S. 369) gewählten Namen auch an diesem Prüfsteine, dessen Benutzung wir den Fachgenossen nicht warm genug empfehlen können.

Wir könnten auch noch auf Anfang- und Endschenkel eines Winkels (S. 356) hinweisen, wie Herr Schotten in Nachbildung des Anfangs- und Endpunktes einer Strecke vorschlägt, eine Unterscheidung, welche nie gemacht wird, welche aber beim Unterrichte ihre Vorzüge besitzen mag. Wir könnten hinweisen auf die dem Aussenwinkel eines Dreiecks gleichen von ihm getrennt liegenden Innenwinkel (S. 366), ein jedenfalls schärfer bezeichnender Ausdruck, als die landläufigen gegenüber liegenden Winkel. Bewusst oder unbewusst schwebten Herrn Schotten hier offenbar die *partes extremae vicinae* und *remotae* der Neper'schen Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck vor. Wir könnten noch auf gar Manches die Aufmerksamkeit zu lenken suchen, wenn wir nicht unseren Zweck darin sähen, auf das ganze Buch aufmerksam zu machen, und dazu genügen hoffentlich die bisherigen Ausführungen.

Cantor.

---

**Lehrbuch der Physik.** Von J. Violle. Deutsche Ausgabe von E. Gumlich, L. Holborn, W. Jäger, St. Lindeck. Zweiter Theil: Akustik und Optik. Erster Band: Akustik. Mit 163 Textfiguren. Berlin 1893. Verlag von Julius Springer. 307 S. Preis 8 Mk.

Der vorliegende Band entspricht ebenfalls dem schon bei der Mechanik Gesagten. Die ausführliche Wiedergabe der Beobachtungsdaten bei der Schallgeschwindigkeitsbestimmung überschreitet eigentlich den Rahmen dieses

Werkes, indessen ist die den Landsleuten gegenüber geübte Rücksicht des Verfassers entschuldbar. Die geschichtlichen Studien ergeben Namen, die in den deutschen Werken bisher nicht aufgeführt waren. Die wissenschaftliche Bethätigung der Uebersetzer giebt sich aus den Anmerkungen zu erkennen. Nach einer Mittheilung der Verlagsbuchhandlung befindet sich die Optik in Vorbereitung.

B. Nebel.

---

**Lehrbuch der Experimentalphysik für Studirende.** Von Emil Warburg. Mit 403 Original-Abbildungen im Text. Freiburg i. B. u. Leipzig 1893. Akademische Verlagsbuchhandlung von J. C. B. Mohr (Paul Siebeck). 382 S. Preis 7 Mk. 60 Pf.

In dem Vorwort wird mitgetheilt, dass das Buch zum Gebrauche neben der Experimentalphysik bestimmt sei, und dass dieser Zweck für die Auswahl und die Behandlung des Stoffes massgebend gewesen sei. Berücksichtigt man, dass die meisten Zuhörer der Experimentalphysik an der Universität Mediciner sind, die in der Mehrzahl nur das während der Studienzeit angeschaffte Buch im späteren Leben zu Rathe ziehen, so ist es wünschenswerth, dass die Stoffwahl möglichst Rücksicht auf das praktische Leben nimmt. Wir vermissen z. B. daher den Phonographen, ein kurzes Eingehen auf die Wechselstrommaschine, den Transformator, die Kraftübertragung und den Drehstrom. Zum leichteren Verständniss des absoluten Maass-Systems sollten auch die Dimensionen der einzelnen Grössen angegeben werden, beginnend mit der Geschwindigkeit, Beschleunigung u. s. w., damit der innige Zusammenhang klar zu Tage tritt. Eine Zusammenstellung in Form einer Tabelle würde von wesentlichen Nutzen sein. Leider ist das international angenommene Wort „Ampère" auch hier durch den unglückseligen Ausdruck „Amper" ersetzt. Es ist wohl etwas zuviel gesagt, wenn Siemens als der Erfinder der Dynamomaschine bezeichnet wird, da er nur das elektrodynamische Princip, nicht aber den Gramme-schen Ring erfunden hat.

In der Anordnung des Stoffes weicht das Buch von der allgemein üblichen Aufeinanderfolge nicht ab. Druck und Figuren zeichnen sich durch Reinheit und Deutlichkeit aus. Die bildliche Darstellung der Kreuze in den Figuren 283, 285 a und b kann für denjenigen, der die Dinge noch nicht gesehen hat, zu Irrthümern Veranlassung geben, die Strichmanier eignet sich in diesem Falle nicht. Erfreulich ist die Anerkennung, die Robert Mayer zu Theil wird. — Das Buch kann den Studirenden warm empfohlen werden.

B. Nebel.

---

**Lehrbuch der Physik.** Mit einem Anhange: Die Grundlehren der Chemie und der mathematischen Geographie. Von Peter Münch. Mit 327 in den Text gedruckten Abbildungen und einer Spectraltafel in

Farbendruck. Zehnte verbesserte Auflage. Freiburg i. Br. 1893. Herder'sche Verlagsbuchhandlung. 352 S. Preis 4 Mk.

Bei der in kurzer Zeit erschienenen zehnten Auflage sind die früher gerügten Mängel beseitigt. Das absolute Maas-System ist wegen seiner Wichtigkeit entsprechend erweitert worden. Zum ersten Male wurden auch die Elemente der Potentialtheorie aufgenommen. Damit aber der Umfang das frühere Maass nicht wesentlich überschreite, mussten andere Abhandlungen gekürzt werden. Bei der Verbreitung des Buches wäre es dringend wünschenswerth, dass der Verfasser nur die allgemein üblichen Grössenbezeichnungen gebraucht und nicht solche, die nach seiner Ansicht vielleicht vorzuziehen sind. Durch die internationale Festsetzung der Bezeichnungen wurde der Wirrwarr beseitigt, und es muss nun streng darauf gesehen werden, dass sich der Einzelne zum Wohle des Ganzen unterordne, und nicht durch Neuschaffung von Ausdrücken das alte Uebel wieder zu Tage fördert. In den Lehrbüchern müssen die Namen einheitlich sein, dabei bleibt es Jedem unbenommen, seine eigenen Ansichten in Zeitschriften niederzulegen. Bewegungsmoment und Intensität der Arbeitsleistung müssen daher durch Bewegungsgrösse und Effect ersetzt werden.

Bei der Durchsicht der Correctur hätte die Fig. 111 auf S. 112 durch eine bessere ersetzt werden müssen. Da das Buch gerne empfohlen wird, so muss darauf gehalten werden, dass eingeschlichene Mängel bei Neuauflagen nicht wieder vorkommen.

B. Nebel.

---

**Elasticität und Elektricität.** Von R. Reiff. Freiburg i. Br. und Leipzig 1893. Akademische Verlagsbuchhandlung von J. C. B. Mohr (Paul Siebeck). 181 S. Preis 5 Mk.

Um gewisse Analogien zwischen der Theorie der Elektricität und der Theorie der Elasticität derart durchführen zu können, dass jedem elektrischen Problem das entsprechende Problem der Elasticitätstheorie gegenüber gestellt wird, eignet sich die gewöhnliche Theorie der Elasticität nicht; es muss die Theorie des W. Thomson'schen quasi-elastischen Mediums zu Grunde gelegt werden, nach welchem die den magnetischen Kräften zugeordneten Drehungscomponenten die Drucke des Mediums veranlassen. In dem ersten Abschnitte werden die Differentialgleichungen des elastischen und des absorbirenden Mediums entwickelt und in den folgenden Abschnitten die Analogien zu den Erscheinungen der ruhenden Elektricität, der stationären Ströme und des ruhenden Magnetismus aufgestellt. In besonderen Abschnitten werden die Beziehungen zwischen der Wirbelbewegung und den Geschwindigkeiten, der Elektromagnetismus und die Inductionserscheinungen in absorbirenden und elastischen Körpern untersucht. In dem letzten Abschnitte, welcher Anwendungen auf die Optik umfasst, giebt der Verfasser eine Deutung der Rowland'schen Drehungscomponente für die Theorie

des Aethers. — Wenngleich Sommerfeld schon auf die Uebereinstimmung der Differentialgleichungen und der Grenzbedingungen hingewiesen hat, so ist es doch ein Verdienst des Verfassers, auf die Behandlung der einzelnen Probleme näher eingegangen zu sein.

B. Nebel.

---

**Beiträge zu einzelnen Theilen der mathematischen Physik, insbesondere zur Elektrodynamik und Hydrodynamik, Elektrostatik und magnetischen Induction.** Von Carl Neumann. Mit Figuren im Text. Leipzig 1893. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 314 S.

Dem heutigen Streben, das Wesen der Elektricität und des Magnetismus möglichst auf rein mechanische Grundvorstellungen zurückzuführen, sucht der Verfasser insofern Einhalt zu gebieten, dass er die Worte Fourier's bezüglich der Stellung der Mechanik zur Erklärung der Wärmewirkungen ins Gedächtniss zurückruft, zumal der Zusammenhang zwischen Elektricität und Wärme ein so inniger ist. Um nicht auf falsche Wege zu gelangen, ist es vor Allem nöthig, die in der Elektrodynamik und in der Theorie des Magnetismus gefundenen Gesetze eingehender zu studiren, um möglichst viele Consequenzen daraus ziehen zu können. Am besten lässt sich dies erreichen, indem die Gesetze auf die verschiedensten Aufgaben angewendet werden, worin der Zweck dieses Buches besteht. Bei den von Kirchhoff entdeckten Analogieen zwischen Elektrodynamik und Hydrodynamik kommt der Verfasser zu dem Resultat, dass die Analogieen rein äusserlicher Natur sind, weil die physikalischen Vorgänge in stetiger Weise erfolgen, also sich durch stetige Functionen ausdrücken lassen.

B. Nebel.

---

**Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen mit besonderer Berücksichtigung der Ausgleichung von Absterbe- und Invaliden-Ordnungen.** Von Dr. Ernst Blaschke. Mit drei Ziffern- und einer Figurentafel. Wien 1893. Alfred Hölder, kaiserl. königl. Hof- und Universitätsbuchhändler. 122 S.

Wie es in der Physik und Astronomie üblich ist, die Beobachtungs- und die sonstigen Fehler in ihrer Wirkung auf das Endresultat unschädlich zu machen, so ist man zum Theil auch bei den Massenerscheinungen, die bei den Versicherungsanstalten und dergleichen der Beobachtung unterliegen, dazu übergegangen, die einzelnen Werthe und die ihnen zu Grunde liegenden Ereignisse einer sorgfältigen Ausgleichung zu unterziehen. Während in den erstgenannten Disciplinen in den meisten Fällen die Methode der kleinsten Quadrate zur Anwendung kommt, führen bei den allgemeinen Massenerscheinungen, die von der Statistik behandelt werden, zahllose Methoden zum Ziel, weil man bei diesen Beobachtungen von vornherein nicht mit Bestimmtheit auf ein Naturgesetz schliessen kann, wie dies in

der Physik und Astronomie der Fall ist, obwohl nicht behauptet werden soll, dass diese Massenerscheinungen nicht auch einem Naturgesetz zu subsumiren sind. Die Ergebnisse aller dieser Ausgleichungsmethoden lehren, dass jede gut ausgedachte Beobachtungsreihe von Beobachtungsfehlern freiere Endresultate liefert, als die ursprüngliche Reihe, ganz unabhängig davon, nach welcher Methode die Ausgleichung stattgefunden hat. Der Verfasser hat seine Methoden mit anderen dadurch am besten verglichen, dass er ihnen dieselben Verhältnisse zu Grunde gelegt hat, worüber die beigefügten Tafeln näheren Aufschluss geben. Allen, welche mit Versicherungen und dergleichen zu thun haben, wird dieses Buch einen interessanten Einblick in das Wesen der richtigen Beurtheilung des enormen Zahlenmaterials gewähren.

B. Nebel.

---

**Seifenblasen.** Vorlesungen über Capillarität. Von C. V. Boys. Autorisirte deutsche Uebersetzung von G. Meyer. Mit 56 Figuren im Text und einer lithographischen Tafel. Leipzig 1893. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 86 S.

Das in freier Uebersetzung aus dem Englischen vorliegende Buch zeigt, wie sonst schwierige Theile der Physik bei geschickter Behandlung auch einem grösseren Publikum zugänglich gemacht werden können. Mit Befriedigung wird Jeder das kleine Werk lesen, dessen Stoff ursprünglich den Gegenstand dreier populärer Vorträge bildete. Zum Theil sind auch neue Experimente angegeben, die in den bisherigen Lehrbüchern der Physik nicht zu finden sind. Damit nun jedes der schönen Experimente nachgemacht werden kann, ohne durch das Misslingen enttäuscht und entmuthigt zu werden, sind in dem Anhange zu jedem Experiment praktische Winke mitgetheilt und die etwaigen Schwierigkeiten besonders hervorgehoben. Nach dem Kapitel über das Wesen der Oberflächenspannung werden die Flüssigkeitsstrahlen und sodann die Seifenblasen einer eingehenden experimentellen Untersuchung unterzogen. Die beiden Zusätze des Uebersetzers beziehen sich auf die Bewegungen des Kamphers auf einer reinen Wasseroberfläche und auf die Anwendung des Oeles zur Beruhigung der Meereswellen. Mit sehr geringen Hilfsmitteln lassen sich die schönen Versuche nachmachen, was ungemein zur Belehrung beiträgt. Daher kann dieses Buch auf's Wärmste empfohlen werden.

B. Nebel.

---

**Die physikalische Behandlung und die Messung hoher Temperaturen.** Von Carl Barus. Mit 30 eingedruckten Figuren und zwei Tafeln. Leipzig 1892. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 92 S. Preis 3 Mk.

Auf den ersten 37 Seiten giebt der Verfasser eine sorgfältige geschichtliche Gruppirung der Arbeiten über Pyrometrie, so dass Jeder, der

auf diesem Gebiete arbeiten will, sich in kürzester Zeit orientiren kann, ein Vorzug, der bei der schnell anwachsenden und weit zerstreuten Literatur nicht hoch genug angeschlagen werden kann. Der Verfasser glaubt, dass die thermoelektrische Methode die grössten Vorzüge vor den übrigen Methoden besitzt. In dem zweiten Theile wird die Calibrirung solcher Pyrometer durch bekannte Siede- oder Schmelzpunkte eingehend beschrieben und die für niedere und hohe Siedepunkte, sowie für Schmelzpunkte erforderlichen Apparate durch Zeichnungen ausführlich erläutert. Besonderes Interesse erwecken die Versuche von Le Chateliers, die mit einem Rhodioplatinelement durchgeführt wurden, das nahezu gleich stark ist mit dem von dem Verfasser verwendeten Iridioplatinelement. Die Vergleiche werden auch auf die Galvanometer und die damit ausgeführten Messmethoden ausgedehnt. Als Resultat ergiebt sich deutlich zu erkennen, dass das Thermoelement sehr zuverlässig, und die thermoelektrische Pyrometrie daher von grosser Wichtigkeit ist, dass es aber bis zur Stunde an sicher bestimmten Hauptcalibrirungspunkten fehlt, was mit der Schwierigkeit derartiger Versuche zusammenhängt. — Das Buch wird dauernd einen guten Platz in der Literatur über Pyrometrie einnehmen.

B. Nebel.

---

**Molecularkräfte.** Physikalisch-chemische Studie der verschiedenen Körperzustände. Von Ed. Seelig. Zweite Auflage. Durch zahlreiche Tabellen vervollständigt. Berlin 1893. Commissionsverlag von R. Friedländer & Sohn. 60 S. 2 Mk. 40 Pf.

In der 13 Seiten einnehmenden Einleitung werden eine Reihe von thatsächlich vorhandenen Erscheinungen mitgetheilt, die besonders geeignet erscheinen, die den neueren Forschungen entsprechenden Gesichtspunkte über die Auffassung der verschiedenen Körperzustände anzudeuten. Die eigentliche Aufgabe erstreckt sich nur auf die Wechselwirkungen zwischen Flüssigkeiten und Gasen, die bei der Verdichtung eines Gases zu einer Flüssigkeit und der Ueberführung von Flüssigkeit in Gas auftreten. Die Wechselwirkungen fester Körper unter sich, sowie mit Flüssigkeiten und Gasen sind in dem vorliegenden Werkchen nicht behandelt.

B. Nebel.

---

**Die Akkumulatoren.** Eine gemeinfassliche Darlegung ihrer Wirkungsweise, Leistung und Behandlung von Karl Elbs. Mit drei Figuren im Text. Leipzig 1893. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 35. S. Preis 1 Mk.

Je mehr sich die Akkumulatoren ausbreiten und die bisher meistens gebrauchten galvanischen Elemente verdrängen, desto grösser ist das Bedürfniss, auch den Nicht-Elektrotechniker mit dem Wesen und der Behandlung der Akkumulatoren bekannt zu machen. Verfasser sucht dieses Bedürfniss durch das vorliegende Werkchen zu befriedigen. Ausgehend

von der Wirkungsweise und Umkehrbarkeit des Daniell'schen Elementes und der dabei stattfindenden chemischen Umsetzungen ist diejenige der Akkumulatoren bei der Ladung und Entladung leicht verständlich. Daraus folgt auch, wie die Akkumulatoren am besten eingerichtet sein müssen, was auf verschiedene Weise erstrebt wird. Um keinerlei Täuschungen zu unterliegen, ist es nöthig, dass man sich über die Leistungsfähigkeit der Akkumulatoren völlig im Klaren ist, weshalb in diesem Kapitel auch durchgerechnete Beispiele sich finden. Die Haltbarkeit der Akkumulatoren hängt wesentlich von deren Behandlung ab; wird denselben beim Füllen, Laden und Entladen die nöthige Aufmerksamkeit geschenkt, so kann die Lebensdauer derselben wesentlich verlängert werden; es sind daher die in diesem Kapitel gegebenen Winke auf's Sorgfältigste zu beachten. Den Anhang bilden die wichtigsten Einheiten des elektrischen Maass-Systems. Die Schreibweise ist einfach und klar, daher auch dem Nichtfachmanne zu empfehlen.

B. Nebel.

---

**Die elementaren Grundlagen der astronomischen Geographie.** Gemeinverständlich dargestellt von Adolf Jos. Pick. Mit zwei Sternkarten und mehr als 80 Holzschnitten. Zweite, sorgfältig durchgesehene und vermehrte Auflage. Wien 1893. Manz'sche kaiserl. und königl. Hof- Verlags- u. Universitätsbuchhandlung (Julius Klinkhardt & Co.) I. Kohlmarkt 20. 173 S. Preis 2 Mk. 40 Pf.

Das gegenüber der ersten Auflage nur unwesentlich erweiterte Buch zeichnet sich vor allen Dingen dadurch aus, dass es den Anfänger durch passend gewählte Beispiele und Figuren einübt, räumlich zu denken, was bei dem Unterricht in der Himmelsgeographie absolut nothwendig ist. Neue Eindrücke an dem Himmelsgewölbe versteht der Verfasser dadurch fasslich zu machen, dass er zuvor ein den Himmel gar nicht betreffendes irdisches Beispiel wählt und an diesem die Erscheinung deutlich macht. Der Uebergang zur Astronomie ist dann nicht mehr mit Schwierigkeiten verbunden. Die einfache Darstellungsweise ist es, welche uns veranlasst, das Buch Allen zu empfehlen, welche sich an der Grösse der Natur erfreuen und nicht blind gegen die Umgebung sind. Der Verfasser möge, angespornt durch den Erfolg dieses Theiles, auch den zweiten in der gleichen Weise bearbeiten; denn die Zeitgleichung und namentlich der Kalender sind für den Laien von hohem Interesse.

B. Nebel.

---

**Neue ballistische Theorien.** Beiträge zum Studium neuer Probleme der inneren und äusseren Ballistik. I. Analytische Theorie der Wärmeleitung in Geschützrohren. Von Alois Indra. Pola 1893. Commissions-Verlag von E. Scharff. 178 S.

Das Problem, die Wärmeleitung in Bezug auf die beim Schusse in Kanonenrohren und Gewehrläufen sich entwickelnden Zustände zu unter-

suchen, würde sich allgemein mathematisch gar nicht lösen lassen, weil die Bedingungen so complicirter Natur sind, dass den Formeln jede Uebersicht fehlen und daher jede Deutung von vornherein ausgeschlossen wäre. Um aber doch einen Einblick in diese verwickelten Verhältnisse zu erlangen, ist es nöthig, zuerst die Bedingungen so einfach als irgend möglich zu wählen und darauf die Fourier'sche Theorie der Wärme anzuwenden. Verfasser geht daher zunächst von einem cylindrischen Rohre aus mit unendlich dicker Wandung und einer inneren constanten Wärmequelle. Erst dann werden die einzelnen Bedingungen derart variirt, dass man den wirklichen Verhältnissen näher kommt. Es ergiebt sich, dass die an der Oberfläche des Rohres gemessene Temperatur-Erhöhung nach $n$ Schüssen nicht von der Fortpflanzung der Verbrennungs-Temperatur herrühren kann, sondern der in Wärme umgewandelten Stosswirkung der Pulvergase in weit überwiegendem Maasse zuzuschreiben ist. Man kann daher umgekehrt aus dem Temperaturzustande der Oberfläche nach irgend einer Zeit, bei sorgfältiger Berücksichtigung aller geometrischen Verhältnisse, auf den anfänglichen Zustand im Innern des Rohres und somit auf die Ursache desselben, nämlich die Spannung der Pulvergase im Rohre, schliessen und die Spannungen in jedem Punkte des Rohres feststellen. Dieses Problem unterzieht der Verfasser im Weiteren der mathematischen Behandlung. — Die im Laufe der Untersuchungen auftretenden Integral-Logarithmen veranlassten den Verfasser, in einem Anhange die Tafeln für den Integrallogarithmus von 0,00 bis 1280 aus dem Werke: „Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendente“ von J. Soldner, München 1809, abzudrucken. — Die praktische Anwendung der aus der theoretischen Behandlung des obigen Problems gewonnen Formeln wird einer später folgenden Abhandlung zu Grunde gelegt werden.

B. Nebel.

---

**Die Mechanik der Wärme.** In gesammelten Schriften von Robert Mayer. Dritte ergänzte und mit historisch-literarischen Mittheilungen versehene Auflage, herausgegeben von Jacob J. Weyrauch. Stuttgart 1893. Verlag der J. G. Cotta'schen Buchhandlung Nachfolger. 464 S. Preis 10 Mk.

Mit dieser dritten Auflage von Mayer's Mechanik der Wärme hat der Herausgeber durch seine historisch-literarischen Mittheilungen Robert Mayer ein Denkmal gesetzt, das im Vergleich mit den beiden in Stein errichteten (in Stuttgart und in Heilbronn) von Mayer sicher den Vorzug erhalten hätte, wenn er es hätte erleben dürfen. Dieses Kämpfen um sein geistiges Eigenthum, das der Gesundheit Mayer's so schwer zugesetzt hatte, ist in allen Stadien so eingehend mitgetheilt worden, dass die verbreiteten irrigen literarischen Notizen, entstanden durch die Wirren der fünfziger Jahre, hier erwähnt und richtig gestellt werden. Da aus Pietät an dem Mayer'schen Texte nichts geändert werden sollte, so hat der Heraus-

geber am Schlusse von jedem Aufsatze in Anmerkungen die nöthigen Erläuterungen beigefügt, während er die Aufsätze selbst durch historisch-literarische Mittheilungen derart zu einem Ganzen vereinigt hat, dass man mit grossem Genuss das geistige und physische Leben Mayer's verfolgt. Als äusserer Schmuck dieses literarischen Denkmals ist, abgesehen von der vorzüglichen Ausstattung des Buches, zu erwähnen die Beifügung eines Bildes von Robert Mayer aus dem Jahre 1842, und eines solchen von seinem Denkmal in Heilbronn, sowie die genaue Wiedergabe seines Briefes an Baur vom 24. Juli 1841. In dem vorliegenden Exemplare liest man diese Zahl eher für 40 als für 41, hoffentlich trifft dies bei den übrigen nicht zu, damit nicht etwa neue Zweifel entstehen, obwohl Seite 17 ganz deutlich 1841 zu lesen ist, und sich diese Zahl auch aus dem Vorhergehenden ergeben muss. — Mit dem Herausgeber sind wir vollständig einverstanden, wenn er in dem Vorworte sagt, „jeder berufsmässig mit Naturwissenschaften und deren Anwendungen Befasste sollte dies Werk gelesen haben, in keiner Studien- und Schülerbibliothek sollte es fehlen“.

B. Nebel.

---

**Oberirdische und unterirdische Wirkungen eines Blitzstrahles.** Von O. Hoppe. Verlag von Grosse in Clausthal, Graz und Gerlach in Freiberg 1893. 15 S. Preis 60 Pf.

Verfasser beschreibt beinahe zu ausführlich einen Blitzschlag vom 20. Juli 1881 und die von Bergleuten beobachteten unterirdischen Inductionswirkungen bei Gewittern.

B. Nebel.

# Bibliographie

vom 1. Juni bis 31. Juli 1894.

---

### Periodische Schriften.

Mathematische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1893. Berlin, G. Reimer. 4 Mk.

Physikalische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1893. Ebendaselbst. 10 Mk.

Wissenschaftliche Abhandlungen der physikalisch-technischen Reichsanstalt. 1. Bd. Berlin, Springer. 30 Mk.

Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der königl sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1894, I. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften 1894, I. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der math.-naturw. Klasse IIa der Wiener Akademie der Wissenschaften. 102. Bd., 9. und 10. Heft. Wien, Tempsky. 5 Mk 60 Pf.

Denkschriften der Wiener Akademie, math.-naturw. Klasse. Register III zu Bd. 41—60. Ebendaselbst. 2 Mk. 10 Pf.

Annalen der kaiserl. königl. Universitäts-Sternwarte in Wien. IX. Bd. Wien, Künast. 15 Mk.

Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 31, 9. Bd. und Nr. 32, 10. Bd. Leipzig, Engelmann. 32 Mk.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorologischen Instituts. Niederschlagsbeobachtungen im Jahre 1892. Berlin, Asher. 10 Mk.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1893. Beobachtungssystem des Königr. Sachsen. Herausgeg. von P. Schreiber. Chemnitz, Bülz. 10 Mk.

Repertorium für Meteorologie. Herausgegeben von der Petersburger Akademie der Wissenschaften. 16. Bd. Leipzig, Voss. 37 Mk. 30 Pf.

Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte. 65. Versammlung zu Nürnberg im September 1893. II. Theil, 1. und 2. Hälfte. Leipzig, Vogel. 15 Mk.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

Kiebel, A., Galilei's Untersuchung der Fallbewegung (Programm). Czernowitz, Pardini. 50 Pf.

Herz, N., Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen. II. Theil. Die empirische Methode. Leipzig, B. G. Teubner. 10 Mk.

Lange, J., Geschichte d. Feuerbach'schen Kreises (Progr.). Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Miething, E., Leonh. Euler's Lehre vom Aether (Progr.). Ebendaselbst. 1 Mk.

Robel, E., Die Sirenen. II.Th. Gesch. d. Sir. von 1830-56 (Progr.). Ebend. 1 Mk.

### Reine Mathematik.

BACHMANN, P., Zahlentheorie. II. Theil. Die analytische Zahlentheorie. Leipzig, B. G. Teubner. 12 Mk.

PUCHBERGER, E., Eine allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. 1. Heft. Wien, Gerold. 1 Mk.

Abhandlungen über Variationsrechnung von Joh. und Jac. Bernoulli, Euler, Lagrange, Legendre und Jacobi. Herausgegeben von P. STÄCKEL. 2 Bände. (Nr. 46 und 47 von Ostwald's Klassikern d. exact. Wissensch.) Leipzig, Engelmann. 3 Mk. 60 Pf.

ALBRECHT, Th., Vierstellige Logarithmentafel. Leipz., Engelmann. 1 Mk. 20 Pf.

HERMES, O., Ueb. Anzahl u. Form d. Vielfachen (Progr.). Berlin, Gärtner. 1 Mk.

TEMME, J., Grundlehren d. analytischen Planimetrie. Warendorf, Schnell. 50 Pf.

VERONESE, G., Grundzüge d. Geometrie von mehreren Dimensionen u. geradlinigen Einheiten. Uebers. von A. SCHEPP. Leipzig, B. G. Teubner. 20 Mk.

BRÜCKNER, M., Elemente d. vierdimensionalen Geometrie. Zwickau, Thost. 2 Mk.

WIECKE, P., Lehrproben. Geometrische und algebraische Betrachtungen über Maxima u. Minima. Für Oberkl. d. Gymnasien. Berlin, G. Reimer. 5 Mk.

### Angewandte Mathematik.

GALLE, G., Verzeichniss der Elemente der bisher berechneten Kometenbahnen, ergänzt bis zum Jahre 1894. Leipzig, Engelmann. 12 Mk.

Polhöhenbestimmungen im Harzgebiet, ausgef. in den Jahren 1887–1891. Public. d. königl. preuss. geodät. Instituts. Berlin, Stankiewicz. 5 Mk.

SCHLÖTZ, E., Resultate der 1893 im nördl. Theile Norwegens ausgeführten Pendelbeobachtungen. Christiania, Dybwad. 1 Mk. 60 Pf.

GAUSS, C. F., Die Intensität der erdmagnetischen Kraft, auf absolutes Maass zurückgeführt. Herausgeg. von E. DORN (aus Ostwald's Klassikern etc. Nr. 53). Leipzig, Engelmann. 1 Mk.

COOKE, T., Die Prüfung und Justirung von Fernrohrobjectiven. Uebersetzt von R. STRAUBEL. Berlin, Springer. 2 Mk.

### Physik und Meteorologie.

FÖPPL, A., Einführung in Maxwell's Theorie der Elektricität. Mit Einleitung über das Rechnen mit Vectorgrössen. Leipzig, B. G. Teubner. 10 Mk.

VELDE, W., Die magnetischen Kraftlinien im physikalischen Unterrichte (Programm). Berlin, Gärtner. 1 Mk.

DRUDE, P., Physik des Aethers auf elektromagnetischer Grundlage. Stuttgart, Enke. 14 Mk.

HOFF, H. VAN'T, Die Lagerung der Atome im Raume. Mit Vorwort von J. WISLICENUS. Braunschweig, Vieweg. 4 Mk.

CHRISTIANSEN, C., Elemente d. theoretischen Physik. Deutsch von J. MÜLLER, mit Vorwort von E. WIEDEMANN. Leipzig, Barth. 10 Mk.

HESS, C., Die Hagelschläge in der Schweiz, nebst Theorie der Hagelwetter (Programm). Frauenfeld, Huber. 3 Mk 60 Pf.

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Fürst Baldassarre Boncompagni Ludovisi.

Ein Nachruf
von
M. Cantor.

Der 10. Mai 1821 als Geburtstag, der 13. April 1894 als Todestag begrenzten das fast 73jährige Leben des vortrefflichen Mannes, mit welchem ein zwar nie regelmässig geführter, aber über lange Zeiträume sich erstreckender Briefwechsel uns so nahe verband, dass wir es für eine Ehrenpflicht halten, ihm in unserer Zeitschrift einen Nachruf zu widmen. Hat er ihn doch nach den verschiedensten Richtungen reichlich verdient.

Fürst Baldassarre Boncompagni, ein Sprössling jener alten Familie, der auch Papst Gregor XIII., unter welchem die Kalenderreform zu Stande kam, angehörte, war ein Gelehrter von umfassendem Wissen. Lieblingsgegenstand seines Studiums und seiner Forschungen war die Geschichte der Mathematik, und wenn wir auch nicht beabsichtigen, alle Leistungen Boncompagni's auf diesem Gebiete aufzuzählen, so mögen doch seine wichtigsten Arbeiten genannt werden.

Er hat sich Zeit gelassen mit Veröffentlichungen. In engeren Kreisen war seine geistige Bedeutung zwar schon frühe bekannt. Als Pius IX. im Juli 1847 die päpstliche Akademie De' Nuovi Lincei gründete, wurde Boncompagni schon als Mitglied beigezogen, aber erst 1851 kamen rasch hinter einander drei Druckschriften heraus, welche die Berechtigung jener frühzeitigen Ernennung darthaten. Guido Bonati, Gerhard von Cremona, Plato von Tivoli sind, wie man getrost behaupten kann, erst durch jene ihnen in der hier eingehaltenen Reihenfolge gewidmeten Schriften bekannt geworden.

Sie alle freilich waren immerhin weniger hervorragende Persönlichkeiten. In ganz anderer Grösse tritt Leonardo von Pisa aus dem XIII. Jahrhunderte hervor, der Lehrer der nächsten drei Jahrhunderte. Und was wusste man von ihm? Wir wollen die bahnbrechenden Arbeiten Cossali's (1797) und Libri's (1838) gewiss nicht unterschätzt haben, aber doch war es Boncompagni mit seinem Bande *Intorno ad alcune opere*

*di Leonardo Pisano* von 1854, mit seiner Ausgabe von Leonardo's Schriften (1857 bis 1862), welcher erst eingehende Forschungen über den gewaltigen Mann ermöglichte und hervorrief.

Die Beschäftigung mit Leonardo von Pisa führte zu zwei weiteren Fragen: was war vor Leonardo in Europa an arithmetischem Wissen vorhanden, was bildete nach Leonardo in Italien den Uebergang von ihm bis zu Luca Paciuolo? Um die Beantwortung der ersten Frage hat vornehmlich Michel Chasles sich verdient gemacht. Boncompagni unterstützte die hierher gehörenden Arbeiten durch Ausgaben alter Arithmetiken, welche er 1857 veranstaltete. Die zweite Frage machte er zum Gegenstande eindringender Forschung, deren Ergebnisse 1862—1863 in den Abhandlungen der obengenannten päpstlichen Akademie veröffentlicht sind.

Wir haben eigene Arbeiten Boncompagni's, wir haben durch denselben veranstaltete Ausgaben erwähnt. Die Liste ist in dem von uns Genannten keineswegs erschöpft. Eine den Fachmännern unter dem Namen des *Bulletino Boncompagni* wohlbekannte Zeitschrift, deren zwanzig Bände aus den Jahren 1868 bis 1887 herrühren, enthält noch weitere zahlreiche Abhandlungen des fürstlichen Herausgebers, enthält nicht minder zahlreiche erstmalige Abdrücke von älteren und jüngeren Handschriften, welche, wenn auch vielfach durch andere Gelehrte zum Druck vorbereitet, nicht minder die Spuren von Boncompagni's Mitarbeit, und zwar in stärkerem Grade, als es den eigentlichen Herausgebern lieb war, aufweisen.

Wir berühren damit eine kleine schriftstellerische Schwäche Boncompagni's, welche aber so kennzeichnend für ihn ist, dass wir sie nicht mit Stillschweigen übergehen dürfen. Wir meinen seine Neigung, sich für Alles und Jedes auf möglich zahlreiche Werke zu berufen, und die Anführungen, auch wenn es um allgemein zugängliche neuere Sammelschriften, Encyklopädien, Biographien u. s. w. sich handelte, in so unerträglicher Breite und Ausführlichkeit zu geben, als wenn es Incunabeln wären, die nur in ganz vereinzelten Exemplaren erhalten blieben. Dadurch wuchsen die von Boncompagni hergestellten Anmerkungen oftmals zu einer den Text überwuchernden Ausdehnung an.

Für andere Neuausgaben begnügte sich Boncompagni allerdings damit, die Kosten des Druckes zu decken. Wir nennen hier Cossali's nachgelassene Schriften (1857), wir nennen den facsimilirten und mit einer werthvollen Einleitung von Herrn Giordani versehenen Neudruck der einst zwischen Ferrari und Tartaglia gewechselten Schmähschriften (1876), den erstmaligen Druck wichtiger Briefe von Lagrange (1877 und 1878).

Unsummen hat der Fürst für solche Veröffentlichungen ausgegeben. Unsummen hat seine Bibliothek verschlungen, welche auf über 600 Handschriften und 18000 Druckwerke angewachsen ist. Ein fürstliches Vermögen und eine in des Wortes bester Bedeutung fürstliche Gesinnung waren erforderlich, um solche Ausgaben möglich zu machen. Und sie waren nicht

die einzigen. Der Gelehrte, dem die Erreichung wissenschaftlicher Zwecke nie zu theuer erkauft war, der Sammler, der mit findigem Spürgeiste Seltenheiten aufzustöbern wusste, er war auch Mensch! Das *nihil humani a me alienum puto* des Römers begegnete sich in seinem warmen Herzen mit dem Sinnspruche *Noblesse oblige!* Wo Boncompagni von einem aufkeimenden Talente wusste, dem ungünstige Verhältnisse die Schwingen fesselten, sprang er in zartester Weise bei. Wie viele Abschriften vorhandener Manuscripte hat er nicht da und dort anfertigen lassen, sei es, um sie in uneigennütziger Weise jungen Gelehrten zur Verfügung zu stellen, sei es auch nur, um dem Abschreiber Gelegenheit zum Erwerbe zu geben. Und wie viele andere Unglückliche beweinen heute in ihm ihren Wohlthäter, der, wenn wir unseren fremdländischen Anführungen ein Wort Lessing's hinzufügen, überall nur den einen Beweggrund für seine Mildthätigkeit kannte: *Genug, es war ein Mensch.*

Boncompagni ist einem bösartigen Leberleiden erlegen, welches er kannte, aber verheimlichte, um sich, wie er sagte, der Langeweile der Aerzte und der Arzneien zu entziehen. So überraschte ihn der Tod nicht, aber er trat doch früher ein, als der Kranke es vermuthete, und bevor er seine Absicht erfüllte, seine bibliographischen Schätze rechtskräftig der Vaticanischen Bibliothek zu vermachen. Die 18 Erben gedenken nunmehr die grossartige Sammlung zu veräussern. Die Bibliothek Boncompagni wird verschwinden. Das Gedächtniss des Fürsten Baldassarre Boncompagni wird bleiben.

# Georg von Vega.

Von

Dr. Karl Doehlemann.*

Die Logarithmentafeln von Vega gehören zu den bekanntesten und verbreitesten Büchern der Welt. Die im reiferen Mannesalter Stehenden erinnern sich, viele vielleicht mit einem leichten Schauder, an dies von ihnen auf der Schule benützte Buch. Denn erst gegen Ende der 70er Jahre wurden allmählich die Vega'schen Logarithmentafeln an den Mittelschulen abgeschafft und dafür kleinere, fünfstellige eingeführt. Für exactere Untersuchungen der Mathematik, Astronomie oder Technik dagegen ist das Vega'sche Handbuch in seiner jetzigen Bearbeitung auch heute noch allgemein in Verwendung.

Man kann fast sicher annehmen, dass die Meisten sich den Herausgeber dieses Tabellenwerkes als einen einseitigen Zahlenmenschen vorstellen werden, der über seinen Logarithmen Welt und Menschen vergass. Dies widerspricht durchaus allen Thatsachen. Vega hat nicht nur als Gelehrter, sondern auch als Lehrer, sowie als thatkräftiger, umsichtiger Officier eine so vielseitige, glänzende Thätigkeit entwickelt, dass es nicht uninteressant sein dürfte, etwas näher auf die wechselvollen und gegensatzreichen Schicksale dieses Mannes einzugehen, die des Zaubers einer gewissen Romantik nicht entbehren. Ueberdies feiern wir in diesem Jahre das 100jährige Jubiläum eines der Bücher dieses Mannes. Denn im October 1794 erschien Vega's grösstes logarithmisches Tabellenwerk: Thesaurus logarithmorum completus.

Sieht man von einigen älteren und schwer zugänglichen Publicationen ab, so findet man eine eingehendere und sachgemässe Würdigung von Vega's Leben und Wirken erst in einem vor noch nicht allzu langer Zeit erschienenen Schriftchen.** Auf dieses hinzuweisen mag gleichzeitig der Zweck der folgenden Zeilen sein.

Georg Vega wurde geboren im Jahre 1754 zu Zagorika in Krain als Sohn armer Bauersleute. Er besuchte die Schule in Laibach und, nachdem man seine Begabung erkannt hatte, das Lyceum. Auf Grund eines vorzüglichen Absolutoriums fand er sofort eine gut bezahlte Anstellung als kaiserl. königl. Navigations-Ingenieur in Innerösterreich. In dieser Thätig-

* Nach einem Vortrag, gehalten im „Mathematischen Vereine“ in München.
** Prof. Dr. Andreas Wretschko: „Georg Freiherr von Vega“. Wien 1885.

keit gaben ihm die Correctionsbauten an der wilden Save mannigfache Gelegenheit, seine mathematisch-technischen Kenntnisse zu erweitern. Aber seine Neigung zum Militär machte sich bei ihm, wie er selbst gelegentlich erzählt, so mächtig geltend, dass er nach fünf Jahren die sichere Stellung aufgab und, 26 Jahre alt, als Kanonier, also als gemeiner Mann bei dem 2. kaiserl. königl. Feldartillerieregiment eintrat. Und in der That hatte er seine Fähigkeiten richtig beurtheilt. Denn schon nach der ungewöhnlich kurzen Frist eines Jahres wurde er Unterlieutenant und bald darauf erfolgte seine Ernennung zum Lehrer der Mathematik an den Schulen des österreichischen Artilleriecorps. 1787 sehen wir Vega zum Hauptmann avancirt und gleichzeitig wurde er zum Professor der Mathematik an dem ein Jahr vorher gegründeten Bombardiercorps in Wien ernannt.

In diesen Stellungen war er während eines Zeitraumes von elf Jahren als Lehrer und Schriftsteller unausgesetzt bemüht, das Ziel, das er sich vorgesteckt hatte, zu erreichen: nämlich die österreichische Artillerie hinsichtlich ihrer wissenschaftlichen Vorbildung und praktischen Leistungsfähigkeit auf eine möglichst hohe Stufe zu heben. Den von ihm vorgetragenen mathematischen Disciplinen suchte er dadurch eine nachhaltigere Wirkung und grössere Verbreitung zu sichern, dass er seine Vorträge in einem in sich vollständig abgeschlossenen Werke: „Vorlesungen über Mathematik" herausgab, dessen vier Bände in der Zeit von 1782 bis 1800 der Reihe nach erschienen. Der Inhalt dieses Handbuches der reinen und angewandten Mathematik ist im wesentlichen folgender: Elementarmathematik — Trigonometrie, praktische Geometrie, Anfangsgründe der Differential- und Integral-Rechnung — Mechanik der festen Körper-Hydrodynamik. Die fünfte Vorlesung aus dem dritten Bande, welche die freie Bewegung geworfener schwerer Körper behandelt, erschien auch einzeln (1787) unter dem Titel: „Praktische Anweisung zum Bombenwerfen mittelst dazu eingerichteter Hilfstafeln". Welch' grossen Werth Vega den mathematischen Studien beilegte, ersehen wir am besten, wenn wir dem jungen Unterlieutenant selbst das Wort ertheilen, der dem ersten Bande dieser Vorlesungen (1782) folgende Widmung vorsetzt:

„Dem sämmtlichen, kaiserlichen königlichen Artilleriecorps. Gegenwärtige Vorlesungen sind Ihnen gewidmet und Ihr Urtheil soll ihren Werth bestimmen. Ich habe sie zum Drucke befördert, weil sie schon von einigen aus Ihnen, denen ich sie vorläufig mitgetheilte, des Druckes würdig gefunden worden. Dieser Theil enthält nur die nothwendigsten Gründe der allgemeinen Rechenkunst; jene der gemeinen und höhern Messkunst nebst einer Anwendung sollen darauf folgen. Meine Absicht ist, denjenigen einen sichern Leitfaden in die Hände zu geben, welche in einer schicklichen von den übrigen Dienstgeschäften freyen Zeit die unentbehrlichsten Kenntnisse der höhern und angewandten Mathematik sich zu erwerben wünschen. Könnte ich wohl diesen Wunsch bei Ihnen vermissen, da es Ihnen bekannt ist,

dass man sich kaum erkühnen darf ohne diesen Kenntnissen ein Artilleriebuch zu öffnen?..."

Auf die Abrundung und Verbesserung der Darstellung in diesen Vorträgen verwandte Vega den grössten Fleiss. Er liess sich durch einen seiner Schüler genau darüber Bericht erstatten, welche Stellen in seinen Vorlesungen unklar oder schwer verständlich blieben, um dementsprechend Verbesserungen anzubringen. Es ist daher nicht zu verwundern, dass dieses Buch sich in Oesterreich lange grosser Beliebtheit erfreute. Der erste Band der „Vorlesungen" ist noch 1850 in siebenter Auflage, der zweite Band 1848 in achter Auflage beide von Matzka bearbeitet worden. Uebrigens konnte Vega selbst noch sich des Erfolges seiner Thätigkeit freuen, wenn wir uns anders dem Urtheil des gereiften Mannes anvertrauen, der in der Vorrede zur dritten Auflage des ersten Bandes seiner Vorlesungen (1802) sich wie folgt ausspricht:

„Nun sind es gerade 20 Jahre, dass dieser erste Theil meines Lehrbuches in den mathematischen Schulen des kaiserlichen königlichen Artilleriecorps zum Leitfaden des Unterrichtes eingeführt ist.

Die 13 Kriegsjahre dieses Zeitraumes haben den Satz, dass die Mathematik die sicherste Grundlage der echten Kriegswissenschaft ist, für alle cultivirten Nationen evident gemacht. Ich selbst genoss das belohnende Vergnügen, mich in den Feldzügen sowohl gegen die Pforte als auch gegen Frankreich zu überzeugen, dass diejenigen meiner Schüler, welche sich mit ununterbrochenem Eifer den mathematischen Wissenschaften gewidmet hatten, sich auch vorzüglich vor dem Feinde durch kluge Tapferkeit ausgezeichnet und zur Aufrechterhaltung und Vermehrung des alten Ruhmes des österreichischen Artilleriecorps bestens mitgewirkt haben. — Es würde überflüssig sein, mehreres zur Aneiferung derjenigen anzuführen, für welche nach hergestelltem Frieden die mathematischen Schulen wieder eröffnet sind, da die wahre Würdigung der Mathematik bei dem ganzen Artilleriecorps einheimisch und so allgemein ist, dass sehr Viele, selbst aus der gemeinen Mannschaft, im Felde ihre wenigen Ruhestunden aus eigenem Antriebe dieser Wissenschaft gewidmet haben, welches ich, nicht ohne innigste Rührung, sehr oft als Augenzeuge wahrzunehmen die Gelegenheit hatte."

Vega hat ein hervorragendes Verdienst daran, dass die höhere, wissenschaftliche Ausbildung der Artillerie in Oesterreich stets im Auge behalten wurde.

Wenden wir uns jetzt zu einer anderen Seite von Vega's Thätigkeit: der von ihm durchgeführten Herausgabe logarithmischer Tabellenwerke. Nicht als ob er der Erste gewesen wäre, der diese zwar undankbare, aber doch so nützliche und nothwendige Arbeit auf sich nahm. Es hat ja für die gemeinen Logarithmen (mit der Basis 10) schon Henry Briggs (1618) eine 8stellige Tafel berechnet und zur Zeit Vega's gab es eine ganze Reihe solcher Werke, wie die Tafeln von Adrian Vlacq, Schulze, Gardiner.

Allein Vega berechnete auf's Neue sämmtliche Logarithmen, verglich sie mit den angegebenen Werthen und constatirte so eine ziemliche Anzahl von Fehlern in den vorhandenen Tafeln. Correctur und Drucklegung seiner Tafeln überwachte er mit der grössten Sorgfalt. Seine erste Logarithmentafel erschien im Jahre 1783 in Wien unter dem Titel: „Logarithmische, trigonometrische und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln", eine 7stellige Tafel, die ausser den Logarithmen der Zahlen und trigonometrischen Functionen in 24 Abschnitten Formeln aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik und Geographie enthält. Der Vorbericht dazu beginnt wie folgt:

„Durch den Beystand meiner Schüler, welche theils aus Kanonieren, theils auch aus einigen Unterofficieren des k. k. zweyten Feld-Artillerie-Regiments bestehen, durch den eyfrigsten Beystand dieser meiner Schüler unterstützet, und mit allen erforderlichen Hilfsmitteln versehen, wagte ich es, den Wunsch derjenigen einigermaassen zu befriedigen, welche einer hinlänglich ausgedehnten, dabei soviel als möglich fehlerfreyen, und um einen mässigen Preis zu verkaufenden Sammlung von mathematischen Hilfstafeln und Formeln schon lange vergebens entgegensahen."

Es folgt dann das Verzeichniss der in den einzelnen Tafeln entdeckten Fehler und daran schliesst sich die bekannte Bemerkung, „dass man sich Kraft einer öffentlichen Ankündigung verbindlich macht, für jede erste Anzeige eines jeden in gegenwärtigen Tafeln entdeckten wirklichen Fehlers einen kaiserlichen Ducaten zu bezahlen". Dieses Mittel, das Vega anwandte, um die grosse Zahl der die Tafel Benützenden zur Eruirung noch vorhandener Fehler heranzuziehen, hatte nur zur Folge, dass bis zum October 1784 zwei Fehler angezeigt wurden. Sympathisch berührt uns übrigens in diesem Vorbericht die rückhaltlose Anerkennung der Müheleistung seiner Mitarbeiter, wie überhaupt Dankbarkeit einen hervorragenden Zug in Vega's Charakter bildet. -- Das Buch erschien 1797 in zweiter und 1814 in dritter Auflage, später (1848) ist es von J. A. Hülsse als eine Sammlung mathematischer Formeln neu bearbeitet worden.

Im Jahre 1794 erschien in Leipzig das zweite Tabellenwerk Vega's unter dem Titel: „Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, anstatt der kleinen Vlackischen, Wolfischen und andern dergleichen, meistens sehr fehlerhaften, logarithmisch-trigonometrischen Tafeln für die Mathematik-Beflissenen eingerichtet". Diese 7stellige Tafel enthält weniger mathematische Formeln wie die eben genannte; sie ist der Stammvater, von dem in langer Ahnenreihe — habent sua fata libelli — das heute noch in Gebrauch befindliche Handbuch abstammt. Schon im Jahre 1800 erschien die zweite Auflage dieses Buches, die Vega in dankbarer Verehrung seinem früheren Mathematiklehrer am Lyceum in Laibach, dem infulirten Probst in Alt-Bunzlau, Josef Ritter von Maffei, widmete. Die sechste Auflage war bereits ein Stereotypdruck, von der zwanzigsten Auflage an besorgte

J. A. Hülsse, von der vierzigsten an C. Bremiker die Herausgabe. Der Letztere verbesserte die Tafel insofern bedeutend, als jetzt die Winkel nicht mehr blos von Minute zu Minute, sondern von zehn zu zehn Secunden fortschreiten. Die neuesten Ausgaben besorgte F. Tietjen und zwar hat das Buch jetzt seine 74. Auflage erlebt. Es ist in's Englische, Französische, Italienische, Holländische und Russische übertragen worden.

Sein grösstes logarithmisches Werk endlich, den schon erwähnten Thesaurus, eine vorzügliche 10stellige Tafel, aus einem Folioband von 684 Seiten bestehend, gab Vega auch im Jahre 1794 heraus. Der deutsche Titel lautet: „Vollständige Sammlung grösserer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln nach Adrian Vlack's Arithmetica Logarithmica und Trigonometria artificialis, verbessert, neugeordnet und vermehrt." Nach Vega's Intention sollte das „Logarithmisch-trigonometrische Handbuch" dem nur oberflächlich in der Mathematik Ausgebildeten, die „Tafeln" dem Mathematiker vom Fach, die „Vollständige Sammlung" aber dem Astronomen oder überhaupt Jedem für sehr genaue Rechnungen dienen. Auch hier findet sich in der Einleitung eine genaue Zusammenstellung der constatirten Fehler, sowie das schon erwähnte Versprechen. Das Datum am Schlusse der Einleitung lautet: „Geschrieben bei der kaiserlich königlichen Armee am obern Rhein am ersten October 1794". Dies lässt uns erkennen, dass diese der friedlichen Förderung stiller, geistiger Arbeit dienenden Werke zum Theil unter recht kriegerischen Auspicien das Licht der Welt erblickt haben.

Begleiten wir also Vega auch noch auf den Kriegsschauplatz, wo er seltene Proben von Umsicht, Unerschrockenheit und Muth abgelegt hat. Als Kaiser Josef II. im Jahre 1788 den Krieg gegen die Türken begann, bat Hauptmann Vega, obgleich er als Professor der Mathematik in Wien bleiben sollte, selbst um die Erlaubniss, ins Feld ziehen zu dürfen, um, wie er sagte, vor dem Feinde praktisch ausführen zu können, was er im Corps theoretisch vortrage. Im Jahre darauf wurde dieser Bitte Folge geleistet und Vega nahm Theil an der Belagerung von Belgrad (5. bis 7. September), wo er das Commando mehrerer Mörserbatterien erhielt. Nach seinen Anordnungen wurde das Laden der schweren Geschütze anders vorgenommen, wodurch sich eine erhebliche Vergrösserung der Schussweite ergab, so dass die Geschosse ihr Ziel erreichten. Die rasche Uebergabe der wichtigen Festung nach dem erfolgreichen Bombardement war zum grössten Theil sein Werk. Ein kleiner Vorfall aus der Belagerung, den unser Gewährsmann erzählt, verdient Erwähnung. Hauptmann Vega hatte sich in einen Laufgraben begeben, der im Bereiche der feindlichen Geschosswirkung lag. Als er nach Verlauf von zwei Stunden noch nicht zurückgekehrt war, gingen Officiere und Mannschaften ab, ihn zu suchen. Sie fanden ihn in dem Laufgraben sitzend und in die Berechnung von Logarithmen vertieft, obwohl in nächster Nähe eine Bombe eingeschlagen hatte und [illegible] war.

Fast unwillkürlich ergiebt sich gelegentlich dieses Herganges ein Vergleich mit Archimedes.

Im ersten Revolutionskriege (1793—1797) finden wir Vega, der inzwischen zum Major avancirt war, am Rhein, wo er unter dem Oberbefehl des General Wurmser das Commando der Belagerungs-Artillerie führte. Hier erzwang er ohne Schwertstreich blos durch den Eindruck seiner Persönlichkeit, der überhaupt ein imponirender gewesen sein muss, die Uebergabe der starken Festung Lauterburg, eines wichtigen Stützpunktes der Franzosen. Er besetzte die Stadt und führte in musterhafter Weise das Commando, bis er von der Oberleitung neue Befehle erhielt. 14 Stunden lang, den Säbel ununterbrochen in der Faust, commandirte er selbst alle Patrouillen. Bald darauf fand er Gelegenheit, sich noch mehr auszuzeichnen. Dem weiteren Vorrücken der kaiserlichen Armee setzte das Fort Louis, das auf einer Insel im Rhein liegt, einen scheinbar unüberwindlichen Widerstand entgegen. Drei Tage lang hatte schon die Beschiessung gedauert, viele kaiserliche Geschütze waren bereits demontirt. Es machte sich eine gewisse Missstimmung und Hoffnungslosigkeit bemerkbar und man mass sogar bei der Officierstafel dem Major Vega die Schuld an diesen Misserfolgen bei. Da erklärte dieser, dass er sich verpflichte, in 24 Stunden das Fort zur Uebergabe zu zwingen, falls ihm nur die gesammte Artillerie zur alleinigen und unumschränkten Verfügung gestellt würde. Der commandirende General (Lauer) sagte dies zu, gleichzeitig in Gegenwart aller Officiere beifügend, wenn Vega sein Wort halte, so werde er ihn für den Maria-Theresien-Orden, die höchste militärische Auszeichung in Oesterreich, in Vorschlag bringen. Von der Tafel weg schritt Vega zur Ausführung seines Angriffplanes. Es beschoss die Festung zwölf Stunden lang nach seiner neuen Methode aus zehnpfündigen Haubitzen mit 60löthigen Patronen unter einem geringen Elevations-Winkel mit solchem Erfolge, dass am folgenden Tage die Capitulation erfolgte. General Lauer brachte dementsprechend Vega in Vorschlag für das Ritterkreuz des genannten Ordens und in der folgenden Kapitelsitzung wurde ihm diese Auszeichnung einstimmig zuerkannt. Doch erhielt Vega infolge irgend eines Versehens den Orden factisch erst drei Jahre später.

Die neue Schussweise Vega's bestand in Folgendem: Vor ihm hatte man Mörser und Haubitzen nur zum sogenannten indirecten Schuss verwendet, d. h. man hatte die schweren Geschosse unter einem sehr grossen Elevationswinkel von 50°—75° geworfen, sodass sie fast senkrecht auf das hinter einer Deckung befindliche Ziel herabfielen. Vega wandte auch bei diesen Geschützen den directen Schuss an unter geringer Elevation von 15°—16°. Vega hat übrigens auch eigene „weittreibende" Mörser construirt und von einer Commission von Generälen, Artillerie- und Genie-Stabs-Officieren wurde durch genaue Versuche zu Mannheim (1795) festgestellt, dass er mit diesen weitaus die grösste Wurfweite erreichte,

nämlich 1640 Klafter (2900 m). Zwei solche 30pfündige Mörser wurden vor Mannheim auf Reichskosten gegossen und später (1838) in der österreichischen Armee eingeführt. Der rapide Aufschwung freilich, den das Artilleriewesen in unserem Jahrhunderte später nahm, hatte zur Folge, dass Vega's Leistungen, die für seine Zeit nicht unbedeutende waren, jetzt wohl selten noch in einem Lehrbuch der Waffenlehre eine Erwähnung finden.*

Die Vortrefflichkeit dieser Mörser bestätigte sich übrigens kurz darauf bei der Belagerung Mannheims. Der überraschenden Feuerwirkung derselben schrieb der General Wurmser in seinem Berichte die rasche Einnahme Mannheims zu. Auf dies hin erhielt Vega den ihm schon früher zuerkannten Maria-Theresien-Orden. Uebergehen wir manch' andere Kriegsthat, so finden wir Vega seit dem Frieden von Campo-Formio (1797) wieder ständig in Wien, wo er sich mit der Reform des Artilleriewesens beschäftigte. Ehrungen aller Art bewiesen dem verdienten Manne, dass man seine Dienste wohl zu würdigen verstand. 1800 wurde er in den Freiherrnstand erhoben, bald darauf folgte seine Beförderung zum Oberstlieutenant; wissenschaftliche Gesellschaften, so z. B. die Berliner Akademie der Wissenschaften, ernannten ihn zum Mitgliede.

Um die Mitte September 1802 verschwand der Oberstlieutenant plötzlich aus Wien. Neun Tage forschte man vergeblich nach ihm, da fand man am 26. September seine Leiche in der Donau, mittelst eines dünnen Strickes an einen Pfahl gebunden. Lange Zeit wusste man sich dieses Ende des berühmten, erst 49 Jahre alten Mannes nicht zu erklären. Man vermuthete sogar einen Selbstmord infolge irgend einer Zurücksetzung, andere erzählten, er sei bei einer Fahrt über Land von einem neidischen Freunde ermordet worden.

Erst 9 Jahre später kam durch einen Zufall Licht in die Sache. Während des Krieges von 1809 lag bei einem Müller in Nussdorf vor den Linien von Wien ein Artillerist im Quartier. Dieser wünschte für einen Augenblick einen Proportionalzirkel. Der Müller sagte ihm, dass er ein solches Instrument besitze und brachte es herbei. Da es dem Artilleristen gut gefiel, schenkte er es ihm beim Weggange. — Später, 1811, bemerkte ein Officier, der im Zeichnungssaal die Aufsicht führte, das Instrument in den Händen des Kanoniers und erkannte darauf den Namen Vega's. Nach den Aussagen des Soldaten wurde der Müller verhaftet und gestand zuletzt folgendes: Vega war bei dem Müller abgestiegen. Nun besass dieser Müller einen sehr schönen Schimmel, den Vega, schon im Besitze eines ähnlichen Thieres, gerne kaufen wollte. Allein der Müller wollte das Thier nicht hergeben. Als der Oberstlieutenant aber eine sehr grosse Summe bot,

---

* In Dolleczek: „Geschichte der österreichischen Artillerie" (Wien 1887) wird der Thätigkeit Vega's mit Anerkennung gedacht.

entschloss er sich doch zum Verkauf und ging mit dem Officier in den Stall. Der Weg führte über einen Steg, der Müller ging hinterdrein. Da überfiel den Müller plötzlich der Gedanke, den Officier zu tödten. Er schlug ihn nieder und warf den Leichnam in die Donau. Nach diesem Geständniss büsste der Müller seine That am Galgen.

Damit sind wir am Ende eines thaten- und arbeitsreichen Lebens angelangt. Gewiss ginge man zu weit, wollte man sich dem Urtheile des Herzogs Ernst II. von Sachsen-Gotha anschliessen, der in seiner Verehrung für Vega den Ausspruch that: „Ich wusste es ja, dass Euler einen Nachfolger haben würde; Vega ist der wiedererstandene Euler.“ Aber durch die Herstellung seiner exacten Tabellenwerke und durch die Liebe und Begeisterung, mit der er für die mathematischen Studien eintrat, hat sich Vega unbestreitbare Verdienste erworben. Der Mann, der Jahre lang aus innerster Ueberzeugung die Verbreitung mathematischer Studien durch Wort und Schrift fördert und ihre Anwendung durch mühselige Rechnungen sicherstellt, der dann, obwohl über die erste Jugend schon hinaus, freiwillig die Feder mit dem Säbel vertauscht, um seine Kenntnisse praktisch zu erproben und der dem Vaterland durch seine persönlichen Eigenschaften unschätzbare Dienste leistet, der Mann zwingt uns auch als Mensch rückhaltlose Bewunderung ab.

---

# Recensionen.

**Hilfsbuch für die Ausführung elektrischer Messungen.** Von AD. HEYDWEILLER. Mit 58 Figuren im Text. Leipzig 1892. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 262 S.

Unter allen physikalischen Messmethoden haben in den letzten Jahrzehnten die elektrischen die grösste Durchbildung und Bereicherung erfahren, so dass es als ein Bedürfniss angesehen werden muss, dass dieselben zusammengestellt wurden. Die äussere Anordnung ist im Wesentlichen übereinstimmend mit derjenigen in Kohlrausch's Leitfaden der praktischen Physik. Da das vorliegende Buch hauptsächlich für Studirende berechnet ist, so dürfte es sich bei einer Neuauflage doch empfehlen, statt nur die Endformel anzugeben, ähnlich wie bei Kohlrausch noch Einiges über deren Ableitung mitzutheilen. Der Verfasser glaubte, davon absehen zu müssen, da er die Literaturnachweise sorgfältig mitgetheilt hat; indessen lehrt die Erfahrung, dass die jungen Leute unter solchen Umständen sich mit den Beobachtungen begnügen und die erhaltenen Werthe mechanisch in die vorgedruckte Formel einsetzen. Nach unserem Ermessen ist es auch eine grosse Zumuthung, alle die angeführten Literaturquellen erst einzusehen, was mit einem grossen Zeitverlust verbunden ist. Mit Rücksicht auf den genannten Leserkreis wäre es wünschenswerth, den Behauptungen auch eine kurze Begründung beizufügen, z. B. Seite 18 ist zu lesen: „In England wird die Fernrohrablesung weniger zweckmässig u. s. w."; hier fehlt dem Studirenden das „warum". Diese Wünsche führen wir nur an, um den unstreitig vorhandenen Werth dieses Buches bei einem Neudruck noch erhöht zu wissen.

B. NEBEL.

---

**Die Theorie der Beobachtungsfehler und die Methode der kleinsten Quadrate mit ihrer Anwendung auf die Geodäsie und die Wassermessungen.** Von OTTO KOLL. Mit in den Text gedruckten Figuren. Berlin 1893. Verlag von Julius Springer. 323 S. nebst zwei Bogen Formeln. Preis 10 Mk.

Das Werk ist ausschliesslich für Geometer bestimmt und sucht denselben die Arbeit thunlichst zu erleichtern. Um die Anwendung von Näherungsverfahren soviel wie möglich zu beschränken, ist der Verfasser bemüht, durch zweckmässige Anordnung die Methode der kleinsten Quadrate

auch in solchen Fällen anzuwenden, in denen dies bisher nicht üblich war. Erreicht wird dies durch die Aufstellung mechanischer Regeln und geeigneter Formulare. Diese können auch von Hilfskräften benützt werden, um den Geodäten von den oft umfangreichen Arbeiten zu entlasten. Die Hauptformeln sind daher auf zwei besonderen Bogen zusammengestellt worden, die nicht in das Werk hineingebunden werden sollen. Um jedem Fachmanne dieses Buch zugänglich zu machen, sind die theoretischen Ableitungen durch praktische Zahlenbeispiele ergänzt worden, so dass es jedem Geometer empfohlen werden kann.

B. Nebel.

---

**Lehrbuch der Experimentalphysik.** Von E. von Lommel. Mit 424 Figuren im Texte. Leipzig 1893. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 643 S. Preis 6 Mk. 40 Pf. geheftet und 7 Mk. 20 Pf. gebunden.

Die Anordnung des Stoffes ist übereinstimmend mit der an den deutschen Hochschulen üblichen Aufeinanderfolge der einzelnen Kapitel in der Experimentalphysik, weicht somit ab von dem Gange, wie ihn die meisten Physikbücher verfolgen. Damit das Buch einem grossen Leserkreise zugänglich wird, ist in dem Haupttext, der ein zusammenhängendes Ganzes bildet, die Mathematik auf ein Minimum beschränkt worden, während die eingestreuten, durch kleinen Druck äusserlich zu erkennenden Abschnitte auf die Entwickelungen und Beweise in elementarer Weise näher eingehen. Der Wichtigkeit entsprechend wird schon bei der Bewegung mit dem absoluten Maass-System begonnen, das sich dann, wie ein rother Faden, durch das ganze Buch hindurchzieht. Ueberall sind die Dimensionen angegeben, und die Einheiten, wo es erforderlich ist, tabellarisch zusammengestellt. Die Darstellung entspricht der historischen Entwickelung der Physik, die durch beigefügte Daten noch unterstützt wurde. — Weshalb bei den Dynamomaschinen deren Eintheilung nicht erwähnt worden ist, ist nicht ersichtlich. Die Maschinen haben sich auch Eingang in die physikalischen und chemischen Laboratorien verschafft, und ein junger Physiker und Chemiker muss wissen, dass z. B. zum Laden der Akkumulatoren und bei der Elektrolyse Nebenschlussmaschinen verwendet werden. Dass dies der Elektrotechnik und nicht der Physik angehöre, kann wohl nicht der Grund sein; denn wir finden Abschnitte über Kraftübertragung, Transformatoren, Drehströme und dergleichen. — In der Photometrie fanden wir nicht den Ersatz des Papierblattes mit dem Fettfleck durch den Lummer-Brodhun Glaswürfel, sowie die Amylacetatlampe; denn beide Gegenstände finden eine immer grössere Verbreitung und haben zu der genaueren Messung beigetragen. — Es ist sicher, dass dieses Buch Jedem, der es während seiner Studienzeit benutzt hat, auch ein treuer Berather durch das ganze Leben sein wird; es kann daher nur auf's Wärmste empfohlen werden.

B. Nebel.

**Theorie der optischen Instrumente nach Abbé.** Von Siegfried Czapski. Breslau 1893. Verlag von Eduard Trewendt. 292 S.

Aus dem grossen, zur Zeit noch im Entstehen begriffenen Handbuch der Physik von A. Winkelmann sind die Artikel über Dioptrik und die Theorie der optischen Instrumente vereinigt und in dem vorliegenden Buche zu einer besonderen Ausgabe abgedruckt worden. Wie schon aus den einzelnen Lieferungen des genannten Werkes ersichtlich war, ist die Darstellung auf die collineare Verwandtschaft der neueren (synthetischen) Geometrie basirt, deren Anwendung Abbé zuzuschreiben ist. Schon aus diesem Grunde erweckt dieses Buch Aller Interesse, denn wir sehen, wie sich die Optik auf einer viel allgemeineren Grundlage aufbauen lässt, als dies bisher der Fall war. Der innere Werth dieser Methode beruht aber darin, dass sie leichter und schneller die Verhältnisse beurtheilen lässt, unter welchen in einem Instrumente die Bilder zu Stande kommen, als dies nach den praktisch-rechnerischen Resultaten der bisherigen Behandlungsweise möglich ist. Der grosse Nutzen, welchen diese Methode dem Optiker darbietet, rechtfertigt daher in vollem Maasse den Sonderabdruck aus dem grossen Physikbuche. Während der Druck, insbesondere auch derjenige der Formeln, nichts zu wünschen übrig lässt, so kann dies leider nicht von vielen Holzschnitten gesagt werden, wo die Linien nicht rein sind. Der gediegene Inhalt des Buches mit der ausführlichen Literaturangabe empfiehlt das Buch von selbst.

B. Nebel.

---

**Notes on recent researches in electricity and magnetism intended as a sequel to Professor Clerk-Maxwell's treatise on electricity and magnetism** by J. J. Thomson. Oxford 1893. At the Clarendon press. 578 S.

Die bei der Besprechung der dritten Auflage von Maxwell's Elektricität und Magnetismus erwähnten Ergänzungen durch den Herausgeber J. J. Thomson sind in dem vorliegenden Bande enthalten, der als eine Fortsetzung des Maxwell'schen Werkes aufzufassen ist; denn er enthält die Neuerungen, die auf diesem Gebiete seit Maxwell's Tode zu verzeichnen sind. — Das erste Kapitel behandelt das elektrische Feld mit Hilfe der Faraday'schen Kraftröhren, eine Methode, die physikalisch-geometrischer Natur ist und den analytischen Charakter zurücktreten lässt. In dem zweiten Kapitel werden die Erscheinungen eingehend betrachtet, die bei dem Durchgange der Elektricität durch Gase auftreten. Das dritte Kapitel enthält eine Anwendung der Schwarz und Christoffel'schen Transformation auf Elektrostatik beziehungsweise die Condensatoren. Die Untersuchung über die elektrischen Wellen und Oscillationen, die bei Strömen in cylindrischen oder sphärischen Leitern auftreten, bildet den Inhalt des vierten Kapitels, während das fünfte ausschliesslich den Hertz-

schen Versuchen über elektromagnetische Wellen gewidmet ist. Das sechste Kapitel enthält einen Bericht über Lord Rayleigh's Untersuchungen der Gesetze, nach welchen sich Wechselströme in einem Netzwerk von Leitern vertheilen. In dem siebenten Kapitel findet sich eine Discussion der Gleichungen, welche man erhält, wenn ein Dielektricum in einem magnetischen Felde bewegt wird. Verfasser übergeht absichtlich die Untersuchungen über die magnetische Induction, weil dieselben in Professor Ewing's „Treatise on magnetic induction in iron and other metals" vollständig zu finden sind. In einem Anhange werden Untersuchungen über die Elektrolyse von Dämpfen mitgetheilt.

B. Nebel.

---

**Observatoire d'astronomie physique.** Le système du monde électro-dynamique, par Ch.-V. Zenger. Prag 1892. Selbstverlag. 24 S.

Der Inhalt besteht aus einer Reihe kleinerer Mittheilungen, die sich alle auf den Zusammenhang zwischen den atmosphärischen Bewegungen und denen des Erdinnern beziehen, die der Verfasser seit dem Jahre 1876 verfolgt.

B. Nebel.

---

**Derivation and discussion of the general solution for the current flowing in a circuit containing resistance, self-induction and capacity, with any impressed electromotive force.** By Frédérick Bedell and Albert C. Crehore. A paper presented at the General Meeting of the American Institute of Electrical Engineers, Chicago. Ill., June 7th, 1892.

Zuerst wird der Ausdruck abgeleitet, der die Stromstärke zu irgend einer Zeit in der allgemeinsten Form darstellt, und sodann die erhaltene Gleichung unter der Annahme von vier Arten elektromotorischer Kräfte eingehend discutirt.

B. Nebel.

---

**Raumlehre für höhere Schulen.** Von Prof. H. C. E. Martus, Director des Sophien-Realgymnasiums in Berlin. Zweiter Theil: Dreiecksrechnung und Körperlehre. Bielefeld und Leipzig 1892. Verlag von Velhagen & Klasing. 259 S. Preis geheftet 3 Mk. 50 Pf.

Den ersten Theil dieses Werkes „Ebene Figuren" haben wir schon im vorigen Jahrgange (S. 157) besprochen und dort seine Eigenheiten und Vorzüge angegeben, die auch diesem zweiten Theile in gleicher Weise anhaften, so die Vermeidung fremdsprachlicher Ausdrücke und deren Verdeutschung, die auch hier oft sehr glücklich gewählt ist. Jetzt wollen wir auf andere Vorzüge eingehen. Gleich auf der ersten Seite, wo es sich um die Erklärung der Winkelfunctionen handelt, erkennt man die hervorragende Darstellungsgabe des Verfassers. Man sieht das erfolgreiche Bemühen, durch Wort, Bild und praktische Beispiele eine Sache klar zu

machen, so sorgfältig, dass alsbald ein völliges Verstehen und Eindringen erzielt wird. Ueberhaupt ist kein wichtiger Satz, keine Aufgabe ohne ein sorgfältig ausgeführtes Zahlenbeispiel dahin gestellt. Für die Dreiecksrechnungen sind Beispiele gewählt, die der Verfasser selbst in Berlin und Potsdam ausgeführt hat. Mag auch für diejenigen, die die dortige Gegend nicht aus eigener Anschauung kennen, der Reiz dieser Aufgaben etwas geringer sein, so ist doch die Erkenntniss, wie solche Höhen und Entfernungen praktisch gemessen, und wie die Grundlagen für eine zuverlässige Karte gewonnen werden, höchst belehrend und anziehend. Auch ist der für die Winkelmessungen benutzte Theodolith abgebildet, was noch kein Lehrbuch der Trigonometrie für Schulen für nöthig erachtet hat. Ebenso finden sich in keinem Lehrbuche der Art wie hier die Grundlehren für die Darstellung von Schau- (das ist perspectivischen) Bildern. In den Lehrbüchern der Perspective werden sie für die Schule zu weitläufig dargestellt. Mit den drei hier angeführten Sätzen lassen sich alle Darstellungen ausführen, und die schönen Figuren dieses Buches sind nach diesen Sätzen gezeichnet. Sie ragen ebenso sehr durch die Sauberkeit der Ausführung, als auch durch Klarheit und namentlich durch mathematische Richtigkeit vor den Figuren vieler anderer Lehrbücher, die es hierin gar nicht genau nehmen, angenehm hervor. Der Lehrstoff und das Aufgabenmaterial ist sehr reich bemessen und kann nur mit Auswahl verwendet werden. In die Körperlehre ist auch die Lehre von den Kegelschnitten und die sphärische Trigonometrie in ziemlicher Vollständigkeit mit eingeschlossen. Ferner sind eingefügt Newton's Reihen, der Moivre'sche Satz und die Auflösung der Gleichungen dritten Grades. Das letzte Kapitel über schwerer zu behandelnde Körper enthält viele für den fortgeschrittenen Schüler interessante Einzelheiten. Unser Gesammturtheil: Das Lehrbuch von Martus gehört zu den besten seiner Art und nimmt unter diesen durch seine Eigenart einen hervorragenden Platz ein.

F. Schütte.

---

**Rechenbuch und geometrische Anschauungslehre**, zunächst für die drei unteren Gymnasialklassen. Von Prof. Dr. B. Féaux, Oberlehrer am Gymnasium zu Arnsberg. Neunte, verbesserte Auflage besorgt durch Fr. Busch, Oberlehrer am Gymnasium zu Arnsberg. Paderborn 1892. Verlag von Ferdinand Schöningh. 214 S. Preis geh. 1 Mk. 20 Pf.

Schon der Umstand, dass dieses so ganz aus dem praktischen Unterrichte herausgewachsene und fortwährend in ihm gross gewordene Buch jetzt in neunter Auflage vorliegt, ist eine genügende Empfehlung für seine Brauchbarkeit, so dass es einer weiteren nicht bedarf. Aenderungen gegen die frühere Auflage sind folgende eingetreten. Der letzte Rest des älteren Maass- und Gewichtssystems ist entfernt worden; einige neue Aufgaben sind eingefügt und schwierigere älterere sind entfernt. Der Abschnitt

über die Zahlensysteme ist gefallen; andere Abschnitte haben durch eine kleine Verschiebung bessere Anordnung erhalten; das abgekürzte Rechnen mit Decimalbrüchen ist ausführlicher behandelt worden. — Möge das durchaus bewährte Buch auch weiterhin günstige Aufnahme und Verbreitung finden.

F. Schütte.

---

**Die wichtigeren Dreiecksaufgaben aus der ebenen Trigonometrie.** Für den Schulgebrauch und zum Selbststudium zusammengestellt und aufgelöst von Waldemar Madel. Berlin 1892. Verlag von Max Rüger. 64 S. Preis broch. 1 Mk. 80 Pf.

Vorliegende Sammlung enthält 305 Dreiecksaufgaben, geordnet nach den gegebenen Stücken und der Schwierigkeit nebst deren Lösungen, und verfolgt den Zweck, den Schülern eine Anleitung zu geben, wie sie bei der Auflösung derartiger Aufgaben zu verfahren haben. Die Lösungen sind jedoch so flott scizzirt, dass die selbständige Arbeit des Schülers nicht überflüssig wird. Bei ihnen ist die höchst beachtenswerthe Methode befolgt, gegen die Schüler oft fehlen, dass zuerst die Winkel und dann die Seiten des Dreieckes berechnet werden. Dadurch, und indem die Formeln für die halben Winkel bevorzugt wurden, ist der Verfasser fast immer zu eleganten, ja man kann sagen den elegantesten Lösungen gelangt. Unter den gegebenen Stücken lässt Verfasser die Mittellinien und Winkelhalbirer nicht auftreten, wohl mit Absicht; dagegen sind viele höchst interessante Aufgaben vorhanden, in denen die Radien der drei angeschriebenen Kreise vorkommen, und die oft zu sehr hübschen Lösungen führen.

F. Schütte.

---

**Lehrbuch der Elementar-Geometrie.** Von Dr. E. Glinzer, Lehrer der allgemeinen Gewerbeschule und der Schule für Bauhandwerker in Hamburg. Zweiter Theil: Stereometrie. Mit 142 Figuren und einer Sammlung von 260 Aufgaben. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Dresden 1892. Verlag von Gerhard Kühtmann. 148 S. Preis geh. 2 Mk. 80 Pf.

Die frühere Auflage und der erste Theil dieses Lehrbuches sind schon in dieser Zeitschrift sehr anerkennend besprochen worden. Hervorgehoben wurde die präcise Darstellung, der Geist einer gesunden Praxis, der wie ein belebender Hauch empfunden wird, die Schönheit der Aufgaben, die vorzügliche Ausstattung. Diese neue Auflage hat nur wenige Veränderungen erfahren: Kleine Zusätze und Verbesserungen wurden aufgenommen; die Zahl der Aufgaben ist etwas erweitert und zwar durch solche, die den praktischen Gewerben entnommen sind, und einigen ist die Auflösung beigefügt; einige Figuren sind neu erstanden; die Hinweisungen sind mit der neuen Auflage der Planimetrie in Einklang gebracht; die Rechtschreibung ist die neue geworden; endlich ist das Format vergrössert worden. Möge das Buch auch weiterhin wohlwollende Aufnahme finden!

F. Schütte.

**Leitfaden für den stereometrischen Unterricht** an Realschulen von Dr. HERMANN WEHNER, Lehrer an der städtischen Realschule zu Plauen i. V. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1892. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 54 S.

Der vorliegende Leitfaden soll ein Hilfsmittel für den stereometrischen Unterricht in den ersten Klassen einer Realschule sein, da die meisten Lehrbücher der Stereometrie, für Gymnasien und Oberrealschulen geschrieben, den Stoff in zu grossem Umfange und in zu schwieriger Form liefern. Daher ist hier der ganze Lehrstoff auf 39 Seiten, der Uebungsstoff auf 14 Seiten zusammengedrängt. Dabei ist es dem Verfasser gelungen, doch ein abgerundetes Ganze zu liefern, so dass er nicht „Bruchstücke“ einem grösseren Bauwerk entlehnt“ vorführt, sondern „ein kleines, hübsches Gebäude, dass mit geringen Mitteln errichtet ist“. Dies gelang durch kurze, klare Fassung, durch Ausscheidung alles überflüssigen Stoffes, durch Beschränkung der Körperlehre auf die einfachsten Eigenschaften und, worauf es hauptsächlich hinaus soll, auf die Berechnung der Oberfläche und des Inhaltes. Die Beweise sind einfach, wenn auch, wie der Verfasser selbst gesteht, nicht immer strenge. So stützt sich die Inhaltsberechnung meist auf den Cavallieri'schen Satz. Die Angabe auf dem Titel „mit zahlreichen Figuren“ ist etwas Reklame, im Uebrigen ist aber die Ausstattung, der Druck etc. hervorragend schön.

F. SCHÜTTE.

---

**Lehrbuch der elementaren Geometrie** für Gymnasien und Realschulen bearbeitet von F. J. BROCKMANN, vorm. Oberlehrer am königl. Gymnasium zu Cleve. Zweiter Theil: Die Stereometrie. Zweite, revidirte Auflage mit 84 Figuren in Holzschnitt. Leipzig 1892. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 144 S. Preis kart. 1 Mk. 80 Pf.

Inhalt und Einrichtung dieses Werkes weichen von der üblichen Darstellung kaum ab, so dass hierüber nicht viel zu sagen wäre. Das Schlusskapitel bildet eine systematische Zusammenstellung von Uebungslehrsätzen und Aufgaben, theils mit Lösung, theils mit Andeutung zur Lösung. Diese neue zweite Auflage unterscheidet sich von der 1874 erschienenen ersten nur wenig „da — wie die Vorrede selbst sagt — dieselbe in Anordnung des Stoffes und im Vortrage desselben nach dem übereinstimmenden Urtheil der Presse von den verschiedensten Seiten als im Ganzen richtig und bewährt gelten darf“. Hinzugefügt ist, wir wollen es lobend anerkennen, die Theorie der Sternpolyeder, was wegen des höchst interessanten Stoffes und der innigen Beziehung zu den gewöhnlichen Polyedern hinreichend begründet ist. Der Verfasser musste aber, da wohl wenige Anstalten sich eines Modelles dieser Körper erfreuen, Zeichnungen der Sternpolyeder beigeben, denn nach den gegebenen Beschreibungen können

die Schüler sich keine Vorstellung von ihnen machen. Die Orthogonalprojectionen der Sternpolyeder sind nicht schwer zu zeichnen. Allerdings scheint nach den in vorliegendem Buche vorhandenen Proben das richtige Entwerfen stereometrischer Figuren nicht eine starke Seite des Herrn Verfassers zu sein. Die Figuren sind nämlich ohne ein erkennbares Princip gezeichnet, man weiss nicht ob Orthogonal-, Parallel- oder Centralprojection angewandt ist. Zwar die einfacheren Figuren verrathen dieses nicht, untersucht man aber die etwas complicirteren Figuren, so findet man die merkwürdigsten Widersprüche mit den einfachsten Gesetzen der darstellenden Geometrie. Gleich die Fig. 1 ist fehlerhaft, indem Linien, die nothwendig parallel sein müssten, convergent gezeichnet sind. Bei der höchst einfachen Zeichnung eines regulären Tetraeders oder Oktaeders wird ausser Acht gelassen, dass Linien, die gegen die Projectionsebene geneigt sind, sich verkürzen, und nun erst die Zeichnung des Ikosaeders und Dodekaeders! Gerne wollen wir zugestehen, dass im Uebrigen die Figuren recht sauber ausgeführt sind und z. B. nicht den Fehler vieler anderer Lehrbücher zeigen, dass statt einer Ellipse ein aus Kreisbogen gebildetes Zweieck erscheint. Wann wird doch dieser Fehler aus den Lehrbüchern endlich verschwinden? Wie mag einer, der Stereometrie lehren will und sich sogar zur Herausgabe eines Lehrbuches versteigt, so gegen einen der wichtigsten Zweige dieser Wissenschaft sich versündigen. Sollte den Herausgebern die Perspective unbekannt sein??

F. Schütte.

---

**Lehrbuch der ebenen Geometrie** für höhere Schulen. Von H. Bensemann, Gymnasiallehrer in Cöthen. Dessau 1892. Verlag von Paul Baumann. 118 S. Preis 1 Mk. 60 Pf.

Eine glückliche Verschmelzung der alt hergebrachten Form mit der den Unterricht so sehr belebenden heuristisch-analytischen Lehrform ist es vor Allem, was dieses Lehrbuch vor vielen anderen vortheilhaft unterscheidet. Beziehungen an den Figuren und Sätze werden erst dann untersucht, nachdem gezeigt ist, dass jene Beziehungen und derartige Figuren auch wirklich construirt werden können. Eine Constructionsaufgabe bildet also das Fundament; die durch Construction an der Figur hergestellten Eigenschaften bilden die Voraussetzung; die Behauptung wird durch eine Frage ersetzt, die Frage wird untersucht und als Ergebniss der Untersuchung erscheint am Schlusse der Lehrsatz. Ein zweiter Vorzug, durch den dieses Büchlein sich ebenfalls vor anderen auszeichnet, und der sozusagen als Folge des erstgenannten sich ergiebt, ist die richtige Darstellung der Parallelen-Theorie. Während Viele als parallel solche Geraden definiren, die sich nie schneiden, ohne nachzuweisen, dass es auch solche Geraden giebt, wird hier zunächst der Satz von der Winkelsumme des Dreiecks vorgenommen. Erst später bei der Lehre vom Viereck erscheinen

die Sätze über Parallele. Sehr zweckmässig beginnt unser Büchlein mit einem Vorcursus, worin die einfachsten Constructionsaufgaben rein praktisch, z. B. die Winkeltheilung mittelst des Transporteurs, gelöst werden; dann folgt zunächst das gleichschenkelige, dann das ungleichseitige Dreieck. Lobend hervorgehoben zu werden verdient das Kapitel „Zusammenhang zwischen Planimetrie und Arithmetik“, sowie die Kreisberechnung, wo das Verfahren $\pi$ zu berechnen sich durch Einfachheit und Kürze auszeichnet. Knappe und klare Darstellung, die überall das wirklich brauchbare und namentlich das für Aufgaben Wichtige heraushebt, zeichnet auch das ganze Büchlein aus. Die reichlich beigegebenen Figuren sind sauber, Druck und Papier gut.

F. Schütte.

---

**Ebene Geometrie**, Lehrbuch mit systematisch geordneter Aufgabensammlung für Schulen und zum Selbststudium. Von Dr. Georg Recknagel, Professor der Mathematik und Physik am königl. Realgymnasium zu Augsburg. Vierte verbesserte Auflage. München 1892. Verlag von Theodor Ackermann. 214 S.

Während man auf allen Gebieten, so auch in der Mathematik sich bemüht, die unnöthigen Fremdwörter auszumerzen, scheint der Verfasser dieses Lehrbuches die entgegengesetzte Richtung zu vertreten. Für denselben Begriff braucht er z. B. auf Seite 45 die Worte Vieleck, $n$-Eck, und Polygon, um später das letztere zu bevorzugen; den Umfang einer Figur nennt er Perimeter, für umfangsgleich gebraucht er isoperimetrisch. Dieses herrliche Wort gefällt ihm so sehr, dass er sogar isoperimetrische Sätze kennt und diesen ein besonderes Kapitel widmet. Den Kreisumfang dagegen nennt er wie andere Sterbliche auch Peripherie, und die Lehre vom Kreise Cyklometrie. Längenstücke heissen bei ihm Dimensionen. Häufig kommt es vor, dass auf derselben Seite, ja in demselben Satze für ein und denselben Begriff verschiedene Ausdrücke gebraucht werden, so Basis und Grundlinie, Radius und Halbmesser, Rhombus und Raute. Der Umfang des Lehrstoffes ist ungemein reich bemessen und die Ausführungen oft sehr umständlich; vieles ist sowohl für den theoretischen Aufbau, als auch für die Lösung von Aufgaben überflüssig. Als verfehlt müssen wir den Versuch ansehen, zu Anfang die geometrischen Grundbegriffe anders als auf rein praktischem Wege, durch philosophische Auseinandersetzungen zu erläutern. Was die Anordnung des Stoffes angeht, so sollten die Aufgaben und die neu hinzugekommenen Theile aus der neueren Geometrie nicht beliebig als Anhang irgendwo hingestellt, sondern organisch mit dem Uebrigen verknüpft werden. Die Anleitung zur Auflösung von Aufgaben steht nicht auf der Höhe der Zeit. Der Druck ist nicht frei von Fehlern, namentlich ist die neue Rechtschreibung nicht gleichmässig befolgt. Die Figuren sind spärlich.

F. Schütte.

**Leitfaden der Elementar-Mathematik.** Herausgegeben von Professor Dr. H. LIEBER, Oberlehrer am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium zu Stettin und F. VON LÜHMANN, Oberlehrer am Gymnasium in Königsberg in der Neumark. Berlin 1892. Verlag von Leonh. Simion. Erster Theil: Planimetrie. Mit sieben Figurentafeln. Achte Auflage. 124 S. 8⁰. Preis 1 Mk. 80 Pf. Dritter Theil: Ebene Trigonometrie, Stereometrie, Sphärische Trigonometrie. Mit drei Figurentafeln. Sechste Auflage. Preis 1 Mk. 50 Pf.

Beide Theile haben in diesen neuen Auflagen wesentliche Erweiterungen erfahren. In den ersten Theil sind entsprechend den neuen Lehrplänen der Coordinatenbegriff und einige Grundlehren von den Kegelschnitten aufgenommen und dementsprechend ist eine siebente lithographirte Tafel hinten beigefügt. Nach Inhalt, Umfang und Darstellung weicht die hier gegebene Erweiterung kaum von ähnlichen kleineren Arbeiten, die denselben Zweck verfolgen, ab. Der dritte Theil ist durch einen propädeutischen Unterricht in der Körperlehre vermehrt worden, und dafür ebenfalls eine dritte Tafel mit stereometrischen Figuren hinzugefügt. Die beiden anderen Tafeln hätten auch wohl einer Erneuerung bedurft, da die Figuren auf ihnen mancherlei Fehler in der Zeichnung aufweisen. Was nun die genannte Erweiterung betrifft, so soll sie ebenfalls den neuen Bestimmungen entsprechen, den Schülern der Untersecunda eine Kenntniss der einfachsten Körperberechnung zu verschaffen. Daher tritt die Berechnung der Oberfläche und des Inhaltes der Körper in den Vordergrund. Die Formeln sind aber nicht blos angegeben, sondern auch begründet und zwar theilweise mit Hilfe des Grundsatzes von Cavallieri (hier Cavaleri genannt), wodurch z. B. der Inhalt der Pyramide (ohne die Zerlegung des dreiseitigen Prismas) auf eine sehr hübsche Weise abgeleitet wird.

F. SCHÜTTE.

---

H. SCHEFFLER, **Beleuchtung und Beweis eines Satzes aus Legendre's Zahlentheorie.** Leipzig 1893. Foerster. 40 S.

Legendre hat in seiner Zahlentheorie (Bd. II S. 76, 1830) einen sehr bemerkenswerthen Lehrsatz ausgesprochen, für denselben aber einen Beweis geliefert, der offenbar unzureichend ist. Deshalb stellte die Pariser Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1858 die Preisaufgabe, Legendre's Satz für die Fälle, wo er zuträfe, streng zu beweisen. Der Satz lautet:

Ist eine Folge von $k$ beliebigen ungeraden Primzahlen $p_1, \ldots p_k$ gegeben, und versteht man unter $\pi_i$ das $i^{\text{te}}$ Glied in der natürlichen Reihe der Primzahlen 3, 5, 7, ..., so giebt es unter $\pi_{k-1}$ aufeinander folgenden Gliedern einer arithmetischen Progression, wo Anfangsglied und Differenz relativ prim sind, mindestens eines, das durch keine der Primzahlen $p_1, \ldots p_k$ theilbar ist.

Die Preisaufgabe fand drei Bearbeitungen, von denen aber keine des Preises würdig befunden wurde. Nur die Bearbeitung von Herrn Dupré enthielt ein Resultat, das die Commission besonders hervorhob.

Verfasser stellt sich die Aufgabe, diese Lücke auszufüllen. Er sucht den Beweis des Legendre'schen Satzes, nach dem Vorgange des französischen Mathematikers, auf den Beweis eines anderen zurückzuführen. Dieser andere stellt sich als eine Erweiterung eines Satzes von Tchebichef dar. Tchebichef's Satz sagt aus, dass zwischen $p$ und $2p-2$ mindestens eine Primzahl liegt; und hieraus ergiebt sich zunächst, wie Verfasser nachzuweisen sucht, dass unter $\pi_k$ aufeinander folgenden Gliedern der arithmetischen Progression mindestens eines existirt, welches durch keine der Primzahlen $p_1, \ldots p_k$ theilbar ist. Legendre's Theorem verlangt aber mehr; es verlangt nach dem Verfasser den Beweis des Satzes, dass zwischen $p$ excl. und $2p+1$ incl. mindestens zwei Primzahlen liegen, und das ist die Ergänzung, welche Tchebichef's Satz erfährt. Den Beweis hierfür führt Verfasser analog demjenigen, welchen der russische Mathematiker für seinen Satz gegeben.

Diesen Hilfssatz hatte Legendre, gestützt auf dessen Giltigkeit bei den ersten Primzahlen, als einen selbstverständlichen Grundsatz betrachtet.

Ein Anhang handelt noch von der „Sichtung der Zahlen nach ihrer Zusammensetzung".

JAHNKE.

---

G. SPECKMANN, **Beiträge zur Zahlentheorie.** Oldenburg 1893. Eschen und Fasting. 64 S.

Es sind eine Reihe kurzer Bemerkungen, unter denen die zweite durch ihren Titel das besondere Interesse wachruft. Der Verfasser versucht hier, auf drei Seiten, einen neuen Beweis für den zuerst von Dirichlet bewiesenen Satz, dass jede unendliche arithmetische Reihe, in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremde ganze Zahlen sind, unendlich viele Primzahlen enthält. Indessen, es wird nur gezeigt, dass jede Reihe der vorgeschriebenen Art unendlich viele Zahlen der Form $6n \mp 1$ enthält. In einer folgenden Notiz verspricht der Verfasser eine neue Lösung eines anderen vielumworbenen Problems zu geben: die Anzahl der in der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis $m$ enthaltenen Primzahlen zu bestimmen und diese Primzahlen selber zu ermitteln. Referent hat jedoch eine solche Lösung vergebens gesucht.

JAHNKE.

---

G. HEINITZ, **Elementare Berechnung der Zahl $\mu$, welche den quadratischen Restcharakter bestimmt.** Inaugural-Dissertation. Göttingen 1893.

Gauss führt in seinem dritten Beweise für das Reciprocitätsgesetz der quadratischen Reste eine Zahl $\mu$ ein, die allein durch ihre Eigenschaft, gerade oder ungerade zu sein, den quadratischen Restcharakter bestimmt. Eine genaue Bestimmung des Werthes der Zahl $\mu$ wird daselbst nicht ver-

sucht. Daher ist Gauss genöthigt, neben $\mu$ eine zweite analoge Zahl $\mu'$ einzuführen. Letztere wird aber entbehrlich, sobald der Werth von $\mu$ in geschlossener Form vorliegt. Herrn Zeller verdankt man die ersten Regeln zur Herleitung dieses Werthes. Später hat Herr Schering allgemeine Beziehungen aufgestellt, in denen die Zeller'schen als Specialfall enthalten sind. Die vorliegende Dissertation bietet eine elementare, auf blossem Abzählen beruhende Berechnung des Werthes von $\mu$, wobei nur der Begriff der Congruenz vorausgesetzt wird.

Wenn

$$x^2 \equiv q \,(mod\, p)$$

gegeben ist, so besteht ein enger Zusammenhang dieser quadratischen Congruenz mit den linearen Congruenzen:

$$l \,.\, q \equiv c \,(mod\, p), \quad l = 1,\ 2, \ldots \frac{p-1}{2}.$$

$\mu$ bezeichnet hier die Anzahl der negativen unter den Grössen $c$. Der Verfasser führt behufs der Abzählung eine neue Reihenfolge ein, indem er nicht wie Gauss nach dem Coefficienten von $q$, sondern nach den Werthen zählt, welche die Zahlen $c$ erhalten. Wenn dann

$$i \equiv b_i q \,(mod\, p), \quad i = 1,\ 2, \ldots \frac{p-1}{2},$$

so besteht die Aufgabe darin, die Anzahl der negativen Zahlen unter den $b_i$ aus den Werthen $p$ und $q$ zu berechnen. Die Lösbarkeit dieser Aufgabe beruht auf einer gewissen Gesetzmässigkeit, die sich in der Aufeinanderfolge der Vorzeichen der Coefficienten $b$ herausstellt.

Die Berechnung gilt für den Fall, dass $p$ und $q$ positive ungerade Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind.

JAHNKE.

---

J. BERGBOHM, 1. **Neue Rechnungsmethoden der höheren Mathematik**, 1891, 30 S.; 2. **Neue Integrationsmethoden auf Grund der Potenzial-, Logarithmal- und Numeralrechnung**, Stuttgart 1892, 58 S., Selbstverlag; 3. **Entwurf einer neuen Integralrechnung auf Grund der Potenzial-, Logarithmal- und Numeralrechnung**: I. Die rationalen algebraischen und die goniometrischen Integrale, 1892, 66 S.; 4. **Entwurf einer neuen Integralrechnung auf Grund der Potenzial-, Logarithmal- und Numeralrechnung**: II. Die irrationalen, exponentiellen, logarithmischen und cyklometrischen Integrale, Leipzig 1893, 122 S., B. G. Teubner.

Anlass zu Erweiterungen der Analysis liegt vor, wenn eine neue Rechnungsmethode gefunden ist, mit deren Hilfe sich eine Reihe neuer, vielumworbener Probleme lösen lässt, oder mindestens schon gelöste Probleme eine überraschend einfache Lösung finden. Diese Forderung ist auch angesichts der neuen Rechnungsarten zu erheben, welche in der ersten der

vorliegenden Arbeiten zur Einführung in die Analysis vorgeschlagen werden: Es sind die Immensalrechnung, welche die unendlich grossen Grössen, ähnlich wie die Differentialrechnung die unendlich kleinen Grössen zum Gegenstande hat, ferner die Potenzial-, Radical-, Logarithmal- und Numeralrechnung, welche sich dem Verfasser durch Ausdehnung der Potenzen- und Logarithmenrechnung auf die Analysis des Unendlichen ergeben.

In der ersten Arbeit beschränkt sich der Verfasser darauf, die wichtigsten Formeln dieser Rechnungsmethoden zu entwickeln.

Die drei folgenden Arbeiten sind einer Darlegung der Vortheile gewidmet, welche sich aus den neuen Rechnungsmethoden für die Integralrechnung ergeben sollen, ein Gebiet, das dem Verfasser „seit jeher als besonders reformbedürftig erschien". Als Ziel schwebt dem Verfasser eine allgemeine Integrationsmethode vor, welche erlaubt, die Integrale unmittelbar aus den Differentialen durch Rechnung abzuleiten, im Wesentlichen also eine rückwärts schreitende, eine negative Differentiation, wie sie schon mehrfach versucht worden ist, so zwar, dass „bei jedem Differential, welches der Integration in einem geschlossenen Ausdruck fähig ist, diese Operation wirklich vollzogen, bei jedem Differential dagegen, welches die Integration in einem geschlossenen Ausdruck nicht zulässt, der Grund dieser Unmöglichkeit klar erkannt werden kann".

Während sich die zweite Arbeit vornehmlich mit principiellen Fragen befasst, wird in der dritten und vierten Arbeit die Integrationsmethode an zahlreichen Beispielen erläutert. Wenn sich auch Integrale finden, die theils neu, theils allgemeiner als sonst gefasst sind, so führt doch die neue Integrationsmethode schon bei den einfachsten Beispielen zu einer Weitläufigkeit der Entwickelungen, die es zweifelhaft erscheinen lassen, ob dieser neue Kalkül geeignet ist, in den Kanon der mathematischen Erkenntnisse aufgenommen zu werden. Zudem wäre der Nachweis noch zu erbringen, dass die neuen Methoden den Zugang zu Problemen ermöglichen, welche den bisherigen Methoden unüberwindliche Schwierigkeiten darzubieten scheinen.

Jahnke.

---

Lothar Heffter, **Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen.** Leipzig 1894. B. G. Teubner. 8$^{0}$. XIV und 258 S.

Trotzdem die Theorie der linearen Differentialgleichungen nun schon seit geraumer Zeit in ihren Hauptzügen feststeht, existirte bisher kein in dieselbe einführendes Lehrbuch; denn Craig's „Treatise on Linear Differential Equations" giebt zwar eine Zusammenstellung der wichtigeren Theile des Materials, verzichtet jedoch auf eine einheitliche Darstellung, wie sie gefordert werden muss. Es ist daher mit Freuden zu begrüssen, dass diese wohl allseitig empfundene Lücke in der mathematischen Literatur durch das vorliegende Buch ausgefüllt und, wie wir gleich bemerken wollen, innerhalb der Grenzen, die sich der Verfasser gesteckt hat, unseres Erachtens in vor-

trefflicher Weise ausgefüllt wird. Sein Buch, das nur zur Einführung in die genannte Theorie dienen soll, beschränkt sich im Wesentlichen darauf, die allgemeinen Grundlagen derselben für lineare Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten zu geben; diesen Stoff aber behandelt es in durchaus selbständiger und pädagogisch sehr zweckmässiger Weise.

In einer kurzen Einleitung wird Gegenstand und Ziel der Untersuchung genau bestimmt und für den zusammenhängenden Bereich, in dem sämmtliche Coefficienten der Differentialgleichung

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

definirt sind, der Name „Gebiet der Differentialgleichung" eingeführt. Unter der beschränkenden Annahme, dass die Coefficienten in diesem Gebiet endliche, eindeutige und stetige analytische Functionen seien, werden alsdann die singulären Punkte der Differentialgleichung aus der Beschaffenheit der Coefficienten selbst definirt und, je nachdem sie dem Gebiet der Differentialgleichung angehören oder nicht, als ausserwesentlich und wesentlich singuläre Punkte unterschieden. Doch zeigt sich bald, dass noch eine weitere, alle regulären* und singulären Stellen umfassende Eintheilung in Stellen der Bestimmtheit bezw. der Unbestimmtheit nothwendig wird, je nachdem bei ihnen der Grad der determinirenden Gleichung gleich oder $< n$ ist. Hiernach gliedert sich das Buch, abgesehen von den letzten beiden Kapiteln, in zwei Hauptabschnitte, deren erster (Kap. I—X) den Stellen der Bestimmtheit, deren zweiter (Kap. XI—XIII) den Stellen der Unbestimmtheit gewidmet ist. Indem der Verfasser sofort alle Stellen der Bestimmtheit in Betracht zieht, gewinnt er einmal den Vortheil, für reguläre Stellen keine besondere Untersuchung anstellen zu müssen, dann aber wird durch die vorläufige Beschränkung auf diese Stellen allein dem Leser der Eingang in die Theorie bedeutend erleichtert.

Die ersten drei Kapitel liefern den Beweis für die Existenz eines Integrals. Die Beschaffenheit der Coefficienten der Differentialgleichung rechtfertigt den Versuch, auch ein Integral bei einer beliebigen Stelle in Form einer Potenzreihe anzusetzen. Um aber für die Coefficienten dieser Reihe eine brauchbare Recursionsformel zu erhalten, muss vorausgesetzt werden, dass die betrachtete Stelle nicht wesentlich singulär sei, und dass die zu bildende Reihe sich bei ihr bestimmt verhalte, d. h. höchstens in Richtung der wachsenden Exponenten ins Unendliche gehe. Unter dieser Voraussetzung gelingt die formale Herstellung der Integralreihe, und es zeigt sich zugleich, dass sie im Fuchs'schen Sinne zu einer Wurzel der determinirenden Gleichung gehören muss. — Der letztere Umstand führt zu der vom Verfasser zum ersten Mal aufgeworfenen Frage, wann auch umgekehrt zu einer Wurzel der determinirenden Gleichung eine Reihe gehört, die im zweiten Kapitel beantwortet wird. Die

* Die Bezeichnung „regulär" wird immer in dem von Weierstrass eingeführten Sinne gebraucht.

Wurzeln dieser Gleichung werden in bekannter Weise in Gruppen eingetheilt und die gesuchten Kriterien in dem Verschwinden von sehr übersichtlich gebildeten Determinanten gefunden, wobei auch alle in der Reihe willkürlich bleibenden Coefficienten bekannt werden. — Falls die betrachtete Stelle eine Stelle der Bestimmtheit ist, gelingt für solche Reihen der Convergenzbeweis, der die beiden Fuchs'schen Beweise elegant in einen einzigen zusammenzieht und vereinfacht.

Nachdem so die Existenz von unendlich vielen Integralen nachgewiesen ist, muss ermittelt werden, ob und welche Beziehungen zwischen denselben stattfinden (Kap. IV—VI). Dabei gelangt man zum Begriff und zu den Eigenschaften eines Fundamentalsystems von Integralen. Und da sich auch die Integration einer nicht homogenen linearen Differentialgleichung stets auf diejenige einer homogenen zurückführen lässt, so ergiebt sich für alle linearen Differentialgleichungen als nächstes Problem die Aufstellung eines Fundamentalsystems. — Für reguläre Stellen erhält man ein solches unmittelbar in Form von $n$ gewöhnlichen Potenzreihen, während die Frage, ob auch umgekehrt $n$ linear unabhängige reguläre Integrale eine Stelle als regulär charakterisiren, zur Betrachtung der scheinbar singulären Punkte führt. — Wenn man nun aber für jede reguläre Stelle ein Fundamentalsystem angeben kann, so muss der Zusammenhang zwischen zwei solchen Fundamentalsystemen festgestellt werden. Man findet ihn durch die analytische Fortsetzung der Integrale und kommt dabei zum Begriff des monogenen Gebildes der Integralfunction und zur Definition der Gruppe der Differentialgleichung.

Der Fortgang der Untersuchung führt zu den singulären Stellen der Bestimmtheit (Kap. VII—X), in deren Umgebung ein Fundamentalsystem nach der Fuchs'schen Methode aufgestellt und in Gruppen von Integralen eingetheilt wird. Die Bedingungen für den speciellen Fall, dass eine ganze Integralgruppe logarithmenfrei sei, können direct dem zweiten Kapitel entnommen werden. Die Form der Umlaufsrelationen für ein solches Fundamentalsystem im allgemeinen Falle erhält der Verfasser auf einfache Weise, indem er den Begriff des „Gehörens einer Function zu einer Zahl" auf logarithmenbehaftete Integrale ausdehnt und weitergehend, als es bisher anderswo geschehen, in folgender Weise definirt: das Integral

$$y = \psi_0 + \psi_1 \log x + \cdots + \psi_{\sigma-1} \log^{\sigma-1} x$$

(das der Verfasser als Integral $\sigma^{\text{ter}}$ Stufe bezeichnet) gehört bei $x=0$ zu dem an $\gamma^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Exponenten $\varrho$, wenn $\psi_0 x^{-\varrho}$, $\psi_1 x^{-\varrho}, \ldots, \psi_{\sigma-1} x^{-\varrho}$ gewöhnliche Potenzreihen sind und das constante Glied in $\psi_{\gamma-1} x^{-\varrho}$ von Null verschieden, in $\psi_\gamma x^{-\varrho}$, $\psi_{\gamma+1} x^{-\varrho}, \ldots \psi_{\sigma-1} x^{-\varrho}$ aber gleich Null ist. — Der Verfasser nimmt dann im achten Kapitel die Untersuchung der logarithmenbehafteten Integrale nochmals nach einer anderen Methode auf, die sich eng an diejenige der ersten Kapitel anschliesst, und *findet* für alle in $y$ auftretenden Reihen $\psi$ Recursionsformeln, die sich direct

aus derjenigen für Integrale erster Stufe durch einen Differentiationsprocess herleiten lassen. Er gelangt so unmittelbar zu den von Frobenius auf anderem Wege ermittelten Beziehungen zwischen den Reihen $\psi$ eines Integrals $\sigma^{ter}$ Stufe und zu den Bedingungen dafür, dass die Differentialgleichung durch ein solches Integral befriedigt werde. Aus diesen Bedingungen ergiebt sich für das allgemeinste Integral $\sigma^{ter}$ Stufe in einer Gruppe das interessante Resultat, dass in der Reihe $\psi_0$ desselben die Coefficienten derjenigen Potenzen von $x$ willkürlich bleiben, welche Anfangspotenzen von Integralen erster Stufe sein können, in $\psi_1$ die Coefficienten derjenigen Potenzen von $x$, welche Anfangspotenzen der mit $\log x$ multiplicirten Reihe in Integralen zweiter Stufe sein können u. s. w. Hiernach ist es möglich, das allgemeinste Integral einer Gruppe aufzustellen, und gewiss wird mancher Leser des Buches bedauern, dass der Verfasser darauf verzichtet hat, seine Untersuchungen in Analogie mit denjenigen des zweiten Kapitels noch weiter zu führen und die Frage zu beantworten, wann das einfachste zu einer bestimmten Wurzel der determinirenden Gleichung gehörige Integral von der zweiten bezw. dritten u. s. w. Stufe ist. — Die Aufstellung der Untergruppen, deren Definition, wie beiläufig bemerkt werden mag, bei ihrer Einführung nicht präcis genug gefasst ist, erfolgt nach Jürgens und wird dadurch praktisch ausführbar, dass das allgemeinste Integral einer Gruppe schon vorher bekannt ist. Aus den Jürgens'schen werden die Hamburger'schen Untergruppen hergeleitet und dann die Bedingungen dafür angegeben, dass sämmtliche Integrale einer Gruppe eine einzige Untergruppe bilden. — Den Abschluss der Untersuchungen über Stellen der Bestimmtheit bringt der sich durch die Ergebnisse des achten Kapitels sehr einfach gestaltende Beweis des Fuchs'schen Satzes, dass jede Stelle, an der sich sämmtliche Integrale bestimmt verhalten, eine Stelle der Bestimmtheit ist, wodurch dieser Name nun seine volle Berechtigung erhält.

Jetzt erst, wo sich die Untersuchung den Stellen der Unbestimmtheit oder allgemeiner den innerhalb eines Kreisrings giltigen Integralen zuwendet (Kap. XI—XIII), erscheint die Fundamentalgleichung. Ihre charakteristischen Eigenschaften werden aufgesucht und, da sie sich für jede Stelle bilden lässt, wird für Stellen der Bestimmtheit ihre Beziehung zur determinirenden Gleichung festgestellt, wobei sich sofort der Zusammenhang der Gruppen und Untergruppen eines Fundamentalsystems mit den Linear- und Elementartheilern der zugehörigen Fundamentalgleichung ergiebt. — Damit ist ein werthvoller Fingerzeig für die Folge gewonnen. Es zeigt sich nämlich, dass für die Eintheilung der Integrale in Gruppen und Untergruppen bei einer beliebigen singulären Stelle die Fundamentalgleichung genau dasselbe leistet, was bei Stellen der Bestimmtheit die Recursionsformel und die determinirende Gleichung zu leisten vermögen. Durch diese Ausnützung der Fundamentalgleichung wird die Bestimmung der analytischen Gestalt der im Kreisring giltigen Integrale wesentlich erleichtert,

und dies würde noch deutlicher hervortreten, wenn (S. 175) der Beweis, dass das Integral $y_{1\alpha}$ mit $y_{0\alpha}$ in dieselbe Gruppe gehört, nicht mit der stets Misstrauen erweckenden Wendung „hieraus folgert man leicht" übergangen, sondern wirklich ausgeführt worden wäre. — Die Frage, ob es auch an Stellen der Unbestimmtheit sich bestimmt verhaltende Integrale geben könne, führt auf die Zerlegbarkeit eines Differentialausdrucks und zu der Reductibiltät bezw. Irreductibilität einer linearen Differentialgleichung bei einer Stelle in dem Sinne, wie diese durch die zweite Definition von Frobenius erklärt wird. Die Wahl gerade dieser Definition ist hier berechtigt, wo es sich um die Untersuchung der Integrale in der Umgebung der einzelnen Stellen handelt. Doch hätten die beiden anderen von Frobenius bezw. von Königsberger herrührenden Definitionen der Irreductibilität wenigstens kurz angegeben werden können. Mit dem Nachweis der Existenz irreductibler Differentialgleichungen schliesst dieser Abschnitt des Buches.

Da unendlich grosse Werthe der unabhängigen Variablen bisher ausser Betracht geblieben sind, werden diese noch der Untersuchung unterworfen (Kap. XIV) und insofern originell behandelt, als die durch $x=\frac{1}{z}$ transformirte Differentialgleichung möglichst in den Hintergrund gerückt ist und z. B. Recursionsformel und determinirende Gleichung für $x=\infty$ direct aus der ursprünglichen Differentialgleichung hergeleitet werden. Dadurch treten interessante Analogien zwischen den Formeln bei $x=\infty$ und denjenigen bei einer endlichen Stelle ans Licht. Noch deutlicher zeigen sich diese im fünfzehnten und letzten Kapitel, das für Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten eine gemeinsame Recursionsformel bei $x=0$ und $x=\infty$, sowie einen gemeinschaftlichen Algorithmus für die sich bei diesen beiden Stellen bestimmt verhaltenden Integrale erster Stufe aufstellt. Dieses Kapitel bringt dann die Haupteigenschaften der Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse, berührt kurz die Differentialgleichungen mit nur algebraischen Integralen und deren Gruppeneigenschaft und schliesst mit der Gauss'schen als der allgemeinsten Differentialgleichung zweiter Ordnung dieser Klasse. Da die letztere bereits in verschiedenen Kapiteln als Beispiel gedient hat — wie überhaupt sehr gut gewählte Beispiele fast jede Untersuchung erläutern —, so ist eine Zusammenfassung und Vervollständigung der für sie gefundenen Resultate erwünscht. Ihre Integrale in der Umgebung der singulären Stellen werden deshalb für alle möglichen Fälle aufgestellt, wobei die Methoden des achten Kapitels deren vollständige explicite Angabe mittelst der Gauss'schen und einer aus dieser leicht herzuleitenden Reihe gestatten.

Um die Darstellung der Theorie selbst ohne Unterbrechung durchführen zu können und dabei doch keine Lücken zu lassen, bringt der Verfasser alle *Hilfs*sätze und Hilfsbetrachtungen, soweit sie sich nicht in leicht zugänglichen

Büchern finden, in einem Anhang am Ende des Buches. Unter denselben verdient eine besondere Beachtung der strenge Beweis des von Fuchs stammenden, hier aber weiter ausgeführten Satzes, welcher den Exponenten, zu dem $\int \Psi dx$ gehört, und die Stelle, an der er steht, bestimmt, wenn

$$\Psi = \psi_0 + \psi_1 log x + \cdots + \psi_\sigma log^\sigma x$$

eine sich bestimmt verhaltende Function ist.

Einige Ausstellungen, die wir ausser den schon gelegentlich angeführten zu machen haben, mögen sich der vorstehenden Inhaltsangabe anschliessen. Auf S. 57 dürfte die Bezeichnung „Hauptintegral" als überflüssig und zu Missdeutungen Anlass gebend zu streichen sein. Ferner müsste dort das „Fundamentalsystem von Integralen (?) einer nicht homogenen linearen Differentialgleichung" — ein Begriff, dessen Einführung uns übrigens ebenfalls nicht nothwendig und nicht unbedenklich erscheint — als aus einem beliebigen Integral derselben und einem Fundamentalsystem der zugehörigen reducirten Differentialgleichung bestehend ausdrücklich definirt werden. — In Artikel 43 fehlt die für später (S. 153) wichtige Bemerkung, dass seine Betrachtungen auch Geltung behalten, wenn $y_{01}, y_{02}, \ldots y_{0n}$ und $y_{a1}, y_{a2}, \ldots y_{an}$ zwei beliebige, in der Umgebung singulärer Punkte giltige Fundamentalsysteme sind. — Satz 5 und 6 im Anhang „Zu Kapitel IV" sollten erst im Anhang „Zu Kapitel VII" stehen, weil bei ihrem Beweis auf das siebente Kapitel verwiesen wird und sie auch erst in diesem zur Anwendung gelangen. — Rein äusserliche Versehen sind folgende zu berichtigen: S. 15 Z. 10 ist zu lesen „$\lambda \geqq \nu$, während für $\lambda < \nu$" statt „$\nu \geqq \lambda$, während für $\nu < \lambda$", S. 15 Z. 15 überall „$k$" statt „$s$", S. 99 Z. 4 „Art. 49" statt „Art. 48", S. 100 Z. 11 „Art. 50" statt „Art. 49".

Sämmtliche Ausstellungen sind, wie man sieht, von geringem Belang, und ihre Ursache ist jedesmal leicht zu beseitigen. Sie fallen gegenüber den grossen Vorzügen des Buches nicht ins Gewicht. Um von seinen Vorzügen ein möglichst anschauliches Bild zu geben, haben wir über seinen Inhalt so ausführlich und in derjenigen Anordnung, die der Verfasser für ihn gewählt hat, berichtet. Wir hoffen gezeigt zu haben, wie es seinen Stoff nach einem consequent durchgeführten Plan organisch entwickelt, und in welchen Punkten es an Methoden oder Resultaten Neues bietet. Das durchweg klar und frisch geschriebene Buch besitzt auch die in pädagogischer Hinsicht nicht hoch genug anzuschlagende Eigenschaft: welches Kapitel man auch aufschlagen mag, man ist stets sofort darüber orientirt, worauf die ganze Untersuchung, zu welcher der gerade behandelte Gegenstand gehört, abzielt, und wie weit man in ihr bereits gelangt ist. Fügen wir noch hinzu, dass ein ausführliches „Register der angewandten Bezeichnungen" und ein Inhaltsverzeichniss, das den Inhalt jedes einzelnen Artikels angiebt, das Buch auch zum Nachschlagen sehr brauchbar macht, so bleibt uns nur übrig, ihm wegen aller dieser Eigenschaften einen recht grossen Leserkreis zu wünschen.

C. Koehler.

# Bibliographie

vom 1. August bis 30. September 1894.

### Periodische Schriften.

Abhandlungen der kaiserl. Leopold.-Carol. Akademie. Bd. 61 u. 62. Leipzig, Engelmann. 30 Mk.

Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse der Akademie zu Wien. Abth. IIa, 3.—5. Heft. Wien, Tempsky. 2 Mk. 40 Pf.

Nachrichten von der mathem.-phys. Klasse der Göttinger königl. Gesellschaft der Wissenschaften 1894, Nr. 1 und 2. Göttingen, Dietrich. 5 Mk.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, redigirt von J. Fröhlich. 11. Bd. 2. Hälfte. Budapest. Verlag der Ungar. Akademie der Wissenschaften. 4 Mk.

Verhandlungen der vom 12.—18. September 1893 in Genf abgehaltenen Conferenz der Commission der internationalen Erdmessung. Redigirt von A. Hirsch. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 20. Jahrgang. 2. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Die Fortschritte der Physik, dargestellt von der physikalischen Gesellschaft in Berlin. Jahrgang 44 (für das Jahr 1888), Abth. 2, Physik des Aethers; von R. Börnstein. Braunschweig, Vieweg. 30 Mk.

Jahresbericht des bad. Centralbureaus für Meteorologie und Hydrographie. Jahrgang 1893. Karlsruhe, Braun. 6 Mk.

### Geschichte der Mathematik.

Obenrauch, J. Monge, als Begründer der darstellenden Geometrie. 2. Theil. Brünn, Selbstverlag. 1 Mk.

### Reine Mathematik.

Weierstrass, K., Mathematische Werke. Herausgegeben von der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. I. Bd. Abhandlungen. Berlin. Mayer & Müller. 21 Mk.

Grassmann's, H., Gesammelte Werke. Herausgegeben von der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 1. Bd. 1. Theil. Die Ausdehnungslehre und die geometrische Analyse. Herausgegeben von E. Study und F. Engel. Leipzig, B. G. Teubner. 12 Mk.

Glauner, Th., Ueber den Verlauf von Potentialfunctionen im Raume (Dissertation). Göttingen und Leipzig, Fock. 1 Mk. 20 Pf.

Stroh, E., Theorie der Combinanten algebraischer Formen (Programm). München, Kellerer. 1 Mk.

Steinitz, E., Ueber die Construction der Configurationen $n_3$ (Dissertation). Breslau (Leipzig, Köhler). 1 Mk.

Seeger, H., Leitfaden für den arithmetischen Unterricht in der Prima einer neunkl. Realschule. Wismar, Hinstorff. 2 Mk.

Bussler, F., Mathematisches Uebungsbuch für höhere Lehranstalten. Dresden, Ehlermann. 2 Mk. 40 Pf.

Holzmüller, G., Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik. 2. Theil für die drei Oberklassen d. höh. Lehranstalt. Leipzig, B. G. Teubner. 3 Mk.

Schwering, K. und Krimphoff, W., Anfangsgründe der ebenen Geometrie. Freiburg i. B., Herder. 1 Mk. 80 Pf.

König, M., Die geometrische Theilung des Winkels. Berlin, Siemens. 2 Mk.

Reishaus, Th., Zur Parallelenfrage. Beweis des Parallelensatzes etc. ohne Hilfe eines zweifelhaften Axioms. Stralsund, Bremer. 1 Mk.

## Angewandte Mathematik.

Coordinaten und Höhen sämmtlicher von der trigon. Landesaufnahme bestimmten Punkte des Reg.-Bez. Frankfurt. Berlin, Mittler. 2 Mk.

Preston, S., Ueber das gegenseitige Verhältniss einiger zur dynamischen Erklärung der Gravitation aufgestellten Hypothesen (Dissertation). Leipzig, Fock. 80 Pf.

Schlemüller, W., Die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit des Schalles in einem theoretischen Gase nach der dynamischen Gastheorie. Prag, Dominicus. 50 Pf.

## Physik und Meteorologie.

Kundt, A., Gedächtnissrede auf W. v. Bezold. Leipzig, Barth. 60 Pf.

Hertz, H., Gesammelte Werke. 3. Bd. Die Principien der Mechanik. Herausgegeben von P. Lenard, mit Vorwort von H. v. Helmholtz. Leipzig, Barth. 12 Mk.

Anderssohn, A., Physikalische Principien der Naturlehre. Halle a. S., Schwetschke. 1 Mk. 60 Pf.

Grimsehl, Die Vorgänge beim elektrischen Strome, veranschaulicht durch Flüssigkeitsströme (Progr.). Cuxhaven (Hamburg, Herold). 1 Mk. 50 Pf.

Niemöller, F., Apparate und Versuche für physikalische Schülerübungen. Osnabrück, Lückerdt. 80 Pf.

Handbuch der Physik. 22. Lieferung. Breslau, Trewendt. 3 Mk. 60 Pf.

# Mathematisches Abhandlungsregister.

## 1893.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

### A.

**Absolute Geometrie.**

173. Sur la geometrie non Euclidienne. Gérard. N. ann. math. Série 3, XII, 74.
Vergl. Geschichte der Mathematik 253.

**Abzählende Geometrie.**

174. On Halphen's characteristic $n$ in the theory of curves in space. Cayley. Crelle CXI, 347.

**Analytische Geometrie der Ebene.**

175. Sur un système de coordonnées tangentielles. Balitrand. N. ann. math. Série 3, XII, 256.
176. Sur un système de coordonnées triangulaires. P. Sondat. N. ann. math. Série 3, XII, 360, 503.
177. Sur une classe de transformations dans le triangle et notamment sur certaine transformation quadratique birationelle. M. d'Ocagne. N. ann. math. Série 3, XII, 337.
178. Sur une généralisation d'un théorème de Newton. P. Delens. N. ann. math. Série 3, XII, 407.
179. Sur l'orientation des systèmes de droites. G. Humbert. N. ann. math. Série 3, XII, 37, 129.
180. Propriété d'une classe de courbes. Weill. N. ann. math. Série 3, XII, 93.
181. Sur les cubiques à point de rebroussement. Ch. Bioche. N. ann. math. Série 3, XII, 294.
182. Sur la Kreuzcurve. H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 53.
183. Propriétés du limaçon de Pascal. J. Lemaire. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 33.
184. Sur la strophoïde et la cissoïde. Balitrand. N. ann. math. Série 3, XII, 430.
185. Sur les huit points de rencontre d'une cardioïde avec un cercle J. Lemaire. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 35.
186. Sur un faisceau de cardioïdes ayant toutes même axe de symétrie et même point de rebroussement. J. Lemaire. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc 34.
Vergl. Kegelschnitte. Krümmung.

**Analytische Geometrie des Raumes.**

187. Propriété des droites joignant le sommêt d'un cône aux centres des sphères osculatrices d'une trajectoire oblique des génératrices. E. Genty. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 29.
Vergl. Abzählende Geometrie. Cubatur. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Sphärik. Tetraeder.

**Astronomie.**

188. Nouvelles Recherches sur les séries employées dans les théories des planètes. H. Gylden. Acta Math. XVII, 1.
189. Expression complète et signification véritable de la nutation initiale. F. Folie. Acta Math. XVI, 365.
190. On the Theory of stellar scintillation. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Série 5, XXXVI, 129.
Vergl. Nautik.

**Ausdehnungslehre.**

191. Quelques théorèmes de mécanique et la methode de Grassmann. E. Carvallo. N. ann. math. Série 3, XII, 65. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 289.]

## C.

**Cubatur.**

192. Sur une formule générale de la mesure des volumes. A. de Saint-Germain. N. ann. math. Série 3, XII, 291.

## D.

**Determinanten.**

193. Zwei Determinantensätze. E. Netto. Acta Math. XVII, 199.
194. Ueber einige arithmetische Determinanten höheren Ranges. L. Gegenbauer. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 425.
195. Ueber die Relationen zwischen den Determinanten einer Matrix. K. Th. Vahlen. Crelle LXII, 306.
196. Sur les déterminants infinis et les équations differentielles lineaires. H. v. Koch. Acta Math. XVI, 217. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 307.]

**Differentialgleichungen.**

197. Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die algebraischen Functionen. L. W. Thomé. Crelle CXII, 165. [Vergl Bd. XXXVII Nr. 45.]
198. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten. P. Schafheitlin. Crelle CXI, 44. [Vergl. Bd. XXXVI Nr. 36.]
199. Sur la génération de systèmes récurrents au moyen d'une equation linéaire différentielle. S. Pincherle. Acta Math. XVI, 341.
200. Ueber adjungirte lineare Differentialgleichungen. G. Pick. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 893.
201. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentalintegralen. G. Wallenberg. Crelle CXI, 89.
202. Ueber die Reductibilität linearer homogener Differentialgleichungen. M. Hamburger. Crelle CXI, 121.
203. Lineare homogene Differentialgleichungen mit symmetrischer Integraldeterminante. J. N. Hazzidakis. Crelle CXI, 315.
204. Ueber die Multiplicatoren eines Systems linearer homogener Differentialgleichungen. G. v. Escherich. Wiener Akad Ber. (Abthlg. IIa) CI, 1222.
205. Die Differentialbeziehungen für die eindeutigen doppelperiodischen Functionen zweiter bezw. dritter Art. E. Jahnke. Crelle CXII, 265.
206. Ueber die Reduction der Differentialgleichung der allgemeineren $F$-Reihe. L. Pochhammer. Crelle CXII, 58.
207. Ueber Transformationen von Differentialgleichungen. P. Stäckel. Crelle CXI, 290.
208. Remarques sur les équations différentielles. E. Picard. Acta Math. XVII, 297.
209. Ueber die Form des Integrals der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}=\frac{p_0+p_1y+p_2y^2+p_3y^3}{q_0+q_1y}$. E. Haentzschel. Crelle CXII, 148.
210. Ueber die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung. M. Hamburger. Crelle CXII, 205.
211. Ueber die Irreductibilität der algebraischen partiellen Differentialgleichungssysteme. L. Königsberger. Crelle CXI, 1.
212. Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen den Integralen verschiedener algebraischer partieller Differentialgleichungs-Systeme. L. Königsberger. Crelle CXI, 156.
213. Ueber die Convergenzbereiche der Integrale partieller Differentialgleichungen. L. Königsberger. Crelle CXII, 181.

Vergl. Determinanten 196.

**Differentialquotient.**

214. Ueber die Differentialquotienten von Functionen mehrerer Variabeln. E Czuber. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 1417.

**Dreiecksgeometrie.**

215. Sur la transformation continue. Em. Lemoine. N. ann. math. Série 3, XII, 20.

## E.

### Elasticität.

216. On the elasticity of a crystal according to Boscovich. Lord Kelvin. Phil. Mag. Serie 5, XXXVI, 414.
217. On the finite bending of thin shells. A. B. Basset. Phil. Mag. Serie 5, XXXV, 496.

### Elektricität.

218. Ueber das Gleichgewicht der Elektricität auf einer Scheibe und einem Ellipsoid. J. Stefan. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 1583.
219. On the differential equation of electrical flow. T. H. Blakesley. Phil. Mag. Serie 5, XXXV, 419.
220. On a modification of Maxwell's electrical theory. Alex. Mc. Aulay. Phil. Mag. Serie 5, XXXVI, 175.
221. On the theory of Pyro-electricity and Piezo-electricity. Lord Kelvin. Phil. Mag. Serie 5, XXXVI, 453.

### Ellipse.

222. Propriété de l'ellipse. E. N. Barisien. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 62.
 Vergl. Maxima und Minima. Normalen 308. Oberflächen zweiter Ordnung 323.

### Ellipsoid.

223. Solution par la géométrie vectorielle de quelques problèmes sur l'ellipsoïde. E. Genty. N. ann. math. Série 3, XII, 99.
 Vergl. Elektricität 218.

### Elliptische Transcendenten.

224. Zur Auflösung der lemniskatischen Theilungsgleichungen. K. Schwering. Crelle CXI, 170. CXII, 37.

## F.

### Formen.

225. Ueber ternäre definite Formen. D. Hilbert. Acta Math. XVII, 169.
226. Nachtrag zu einer früheren Abhandlung über ternäre Formen. A. Meyer. Crelle CXII, 87. [Vergl. Bd. XXXI Nr. 62.]
227. Sur le discriminant des formes cubiques ternaires. S. Mangeot. N. ann. math. Série 3, XII, 421.

### Functionen.

228. Ueber die Darstellung der ganzen algebraischen Functionen einer Variablen durch ein Fundamentalsystem. K. Hensel. Crelle CXI, 139.
229. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. P. Stäckel. Crelle CXII, 262.
230. Ueber algebraische Gleichungen zwischen eindeutigen Functionen, welche lineare Substitutionen in sich gestatten. P. Stäckel. Crelle CXII, 287.
231. Ueber Systeme von Functionen reeller Variabeln. P. Stäckel. Crelle CXII, 311.
232. Entwicklungen zur Transformation fünfter und siebenter Ordnung einiger specieller automorpher Functionen. R. Fricke. Acta Math. XVII, 345.
233. Application du calcul des résidus. E. Amigues. N. ann. math. Série 3, XII, 142.
234. Sur l'introduction des nombres négatifs. M. Fouché. N. ann. math. Série 3, XII, 164. — Luc. Levy ibid. 225.
235. Reconnaître si un polynome à plusieurs variables peut être décomposé en facteurs entiers. H. Laurent. N. ann. math. Série 3, XII, 315.
236. Ueber einen algebraischen Satz. F. Mertens. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 1560.
 Vergl. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Formen. Gleichungen. Invarianten. Modulfunction. Reihen. Substitutionen. Thetafunctionen. Umkehrproblem. Zahlentheorie.

## G.

### Geometrie (descriptive).

237. Zur constructiven Theorie der windschiefen Regelflächen mit zwei Leitgeraden und einem Leitkegelschnitt. H. Drasch. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 171.

## H.

### Hydrodynamik.

264. A hydrodynamical proof of the equations of motion of a perforated solid with applications to the motion of a fine rigid framework in circulating liquid. G. H. Bryan. Phil. Mag. Serie 5, XXXV, 338, 352. — C. V. Burton ibid. 351.
265. On the applicability of Lagrange's equations of motion in a general class of problems, with especial reference to the motion of a perforated solid in a liquid. C. V. Burton. Phil. Mag. Serie 5, XXXV, 490.

Vergl. Wellenbewegung.

### Hyperbel.

266. Sur une hyperbole équilatère et une circonférence décrite sur une corde de l'hyperbole comme diamètre. E. Genty. N. ann. math. Série 3, XII, 425.
267. Hyperbole sur laquelle se trouvent les pôles des droites menées des bouts d'un diamètres d'une ellipse, de l'un aux bouts d'un diamètre donné, de l'autre aux bouts du diamètre conjugué. X. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 27.
268. Sur un faisceau d'hyperboles équilatères coupant les axes des coordonnées l'une en deux points, l'autre en un point donnés tous les trois. Audibert. N. ann. math. Série 3, XII, 456.

Vergl. Krümmung 282.

## I.

### Invariantentheorie.

269. Ueber Biegungsinvarianten, eine Anwendung der Lie'schen Gruppentheorie. Kas. Žarawsti. Acta Math. XVI, 1.
270. Ueber Biegungscovarianten. J. Knoblauch. Crelle CXI, 276.
271. Zur Theorie der Differentialparameter. J. Knoblauch. Crelle CXI, 329.

Vergl. Differentialgleichungen 207. Oberflächen 311.

## K.

### Kegelschnitte.

272. Lieu géométrique des foyers des coniques qui touchent deux droites fixes chacune en un point fixe. J. Lemaire. N. ann. math. Série. 3, XII, Exerc. 36.
273. Le lieu des foyers des coniques doublement tangentes à deux cercles donnés se compose de cinq cercles. E. N. Barisien. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 18. — J. Réveille. N. ann. math. Série 3, XII, 427.
274. Coniques doublement tangentes à un cercle donné. Audibert & Farjon. N. ann. math. Série 3, XII, 426. [Vergl. Bd. XXXVIII Nr. 430.]
275. Sur des coniques engendrées au moyen de deux circonférences. G. S. N. ann. math. Série 3, XII, 403.
276. Coniques ayant pour diamètres deux droites données. Audibert. N. ann. math. Série 3, XII, 520.
277. Sur un lieu géométrique et ses applications. A. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XII, 387.
278. Théorèmes sur les coniques, applications de la méthode des polaires réciproques. R. Godefroy. N. ann. math. Série 3, XII, 106.
279. Sur les polaires des milieux des côtés d'un triangle par rapport à une conique inscrite à ce triangle. R. Sondat. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 40.
280. Propriété des parallèles aux côtés d'un triangle tirées d'un point d'une conique. E. N. Barisien. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 55.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Normalen 309. Parabel.

### Krümmung.

281. Construction du centre de courbure de certaines courbes. R. Godefroy. N. ann. math. Série 3, XII, 85.
282. Construction du cercle osculateur en un point d'une hyperbole. Balitrand. N. ann. math. Série 3, XII, 451.
283. On the drawing of curves by their curvature. C. V. Boys. Phil. Mag. Serie 5, XXXVI, 75.
284. Construire une parabole connaissant un de ses points $A$, le diamètre passant par $A$ et le centre de courbure répondant à ce point. Servais. N. ann.

math. Série 3, XII, 19. — E. Dewulf ibid. 72. — E. N. Barisien ibid. 179. — S. Maillard ibid. 428. [Vergl. Bd. XXXVIII Nr. 444.]
Vergl. Oberflächen 310, 311, 312.

## M.

### Magnetismus.

285. The magnetic field of a circular current. G. M. Minchin. Phil. Mag. Serie 5, XXXV, 354.
286. The magnetic field close to the surface of a wire conveying an electrical current. G. M. Minchin. Phil. Mag. Série 5, XXXVI, 201.
287. Ueber die an Eisenkörpern im Magnetfelde wirksamen Oberflächenspannungen. G. Adler. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. II a) CI, 1537.

### Maxima und Minima.

288. Maximum ou minimum d'un segment d'une transversale d'une ellipse. Lez. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 2.
Vergl. Variationsrechnung.

### Mechanik.

289. Der Flächensatz bei der Bewegung auf abwickelbaren Flächen. J. N. Hazzidakis. Crelle CXII, 140.
290. Sur le cas traité par Mme. Kovalevski de rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe. Fr. Kötter. Acta Math. XVII, 209.
291. On the equilibrium of Vis viva. L. Boltzmann. Phil. Mag. Serie 5, XXXV, 153.
292. On the methods of theoretical physics. L. Boltzmann. Phil. Mag. Série 5, XXXVI, 37.
293. The foundations of Dynamics. Ol. Lodge. Phil. Mag. Serie 5, XXXVI, 1.
294. On the hypotheses of Dynamics. J. G. Mac Gregor. Phil. Mag. Serie 5, XXXVI, 233.
295. Ueber jenes Massenmoment eines materiellen Punktsystems, welches aus dem Trägheitsmomente und dem Deviationsmomente in Bezug auf irgend eine Achse resultirt. Jos. Finger. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. II a) CI, 1649.
296. Sur les forces centrales. E. Carvallo. N. ann. math. Série 3, XII, 228.
297. Sur l'image d'une force sur un plan. E. Carvallo. N. ann. Math. Série 3, XII, 454.
298. Sur le mouvement d'un point sur une surface polie sous l'action d'une force dérivant d'un potentiel et dont la grandeur dépend en chaque point uniquement de la valeur du potentiel en ce point. A. de Saint-Germain. N. ann. math. Série 3, XII, 5.
299. Condition pour que dans le mouvement d'une plaque abandonnée à l'action de son poids une droite, segment du périmètre de la plaque, reste parallèle à elle même. A. de Saint-Germain. N. ann. math. Série 3, XII, 325.
300. Étude de statique physique. Calcul des actions mutuelles des solides en contact. L. Bossut. N. ann. math. Série 3, XII, 239.
301. Contact-Action and the Conservation of Energy. J. G. Mac Gregor. Phil. Mag. Serie 5, XXXV, 134.
302. Die Dichte der Erde berechnet aus der Schwerebeschleunigung und der Abplattung. O. Tumlirz. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. II a) CI, 1528.
Vergl. Astronomie. Ausdehnungslehre. Elasticität. Elektricität. Hydrodynamik. Magnetismus. Oberflächen zweiter Ordnung 321. Optik. Pendel. Wärmelehre. Wellenbewegung.

### Mehrdimensionale Geometrie.

303. Synthetische Gewinnung geometrischer linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension. K. Zindler. Crelle CXI, 303.
304. Nachweis linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension in unserem Raume; linearer Complexe und Strahlensysteme in demselben. K. Zindler. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. II a) CI, 215.
305. Ueber die allgemeinsten abwickelbaren Räume, ein Beitrag zur mehrdimensionalen Geometrie. Ant. Puchta. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. II a) CI, 355.

### Modulfunction.

306. Zur Theorie der Modulfunctionen (Note zur Abhandlung Crelle LXXXIII, 13). L. Fuchs. Crelle CXII, 156.

## N.

### Nautik.

307. Die Bestimmung der geographischen Schiffsposition in dem sogenannten kritischen Falle. Eug. Gelcich. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 205.

### Normalen.

308. Trouver le lieu des points tels que les quatre normales menées des ces points à une ellipse donnée forment un faisceau harmonique. E. N. Barisien. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 25.
309. Ueber ein Paar unicursaler Degenerirungscurven dritter Ordnung des Normalenproblems und das Normalenproblem einer confocalen Kegelschnittschaar. Jos. Tesař. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 1248.

## O.

### Oberflächen.

310. Zur Theorie des Krümmungsmaasses der Flächen. R. v. Lilienthal. Acta Math. XVI, 143.
311. Zur Erhaltung des Gauss'schen Krümmungsmaasses einer Fläche bei ihren Biegungen. P. Stäckel. Crelle CXI, 205.
312. Ueber Krümmung und Indicatricen der Helikoide. J. Sobotka. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 899.
313. Ueber einen besonderen Fall des $F^2$-Gebüsches und das dazu projectivische räumliche System. J. Cardinaal. Crelle CXI, 31.
314. Ueber die bei einer Gattung centrischer Rückungsflächen der vierten Ordnung auftretende Reciprocität. Ant. Sucharda. Wiener Akad. Ber (Abthlg. IIa) CI, 585.
315. Ueber windschiefe Flächen vierten Grades mit drei Doppelgeraden. D. Segen. Crelle CXII, 39.
316. Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe. Ch. Bioche. N. ann. math. Série 3, XII, 412.
317. Sur les plans tangents à certaines surfaces algèbriques. S. Mangeot. N. ann. math. Série 3, XII, 185.
318. Sur deux surfaces, dont l'une est la transformée de l'autre par rapport à un pôle donné. E. Genty. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 11.
319. Surface contenant la courbe $x=\frac{2}{t-a}$, $y=\frac{2}{t-b}$, $z=\frac{2}{t-c}$ en supposant $a > b > c > 0$. Audibert. N. ann. math. Série 3, XII, 464.
320. Lieu des points d'intersection de trois sphères ayant les côtés d'un triangle variable comme diamètres. X. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 43.

Vergl. Geometrie (descriptive). Mechanik 289, 298.

### Oberflächen zweiter Ordnung.

321. Ueber die gegenseitigen Beziehungen gewisser in der Mechanik mit Vortheil anwendbaren Flächen zweiter Ordnung nebst Anwendungen auf Probleme der Astatik. Jos. Finger. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 1105.
322. Transformation omaloïdale des quadriques. P. Michel. N. ann. math. Série 3, XII, 192.
323. Ellipse produite par un point pendant qu'une quadrique tourne autour d'une droite E. Genty. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 15.

Vergl. Ellipsoid.

### Optik.

324. Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents. V. Volterra. Acta Math. XVI, 153.
325. Sur la polarisation par diffraction. H. Poincaré. Acta Math. XVI, 297.
326. The diffusion of light. W. E. Sumpner. Phil. Mag. Serie 5, XXXV, 81.
327. Gratings in theory and practice. H. A. Rowland. Phil. Mag. Serie 5, XXXV, 397.
328. On the construction of a colour map. W. Baily. Phil. Mag. Ser. 5, XXXV, 46.

Vergl. Astronomie 190. Geometrie (descriptive) 239.

## P.

### Parabel.

329. Démonstration d'un théorème de Steiner et d'un théorème de Newton. R. Godefroy. N. ann. math. Série 3, XII, 137.

330. Milieux des tangentes communes d'une parabole et d'une circonférence passant par le foyer. H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 54.
331. Sur une droite partagée dans le rapport de 1 à 3 par le foyer d'une parabole. P. Michel. N. ann. math. Série 3, XII, Excerc. 43.
332. Sur les tangentes communes d'une parabole et d'une autre conique. E. N. Barisien. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 60.
333. Paraboles circonscrites à un triangle isoscèle rectangulaire. E. N. Barisien. N. ann. math. Série 3, XII, 330.
Vergl. Krümmung 284.

**Pendel.**

334. Ueber isochrone Pendelschwingungen. H. Ruoss. Crelle CXII, 53.

**Planimetrie.**

335. Sur la géométrographie de Mr. Lemoine. R. Soudée. N. ann. math. Série 3, XII, 148. — E. Marchant ibid. 150.
Vergl. Dreiecksgeometrie.

## R.

**Reihen.**

336. Le reste de la série de Taylor dans le cas d'une fonction de variable imaginaire. E. Amigues. N. ann. math. Série 3, XII, 88.
337. Sur une série fonctionelle. V. Jamet. N. ann. math. Série 3, XII, 419.
338. Valeur du produit $(1-x)^{1-p}F(x)$ lorsque $x$ tend vers 1 et $F(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$ Soudée. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 4. — Cesaro ibid. 30.
339. $\frac{1}{n}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^p+\left(\frac{n}{n+2}\right)^p+\cdots\right]=\frac{1}{p-1}$ lorsque $n$ augmente indéfiniment. Franc. Borletti. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 58.
Vergl. Astronomie 188. Differentialgleichungen 206.

## S.

**Sphärik.**

340. Geometrische Untersuchungen. Herm. Schmidt. Crelle CXII, 112, 319.
Vergl. Oberflächen 320.

**Substitutionen.**

341. Zur Theorie der linearen Substitutionen. E. Netto. Acta Math. XVII, 265.

## T.

**Tetraeder.**

342. Sur des corps produits par des plans menés par un point donné parallèlement eux faces d'un tétraèdre donné. E. Genty. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 6.
343. Trois points dépendants d'un tétraèdre situés en ligne droite. E. Genty. N. ann. math. Série 3, XII, Exerc. 9.

**Thetafunctionen.**

344. Ueber ein specielles Problem der Transformation der Thetafunctionen. Ad. Krazer. Crelle CXI, 64.
345. Ueber lineare Relationen zwischen Thetaproducten. A. Krazer. Acta Math. XVII, 281.
346. Zur Theorie der Gauss'schen Summen und der linearen Transformation der Thetafunctionen. G. Landsberg. Crelle CXI, 234.
347. Anwendung der Transformation zweiten Grades der Thetafunctionen zweier Variabeln auf das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen. G. Hettner. Crelle CXII, 89.

## U.

**Umkehrproblem.**

348. Ueber eine allgemeine Formel zur Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems. H. Stahl. Crelle CXI, 98.

## V.

**Variationsrechnung.**

349. Sur les maxima et les minima des intégrales doubles. Gust. Kobb. Acta Math. XVI, 65. XVII, 321.

## W.

### Wärmelehre.

350. Zur Geschichte und Kritik des Carnot'schen Wärmegesetzes. E. Mach. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 1589.
351. The viscosity of gases and molecular force. W. Sutherland. Phil. Mag. Serie 5, XXXVI, 507.
352. Ueber die Art der Kräfte, welche Gasmolekule auf einander ausüben. Gust. Jäger. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 1520.
353. Ueber die Temperaturfunction der Zustandsgleichung der Gase. Gust. Jäger. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 1675.
354. Lufbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale bei zonaler Druckvertheilung. M. Margules. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 597.
355. On radiant energy. B Galitzine. Phil. Mag. Ser. 5, XXXV, 113.
356. Zur Elasticität der Gase. C. Puschl. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 541.
357. Die Zustandsgleichung der Gase in ihrer Beziehung zu den Lösungen. Gust. Jäger. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 553.
358. Ein einfaches Gesetz für die Verdampfungswärme der Flüssigkeiten. O. Tumlirz. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 184.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung.

359. A new method of treating correlated averages. F. Y. Edgeworth. Phil. Mag. Serie 5, XXXV, 63. [Vergl. Bd. XXXVIII Nr. 540.]
360. Exercices in the calculation of errors. F. Y. Edgeworth. Phil. Mag. Serie 5, XXXVI, 98.
361. On the calculation of correlation between organs. F. Y. Edgeworth. Phil. Mag. Serie 5, XXXVI, 350.
362. An exemple in correlation of averages for four variables. Sophie Bryant. Phil. Mag. Serie 5, XXXVI, 372.

### Wellenbewegung.

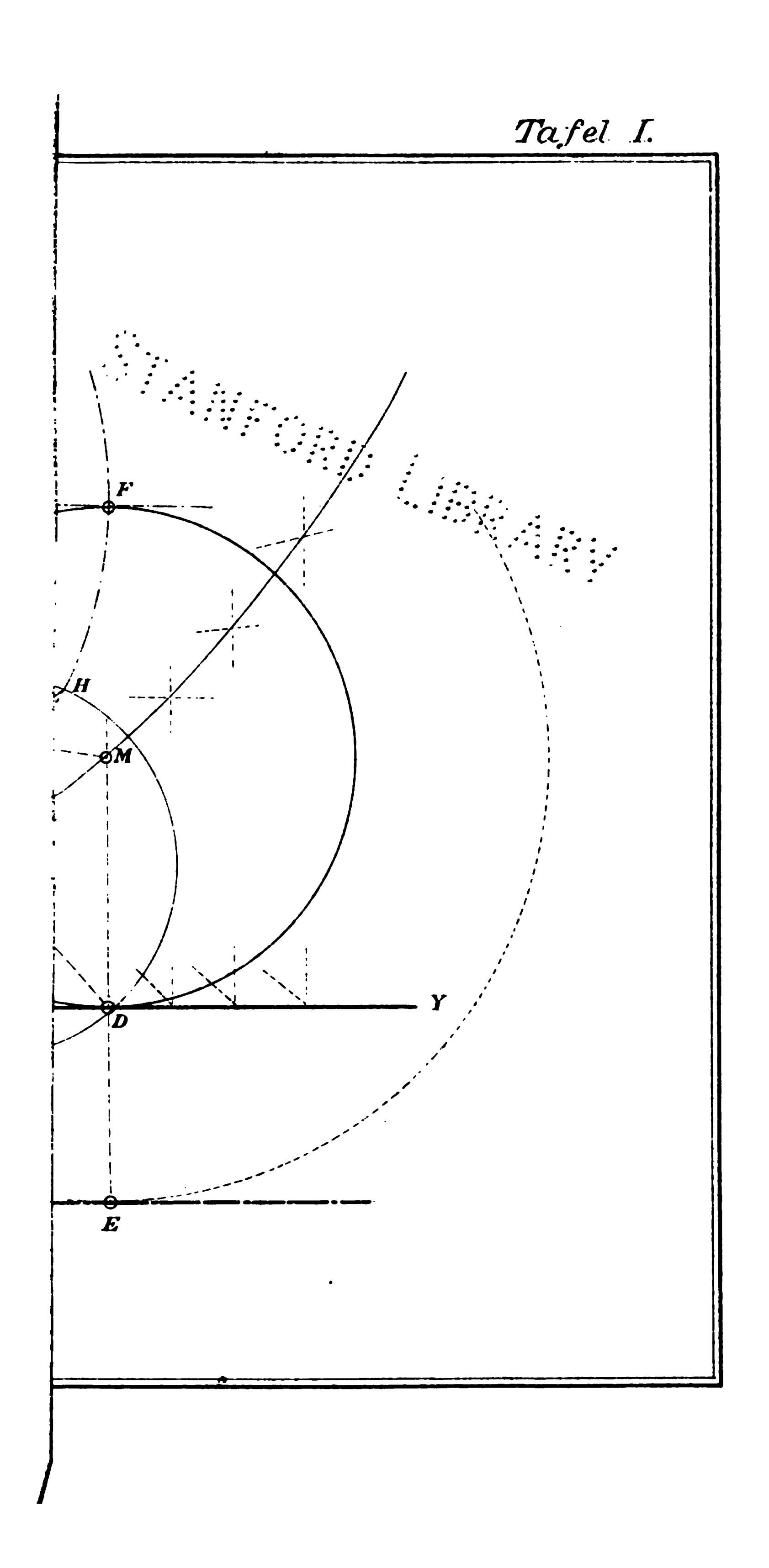
363. On plane and spherical sound-waves of finite amplitude. Ch. V. Burton. Phil. Mag. Serie 5, XXXV, 317.
364. On the flow of viscous liquids especially in two dimensions. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Serie 5, XXXVI, 354.
365. The highest waves in water. J. H. Michell. Phil. Mag. Serie 5, XXXVI, 430.

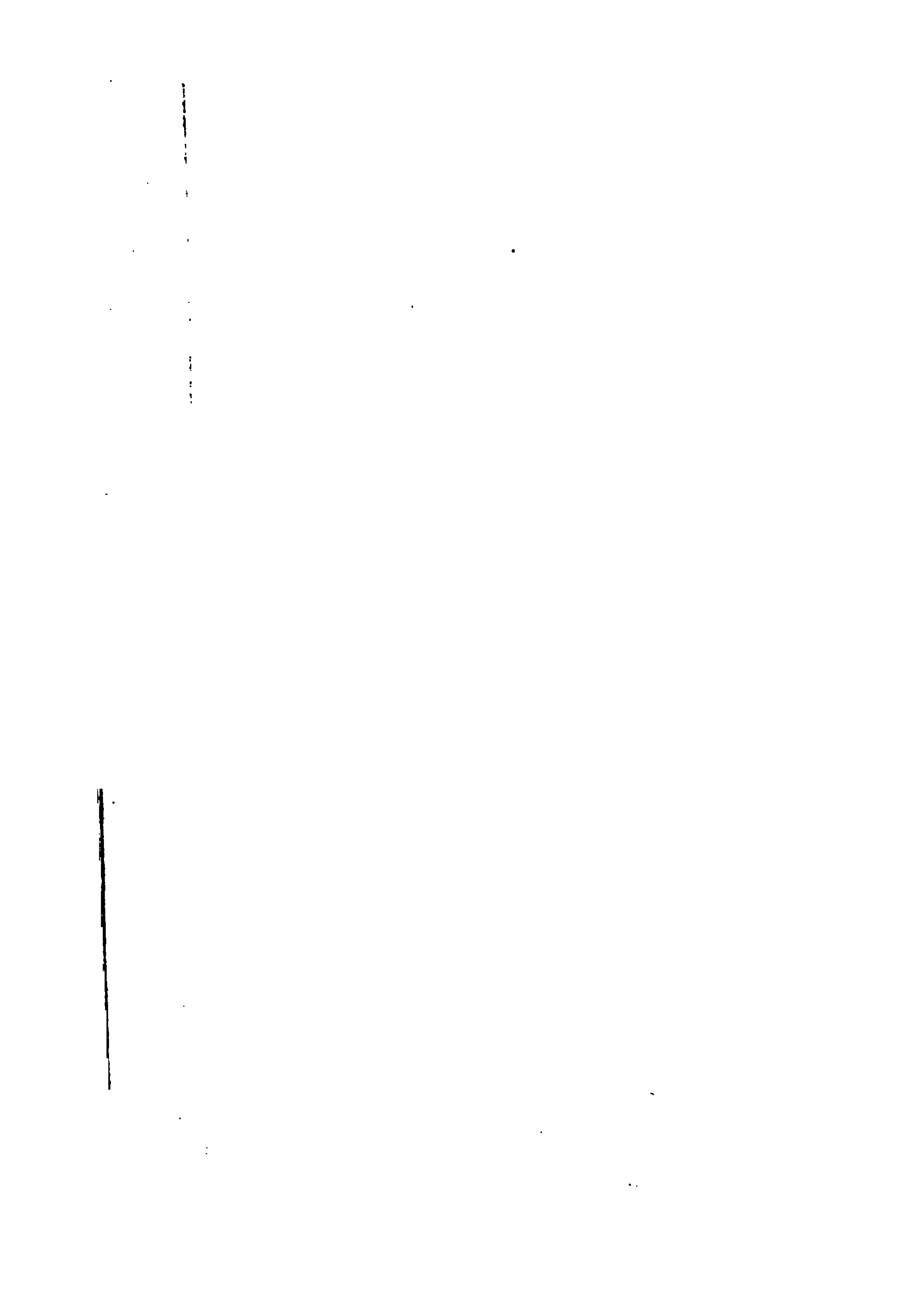
## Z.

### Zahlentheorie.

366. Beiträge zu einer additiven Zahlentheorie. K. Th. Vahlen. Crelle CXII, 1.
367. Ueber einige für Primzahlen charakteristische Beziehungen. J. Hacks. Acta Math. XVII, 205.
368. Sur quelques calculs entrepris par M. Bertelsen et concernant les nombres premiers. J. P. Gram. Acta Math. XVII, 301.
369. Drei neue Beweise des Reciprocitätssatzes in der Theorie der quadratischen Reste. Herm. Schmidt. Crelle CXI, 107.
370. Das allgemeine bicubische Reciprocitätsgesetz. J. A. Gmeiner. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 562.
371. Zur Verallgemeinerung der Function $\varphi(m)$ in der Zahlentheorie. K. Zsigmondy. Crelle CXI, 344.
372. Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln aller ungeraden Primzahlen unter 3000. G. Wertheim. Acta Math. XVII, 315.
373. Ueber den grössten gemeinsamen Theiler. L. Gegenbauer. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 1143.
374. Ueber eine Anzahlbestimmung und eine damit zusammenhängende Reihe. G. Landsberg. Crelle CXI, 87.
375. The numbers of sums of quadratic residues and of quadratic non-residues respectively taken $n$ at a time and congruent to any given integer to an odd prime modulus $p$. J. C. Fields. Crelle CXII, 247.
376. Sur l'équation $x^{37}+y^{37}+z^{37}=0$. D. Mirimanoff. Crelle CXI, 26.
377. Ueber die aus den 4. Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen. L. Gegenbauer. Wiener Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CI, 884.

Vergl. Determinanten 194. Elliptische Transcendenten.


F
H
M
D
Y
E



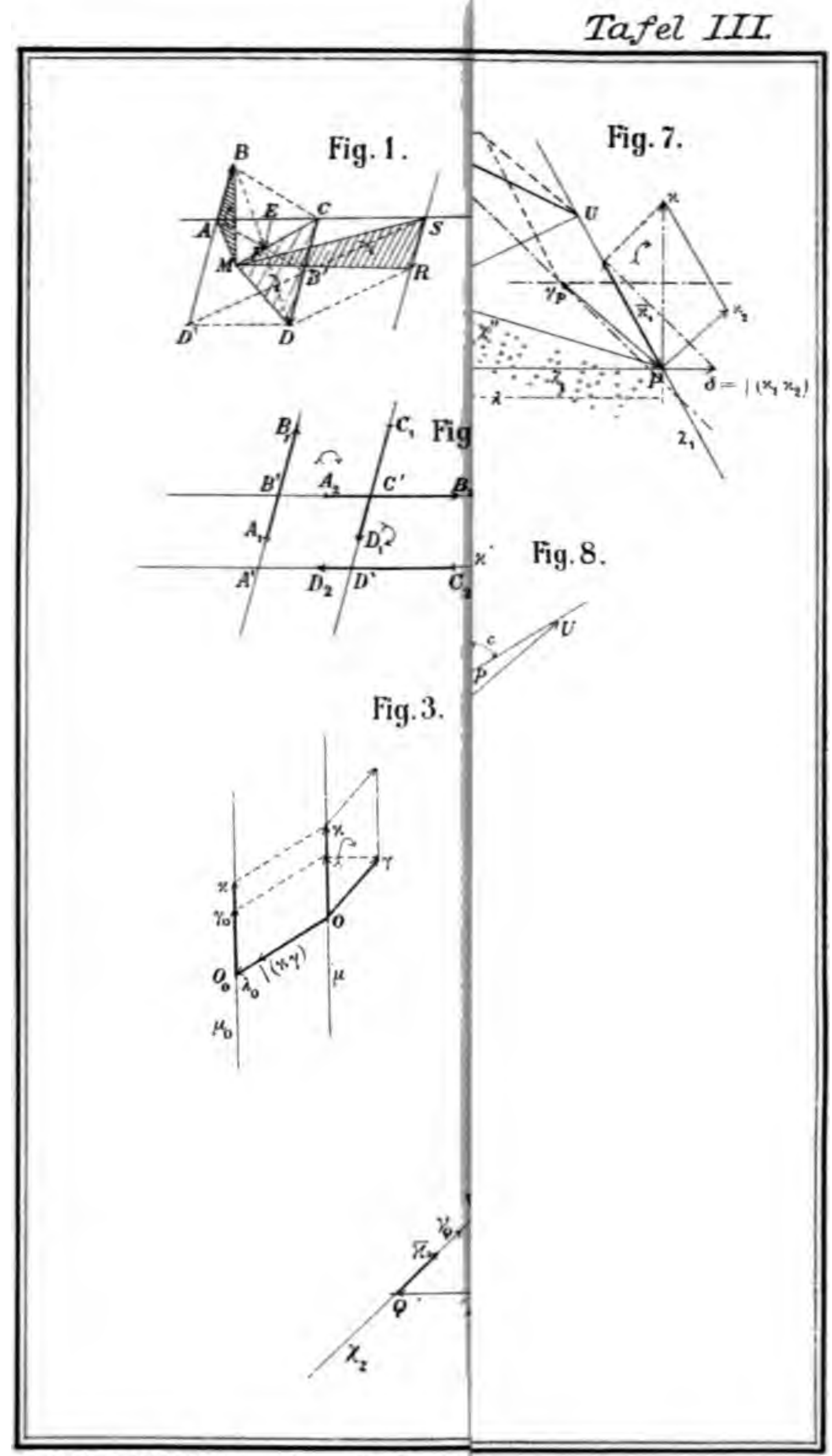
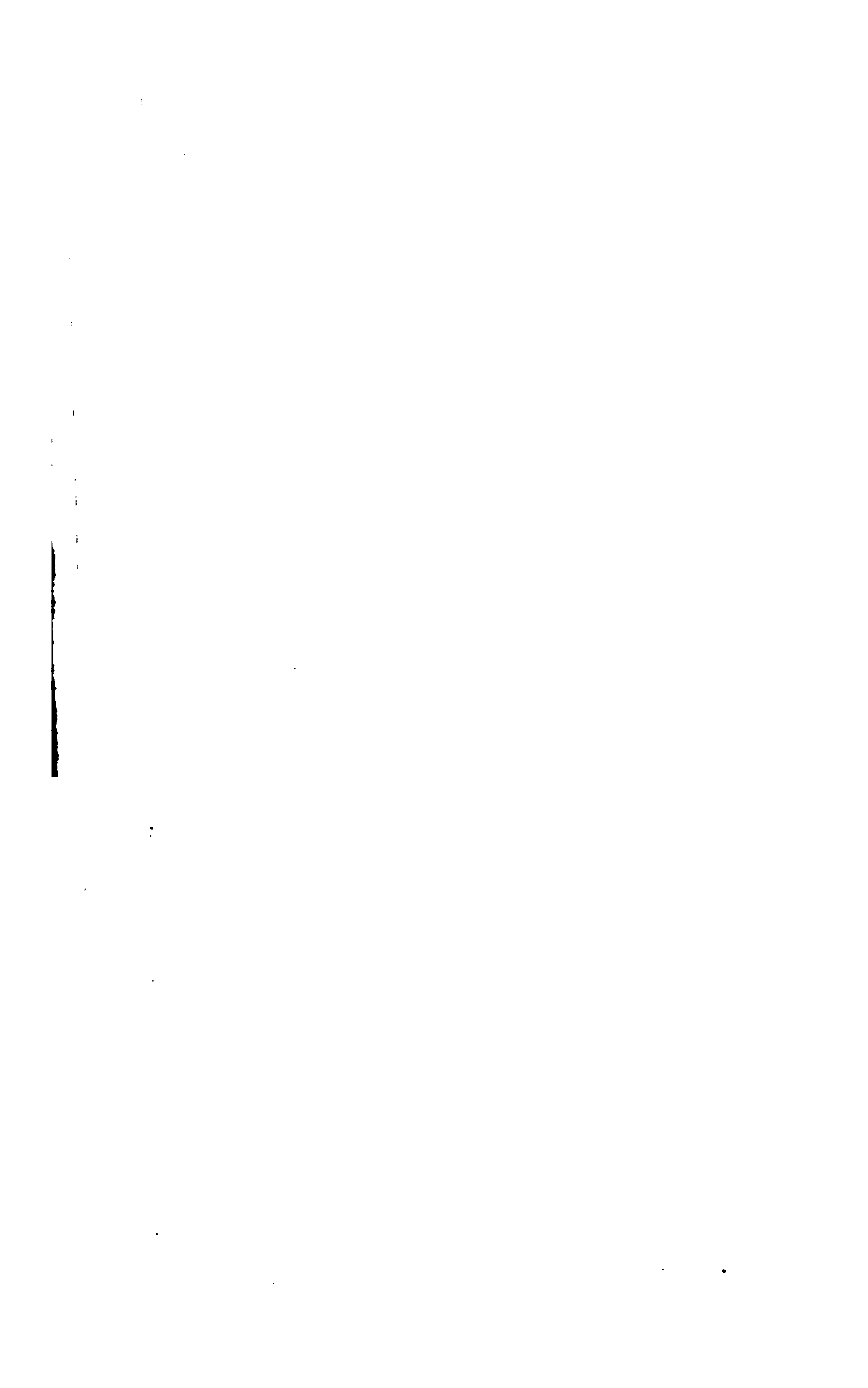
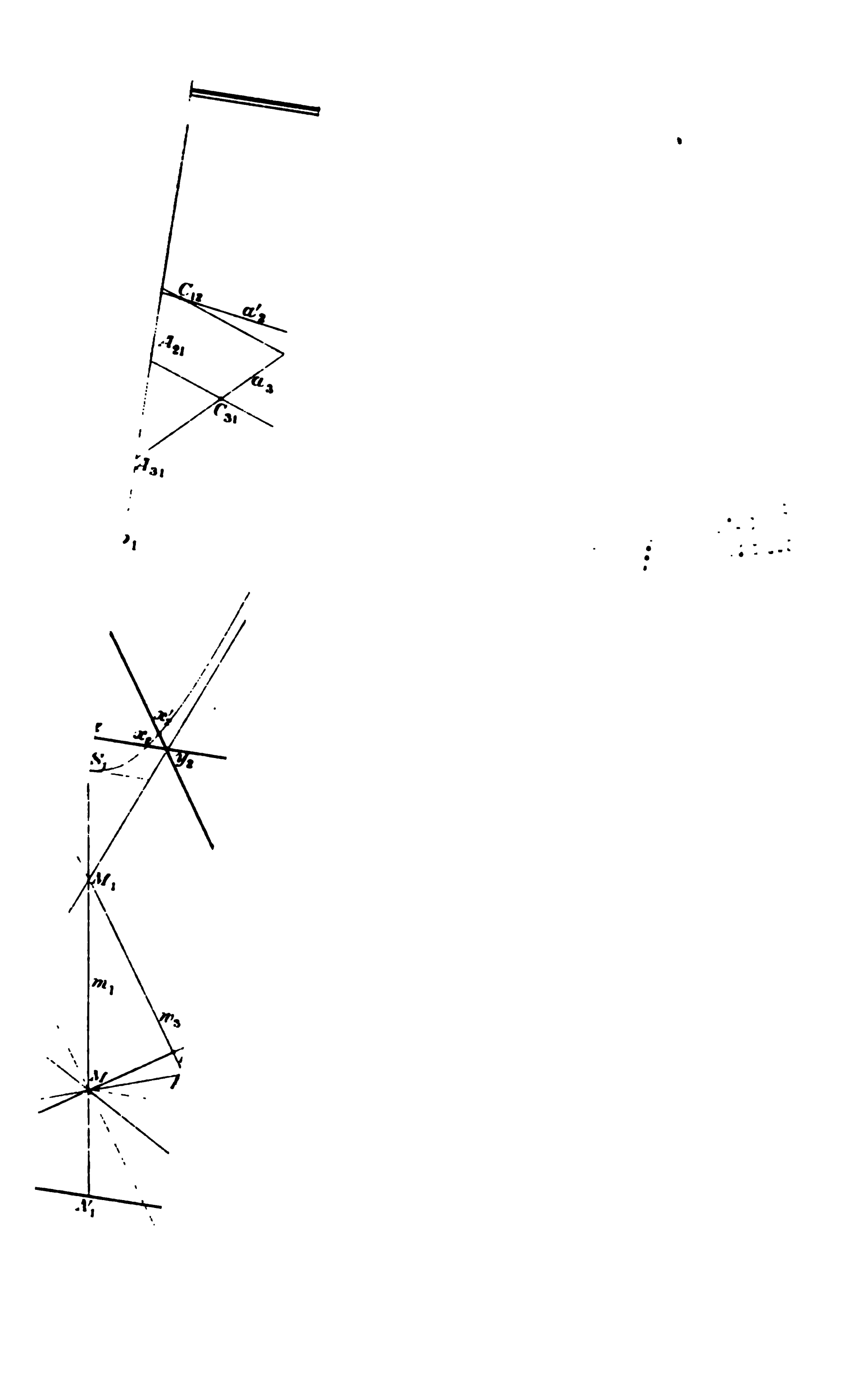
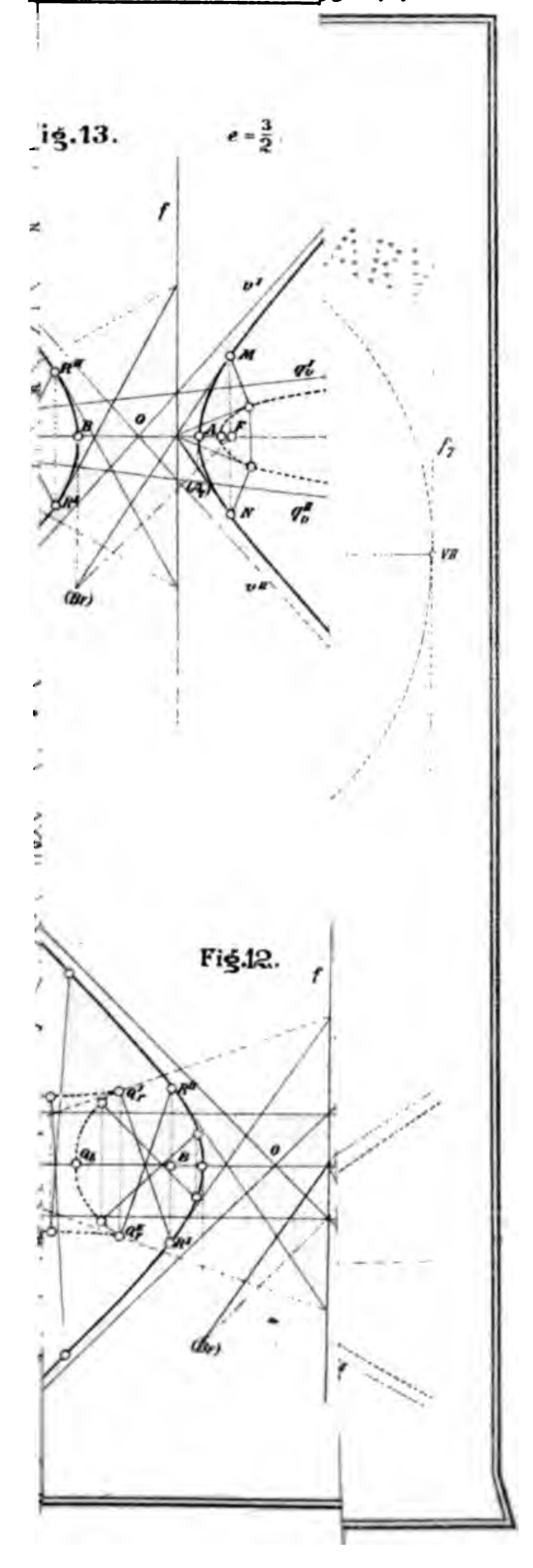


Fig. 1.
Fig. 7.
Fig
Fig. 8.
Fig. 3.





C12
a'2
A21
a3
C31
A31
x'2
x2
S1
y2
M1
m1
m3
M
N1


ig.13.
e = 3/2
Fig.12.

